τ傾理論と
ねじれ類入門

ー分裂射影対象と広大区間の立場からー

榎本 悠久 (大阪公立大)

予定 (キーワード)

1日目

Part I
- 分裂射影対象・被覆,
  関手的有限性

Part II
- (関手的有限) ねじれ類と
  (τ)傾加群

2日目

Part III
- ねじれ類の広大区間, brick ラベル

- 分裂射影対象と
  Hasse 矢の対応

Part IV
- 変異の性質

Part 0. これは何か？

- 私が3年前くらいに、ねじれ類について勉強しながら身内で発表したセミナー「τ-tilting for me」のまとめ

(名大の酒井氏・斉藤氏・東大の竹田氏に感謝)

(いくつかは [E-酒井, ICE-closed…] の共同研究にもとづく)

- 内容：ねじれ類・τ傾理論周辺の重要な論文たちの結果を、「自分が分かりやすいように」解釈(なおし(多くを))別証明を与えたもの

Tool
1. 分裂射影対象 [Auslander-Smalø, 1980]
2. (広大)区間 [浅井-Pfeifer, 2022] [Demonet-伊山-Reading-Reiten-Thomas 2023] [E-酒井, 2021]

- [足立-伊山-Reiten], [Jasso]
- [Demonet-伊山-Jasso], [Smalø]
- [Marks-Šťovíček], [浅井], …

ねらい

1. 多くの結果が、Tool を使った分かりやすい解釈・証明があるが、あまり知られていなさそうなので布教したい

2. 加群圏の部分圏を調べる理論の入門

注意

(知ってる人向け)

・「加群圏の部分圏」という立場に特化した見方・手法なので、三角圏、とくに (2-)silting や SMC やらの言語は使わない。

・多元環の表現論のキソは仮定 (AR theory、AR quiver)
(傾加群, ねじれ類 は仮定しないが、
tilting　　　torsion class
[ASS] でみたことあるとより良い)

・時間の関係で扱わないトピック多数。

・簡単な証明は HW として省略

コピペここまで。

以下板書。

設定・記法

- k : 体 , A : f.d. k-alg

- $\mathrm{mod}\,A$: f.g. 右 A 加群の圏

  $\supset$ $\mathrm{proj}\,A$: ——— proj mod ———

  $\mathrm{inj}\,A$: ——— inj ———.

  $$D : \mathrm{mod}\,A \xleftrightarrow{\sim} \mathrm{mod}\,A^{op}$$
  $$\parallel$$
  $$\mathrm{Hom}_k(-, k).$$

- $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,A$ といったら

  $\mathcal{C}$: full subcat で、

  closed under isom & direct summands

- $M \in \mathrm{mod}\,A$

  $\rightsquigarrow \mathrm{add}\,M := \{ N \in \mathrm{mod}\,A \mid N \mid^{\oplus} M^{\exists n} \}$.

- $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,A$

  $\rightsquigarrow \mathrm{ind}\,\mathcal{C} := \{ X \in \mathcal{C} \mid X : 直既約 \} / \cong$.

- $|\mathcal{C}| = |\mathrm{ind}\,\mathcal{C}|$ ← コスウ

  $|M| = |\mathrm{add}\,M| = |\{M の \text{ indec smd}\}/\cong|$.

Part I

I. 1 (分裂)射影対象

Recall mod A の中で、proj A は次をみたす P

(1) $\mathrm{Ext}^1_A(P, \mathrm{mod}A) = 0$

proj obj

(2) $\forall M \twoheadrightarrow P$: surj は split (retraction)

split proj

さらに progen A は

(3) $\underbrace{\mathrm{mod}A \subseteq \mathrm{Fac}A}_{\text{cover}}$ みたし, かつ

$\quad\quad\quad (=) \quad \parallel$

$\{M \mid \exists A^n \twoheadrightarrow M\}$

minimal cover. $\left\{ \begin{array}{l} P \oplus A \text{ で } \mathrm{mod}A \subseteq \mathrm{Fac}P \\ \rightsquigarrow \mathrm{add}P = \mathrm{add}A. \end{array} \right.$

これを subcat で考える

Def $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}A$:

(1) $P \in \mathcal{C}$: (Ext-) proj obj in $\mathcal{C}$

if $\mathrm{Ext}^1(P, \mathcal{C}) = 0$

(2) $P \in \mathcal{C}$: split proj obj in $\mathcal{C}$

分裂射影, sp-proj

if $\forall\, C \twoheadrightarrow P$: surj, $C \in \mathcal{C}$ は split.

(3) $\mathcal{P}(\mathcal{C}) := \{\text{proj obj in } \mathcal{C}\}$

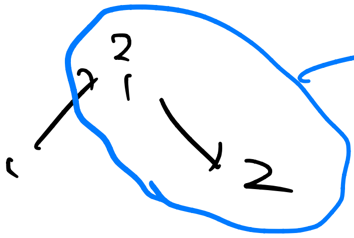
HW $\cup$

$\mathcal{P}_0(\mathcal{C}) := \{\text{sp-proj obj in } \mathcal{C}\}$ ⌟

Ex $\mathcal{P}(\mathrm{mod}\,A) = \mathcal{P}_0(\mathrm{mod}\,A) = \mathrm{proj}\,A$.

Ex $A = k(1 \leftarrow 2)$

mod A:



注 projとちがい、sp-projはうめこみ 〃 えん

exact cat の仮定でやってない、

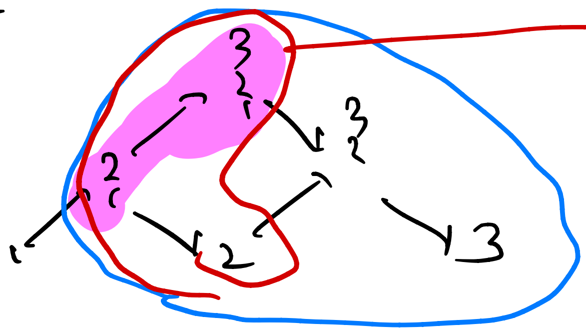
$\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, 2$

$\cup\!\!\!\not\;$ $\qquad \mathcal{C}$

$\mathcal{P}_0(\mathcal{C}) = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$. $\qquad \cup$

(2 : not sp-proj by surj $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \twoheadrightarrow 2$)

Ex $A = k(1 \leftarrow 2 \leftarrow 3)$



$\mathcal{P}(\mathcal{C})$

: $\mathcal{P}_0(\mathcal{C})$

Def $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{mod} A$: E-closed $:\Longleftrightarrow$ ext-closed

$\Updownarrow$

$\left(\forall\ 0 \to L \to M \to N \to 0,\ L, N \in \mathcal{C} \Rightarrow M \in \mathcal{C} \right)$

(1) $\mathcal{C}$ has enough proj $:\Longleftrightarrow$

$\forall\, C \in \mathcal{C}$, $\exists$ s.e.s

$$0 \to C' \to P \to C \to 0 \quad \text{with}$$

$$C' \in \mathcal{C}, \quad P \in \mathcal{P}(\mathcal{C}) \ (\subseteq \mathcal{C})$$

(2) $P \in \mathcal{C}$: progenerator

$:\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$: enough proj,

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \operatorname{add} P.$$

Ex [E] $|\mathcal{C}| < \infty \Rightarrow \mathcal{C}$: progen をもつ

(progen : $\bigoplus \operatorname{ind} \mathcal{P}(\mathcal{C})$) $\lrcorner$

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}) \overset{?}{=} \mathcal{P}_0(\mathcal{C})$$

Prop 1 $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{mod} \Lambda$ が KE-closed

(i.e., K-closed & E-closed

$\uparrow$ kernel で閉じる

$(\forall\ C_1 \xrightarrow{f} C_0,\ C_0, C_1 \in \mathcal{C} \Rightarrow \operatorname{Ker} f \in \mathcal{C})$)

とすると, $\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \mathcal{P}_0(\mathcal{C})$

∵ ($\supseteq$) ok

($\subseteq$) $\forall\, P \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$, $C \xrightarrow{\pi} P$: surj,

$\operatorname{Ker}\pi \in \mathcal{C}$ より

$0 \to \operatorname{Ker}\pi \to C \xrightarrow{\pi} P \to 0$: ex in $\mathcal{C}$

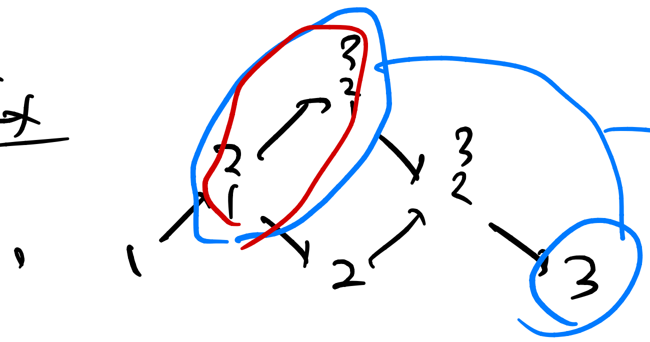
$\rightsquigarrow$ $\operatorname{Ext}^1(P, \operatorname{Ker}\pi) = 0$ より split. □

(Fun Fact (HW)

$\mathcal{C} \subseteq \operatorname{mod}\Lambda$: E-closed, enough proj とき,

$\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \mathcal{P}_0(\mathcal{C}) \iff \mathcal{C}$: epi-ker で閉じる.)

Ex



$\mathcal{C}$: KE-closed

O : $\mathcal{P}(\mathcal{C})$

・(後で) torf, wide : KE-closed

より $\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \mathcal{P}_0(\mathcal{C})$.

Def $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{mod} A$

(1) $M \in \mathcal{C}$: cover of $\mathcal{C}$ (ヒフク)

:$\iff$ $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{Fac} M$

$\iff$ $\forall C \in \mathcal{C}, \exists M^n \twoheadrightarrow C$: surj.

(2) $M \in \mathcal{C}$: minimal cover of $\mathcal{C}$

:$\iff$ (i) $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{Fac} M$

(ii) $N \oplus M$, $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{Fac} N$

$\Longrightarrow \operatorname{add} N = \operatorname{add} M$

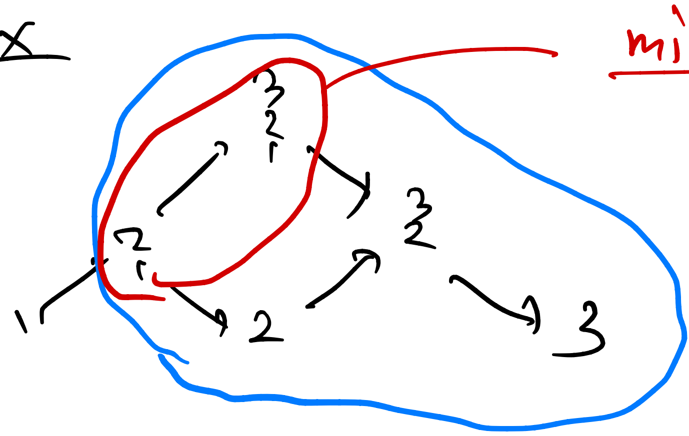
(つまり M から ind. を 1つでも なくすと cover でなくなる)

Ex (1) A covers $\operatorname{mod} A$

(2) $P \in \operatorname{mod} A$: cover of $\operatorname{mod} A$

$\Longleftrightarrow P$: progen.

Ex



min. cover

(これって sp-proj であった)

Obs $\mathcal{C}$ が cover もつ $\Longrightarrow$ min cover もつ

($\because$ ind M から 1つずつ とりのぞく)

しかし unique 性?

Thm 2 [Auslander-Smalø]

$\mathcal{C} \subseteq \operatorname{mod} A$ が cover M をもつなら、

$M \in \mathcal{C}$: min. cover

$\Longleftrightarrow \operatorname{add} M = \mathcal{P}_0(\mathcal{C})$

(つまり sp-proj あつめたのが ちょうど min cover)

$\longrightarrow$ min cover は unique.

∵ **Obs** M covers $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{P}_0(\mathcal{C}) \subseteq \mathrm{add}\, M$

$$\left(\begin{array}{l} \because\ \forall P : \text{sp-proj},\ P \in \mathcal{C} \subseteq \mathrm{Fac}\, X \\ \rightsquigarrow \quad \underset{\mathcal{C}}{\overset{}{\underset{\cap}{X^n}}} \twoheadrightarrow P \quad \text{splits} \\ \rightsquigarrow \quad P \triangleleft\!\oplus X^n \qquad \square \end{array} \right)$$

(⇐) Obsより. OK

(⇒) Obsより $\mathrm{add}\, M \supseteq \mathcal{P}_0(\mathcal{C})$

等しくないとする. $\exists\, X \in \mathrm{ind}\, M$

s.t. X : not sp-proj in $\mathcal{C}$.

M を basic として $M = X \oplus Y$ とおく.

∘ X : not sp-proj より $\exists\ C \twoheadrightarrow X$: surj not retr.

$$\begin{tikzcd} & & C \arrow[r, two heads] & X \\ M \text{ covers } \mathcal{C} \arrow[r] & M^n \arrow[ur, two heads] & & \\ & X^n \oplus Y^n \arrow[u, phantom, "\cong" description] \arrow[uurr, two heads, "\varphi"', "\text{surj, not retr}"] & & \end{tikzcd}$$

$\varphi = [f_1, \cdots, f_n, g]$

X : indec より, φ : radical

$\therefore\ f_i : X \to X \in \mathrm{rad}\, \mathrm{End}_A(X)$

一方 X を 左 $\mathrm{End}_A(X)$加群 とみて.

φ : surj より

$$X = (\mathrm{rad}\,\mathrm{End}_A(X))\cdot X + \sum\{\mathrm{Im}\,h \mid h: Y\to X\}$$

∴ 中山より

$$X = \sum\{\mathrm{Im}\,h \mid h: Y\to X\}$$

⇝ $\exists\, Y^m \twoheadrightarrow X$: surj

よって、 $X \in \mathrm{Fac}\,Y$

∴ $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Fac}(X\oplus Y) \subseteq \mathrm{Fac}\,Y$

これは $X\oplus Y$: min cover に矛盾. □

sp-proj 求めるには
cover 探して、へらして min cover にする!

I.2 関手的有限性

<u>Def</u> $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,A \ni X$

(1) $X \xrightarrow{f} C^X$: left $\mathcal{C}$-approximation
左 $\mathcal{C}$ 近似 of X

:⟺ ◦ $C^X \in \mathcal{C}$

◦
$$\begin{tikzcd} & C^X \arrow[dd, dashed, "\exists"] \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "\forall"'] & \\ & C \in \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

(2) $X \xrightarrow{f} C^X$: **left minimal $\mathcal{C}$-approx**

:⟺ f : $\mathcal{C}$-approx &

f : left minimal

(:⟺
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & C^X \arrow[d, "\varphi"] \\ & C^X \end{tikzcd} \arrow[phantom, "\circlearrowleft"] \rightsquigarrow \varphi : \text{isom}$$
)

(3) $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{mod} A$: **covariantly finite**
(cov. fin
共変有限)

:⟺ $\forall X \in \operatorname{mod} A$ が
左 $\mathcal{C}$-approx $X \to C^X$ をもつ.」

Dually for right $\mathcal{C}$-appr $C_X \to X$,
反変有限 (contravariantly finite
contr. fin.)

(4) $\mathcal{C}$: **functorially finite (fun. fin)**
関手的 有限

:⟺ $\mathcal{C}$: contr. fin & cov. fin.」

subcat の「良い有限性」:

<u>Fact</u> (1) HW $|\mathcal{C}| < \infty$

$\Rightarrow \mathcal{C}$: fun. fin.

(e.g. $\mathcal{C} = \operatorname{add} M$)

(2) $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\, A$: fun. fin

$\Rightarrow$ ∘ $\mathcal{C}$ は AR 列 をもつ

∘ $\mathcal{C}$ は enough proj & inj.

(3) $\exists\, X \to C^X$: left $\mathcal{C}$-approx

$\Rightarrow$ X は <u>min</u> left $\mathcal{C}$-approx をもつ

<u>Ex</u> $\mathrm{inj}\, A \subseteq \mathrm{mod}\, A$: fun. fin. ($\mathrm{inj}\, A = \mathrm{add}\, DA$)

$X \to I^X$: min left approx

$\quad\ \ \|$

inj hull of X.

Thm 3 [AS]

$\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\, A$, TFAE

(1) A_A has left $\mathcal{C}$-approx

(2) $\mathcal{C}$ has a cover.

さらに, $A \to C^A$: min left $\mathcal{C}$-approx

とると, C^A が $\mathcal{C}$ の min. cover

($\therefore\ \mathcal{P}_0(\mathcal{C}) = \mathrm{add}\, C^A$)
by Thm 2.

(12) (1) ⇒ (2)

$A \to C^A$: left $\mathcal{C}$-approx とると

C^A は $\mathcal{C}$ の cover

$$
\left(\because \forall C \in \mathcal{C},\
\begin{tikzcd}
A^n \arrow[r, two heads] \arrow[d] & C \\
(C^A)^n \arrow[ur, dashed, "\exists\ \text{surj}"'] &
\end{tikzcd}
\right)
$$

(2) ⇒ (1)

M : $\mathcal{C}$ の cover とする。

(add M)-approx

$A \to M^A$: left M-approx

をとると、これは $\mathcal{C}$-approx である

$$
\left(\because \forall\
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[d] & & X \in \mathcal{C} \\
M^A \arrow[r, "\text{M-approx}"'] & M^n \arrow[ur, "\text{M covers } \mathcal{C}"'] &
\end{tikzcd}
\right)
$$

proj

∎

(さらに以降)

M : $\mathcal{C}$ の min cover をとる。

$A \xrightarrow{f} M^A$: left min M-approx

⇒ (2) ⇒ (1) より f : ——— $\mathcal{C}$-approx.

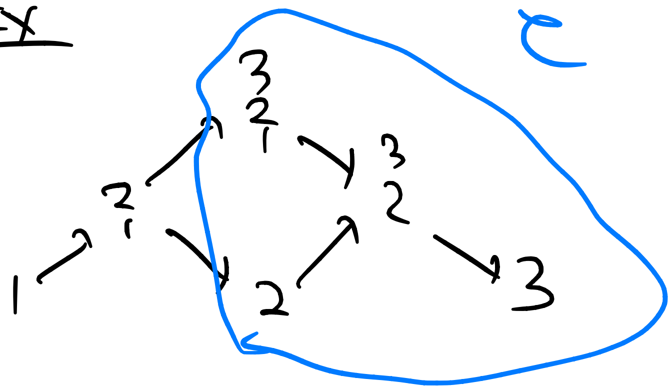
一方, (1) $\Rightarrow$ (2') より M^A は $\mathcal{C}$ の cover

$M^A \in \mathrm{add}\, M$, M^A covers $\mathcal{C}$ より.

M : min cover なことから

$$\mathrm{add}\, M^A = \mathrm{add}\, M. \quad \square$$

Ex



$$P(1) : \quad 1 \longrightarrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$$

$$P(2) : \quad \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus 2$$

$$\oplus \quad P(3) \quad \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$$

$$A \longrightarrow C^A \ : \text{left min } \mathcal{C}\text{-appr.}$$

$$\therefore \ \mathcal{P}_0(\mathcal{C}) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}, \ \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}.$$

「sp-proj = min cover は A の min left approx で計算できる」

<u>Def</u> $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{mod} A$: I-closed, (image-closed)

$:\Longleftrightarrow \forall f : c_1 \to c_2,\quad c_1, c_2 \in \mathcal{C},$

$\operatorname{Im} f \in \mathcal{C}$ ⌟

(<u>Ex</u> tors, torf, wide, …)

Thm 4 [AS]

$\mathcal{C}$: I-closed とき, TFAE

(1) $\mathcal{C}$: cov. fin.

(2) $\mathcal{C}$ が cover もつ. ⌟

∵ <u>(1) ⟹ (2)</u>

$\mathcal{C}$: cov. fin なら $\exists\, A \to C^A$: left $\mathcal{C}$-approx. ∴ Thm 3 より $\mathcal{C}$ は cover もつ

<u>(2) ⟹ (1)</u> ムズイ!

$\forall X \in \operatorname{mod} A$ をとる

$\rightsquigarrow \exists\ A^n \xrightarrow{\pi} X$: surj

∃ left $\mathcal{C}$-app by Thm 3.

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, "\exists f"] & X \arrow[d, dashed] \\ C^{A^n} \arrow[r, dashed] & ? \end{tikzcd}$$

◦ $C \in \mathcal{C}$ と $X \xrightarrow{\varphi} C$ を動かして

大きい直積 $X \xrightarrow{\prod \varphi_i} \prod_{i \in I} C_i$ をとる.

各 $i \in I$ で

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "\varphi_i"] \\
C^{A^n} \arrow[r, dashed, "\exists \psi_i"] & C_i
\end{tikzcd}$$

by f : $\mathcal{C}$-appr.

$\xrightarrow{\prod}$

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[rr] \arrow[d] & & X \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, bend left, "\prod \varphi_i"] \\
 & \square \arrow[r] & \\
C^{A^n} \arrow[ur] \arrow[rr, "\prod \psi_i"'] & & \prod C_i
\end{tikzcd}$$

C^{A^n}, C_i は f.d. なことから,

$$\square = C^{A^n} \Big/ \bigcap_{i \in I} \operatorname{Ker} \psi_i$$

有限でとれる

$$= C^{A^n} \big/ \operatorname{Ker} \psi_{i_1} \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} \psi_{i_r}$$

$$= \operatorname{Im}(\underbrace{\psi_{i_1} \prod \cdots \prod \psi_{i_r}}_{C \to C_{i_1} \oplus \cdots \oplus C_{i_r}}) \in \mathcal{C}$$

$\therefore$ $\mathcal{C}$: I-closed より $\square \in \mathcal{C}$

$\rightsquigarrow$ $X \xrightarrow{g} \square$ is left $\mathcal{C}$-approx

$$\left(\because \quad \begin{tikzcd} & \forall X \arrow[rr] \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr] & & C \\ \square \arrow[rr, hook] & & \prod C_i \arrow[ur, dashed, "\exists"'] & \end{tikzcd} \right)$$

$\square$

<u>Def</u> $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\, A$

(1) $\mathcal{C}$: I / C / K / E - closed

$\Longleftrightarrow$ I : image-closed

C : Coker-closed

K : Ker ——

E : Ext ——

(2) $\mathcal{C}$: wide (fu太)

:$\Longleftrightarrow$ CKE-closed

($\rightsquigarrow$ abelian subcat, I-closed でもある.)

Cor 5. $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\, A$: IKE-closed.

TFAE (1) $\mathcal{C}$: cov. fin. (e.g. wide)

(2) $\mathcal{C}$: cover もつ

(3) $\mathcal{C}$: progen をつ

このとき $\mathcal{C}$ の min cover

$= \mathcal{C}$ の progen.

(証) (1) $\Longleftrightarrow$ (2) : Thm 4.

(3) $\Longrightarrow$ (2) : Clear

(progen は $\mathcal{C}$ を cover)

(2) $\Longrightarrow$ (3) P : $\mathcal{C}$ の min cover とる

$\rightsquigarrow$ Thm 2 より P : (sp-)proj in $\mathcal{C}$

$\forall X \in \mathcal{C}$, $\exists$ $P_X \twoheadrightarrow X$: surj

$P_X \in \operatorname{add} P$

これと $\mathcal{C}$: K-closed より

$\exists\ 0 \to X' \to P_X \to X \to 0$

$X' \in \mathcal{C}$, $P_X \in \operatorname{add} P$

Key! $\therefore$ P は $\mathcal{C}$ の progen $\square$

Cor 6 $\mathcal{W} \subseteq \operatorname{mod} A$: wide とする

TFAE (1) $\mathcal{W}$: cov. fin

(2) $\mathcal{W}$: cont. fin

(3) $\mathcal{W}$: fun. fin.

(4) $\exists$ f.d. alg B s.t.

$$\mathcal{W} \simeq \operatorname{mod} B.$$

∵) Cor 5 より

(1) $\Longleftarrow$ $\mathcal{W}$ has cover $\Longleftarrow$ $\mathcal{W}$ has progen

「B covers mod B」& equiv で 3つす. $\Uparrow$

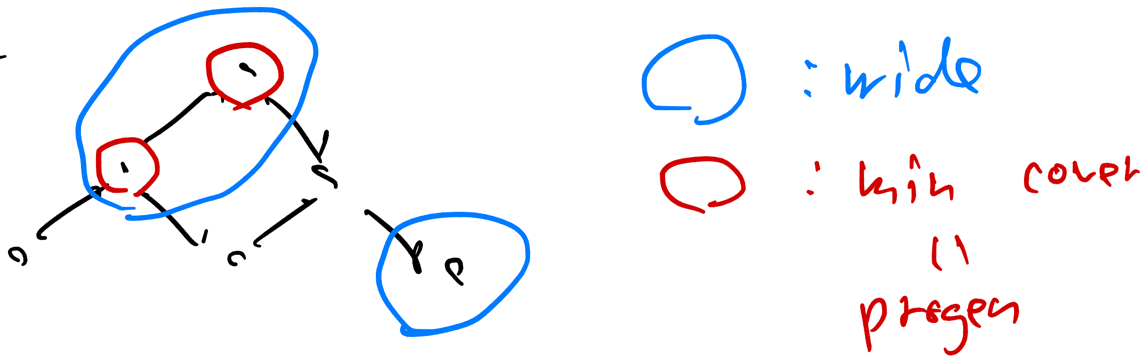
$\Swarrow$ 森田 ($B := \operatorname{End}(\text{progen})$)

$\mathcal{W} \simeq \operatorname{mod} B$

で (1) $\Longleftrightarrow$ (4).

また (4) は 左右対象より, dual 考えて 全て 同値. □

Ex



$$\mathcal{W} \simeq \operatorname{mod} k(1 \leftarrow 2)$$

Part II. ねじれ類と τ 傾斜

II.1. Tilting vs tors

Def $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \operatorname{mod} A$

$$\mathcal{C} * \mathcal{D} := \left\{ X \in \operatorname{mod} A \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\, 0 \to C \to X \to D \to 0 \\ \text{ex}, \ C \in \mathcal{C}, \\ D \in \mathcal{D} \end{array} \right\}$$

Def $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$: $\operatorname{mod} A$ の subcats のペアが

ねじれ対 (torsion pair)

$$\overset{!}{\iff} \begin{cases} (1) & \operatorname{Hom}_A(\mathcal{T}, \mathcal{F}) = 0 \\ (2) & \operatorname{mod} A = \mathcal{T} * \mathcal{F}. \end{cases}$$

tors

このとき $\mathcal{T}$: ねじれ類 (torsion class)

$\mathcal{F}$: ねじれ自由類 (torsion-free class)

torf

$\operatorname{mod} A$ の「直交分解」

$\rightsquigarrow \forall X \in \operatorname{mod} A$

$$\exists!\; 0 \to \underset{\substack{\cup\!\shortparallel \\ \mathcal{T}}}{tX} \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} \underset{\substack{\cup\!\shortparallel \\ \mathcal{F}}}{fX} \to 0.$$

HW このとき i: min. right $\mathcal{T}$-appx.

p: min left $\mathcal{F}$: approx.

よって, $\mathcal{T}$: cont. fin.

$\mathcal{F}$: cov. fin.

Prop (HW)

$\mathcal{T} \subseteq \mathrm{mod} A$: tors

$\iff \mathcal{T}$: ext-closed, Fac-closed

$\left(\forall \begin{array}{c} T \twoheadrightarrow M \\ \cap \\ \mathcal{T} \end{array}, \ M \in \mathcal{T} \right)$

このとき

$$\mathcal{T}^{\perp} := \{ X \mid \mathrm{Hom}(\mathcal{T}, X) = 0 \}$$ であると

$(\mathcal{T}, \mathcal{T}^{\perp})$: torsion pair.

Def

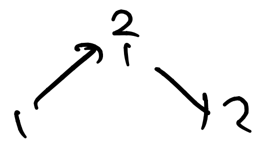
$\mathrm{tors} A := \{ \text{torses in } \mathrm{mod} A \}$

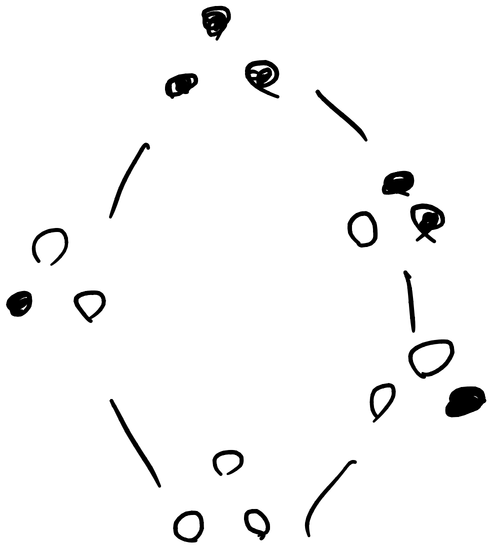
$\mathrm{torf} A := \{ \text{torfs} \ \text{———} \}$

⇝ 上より $\mathrm{tors} A \underset{{}^{\perp}(-)}{\overset{(-)^{\perp}}{\rightleftarrows}} \mathrm{torf} A$

: poset anti-isom

(自明で)

Ex 

$\rightsquigarrow$ tors A :  5 コ.

Part I の系 :

Thm 17. $\mathcal{T} \in$ tors A 次が成立

(1) $\mathcal{T}$: fun. fin ($\iff \mathcal{T}$: cov. fin)

$\iff \exists M \in \mathcal{T} \quad \mathcal{T} = \mathrm{Fac}\, M$

(2) $\mathcal{T}$ is enough inj

$\underset{\{\text{inj objs}\}}{I(\mathcal{T})} = \mathrm{add}\; t(DA)$

証 (1) $\mathcal{T}$: tors は I-closed

$\therefore$ $\mathcal{T}$: cov. fin $\underset{\text{Thm 4}}{\iff}$ $\mathcal{T}$ が cover $^{\exists}M$ をもつ

$\Downarrow$ $\exists$

$\mathcal{T} \subseteq \mathrm{Fac}\, M$

(さらに $\mathcal{T}$: Fac-closed より), $\Downarrow$ $\supseteq$

$\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\, M$.

(2) $\mathcal{T}$ は conf. fin だったので、

$\mathcal{T}$: ICE - closed より

Cor 5 の dual より、

$\mathcal{T}$ は enough inj で

inj cogen : DA の min right $\mathcal{T}$-approx

$\quad /\!/$

$t(DA)$ □

<u>Rem</u> $\mathcal{T}$: enough proj とは限らない！

$\mathcal{P}(\mathcal{T}) = \{0\}$ もありうる。

いつ enough proj ? ← <u>fun. fin も大事！</u>

tors の proj を決定する：

Thm 8 $\mathcal{T} \in \operatorname{tors} A$, fun. fin とする

$A \xrightarrow{f} T_0^A$: left min $\mathcal{T}$-app. とり、

$A \xrightarrow{f} T_0^A \xrightarrow{g} T_1^A \to 0$: ex とおくと、

(1) $\operatorname{add} T_0^A = \mathcal{P}_0(\mathcal{T})$, $T_1^A \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$

(2) $\operatorname{ind} T_0^A \cap \operatorname{ind} T_1^A = \phi$

(3) $\mathcal{P}(\mathcal{T}) = \operatorname{add}(T_0^A \oplus T_1^A)$ で

$\mathcal{T}$ は progen $T_0^A \oplus T_1^A$ をもつ (enough proj !) ┘

② (1) Thm 3 より $\mathrm{add}\, T_0^A = \mathcal{P}_0(\mathcal{T})$.

$$0 \to \mathrm{Im} f \xrightarrow{\varphi} T_0^A \xrightarrow{g} T_1^A \to 0$$

ここを left $\mathcal{T}$-approx

に $(-, \mathcal{T})$ すれば、すぐ $T_1^A \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$ である

($(T_0^A, \mathcal{T}) \twoheadrightarrow (\mathrm{Im} f, \mathcal{T}) \to {}^1(T_1^A, \mathcal{T}) \to {}^1(T_0^A, \mathcal{T}) = 0$)

(2) NEW $\exists M \in \mathrm{ind}\, T_0^A \cap \mathrm{ind}\, T_1^A$ とする.

⇝ M : sp-proj in $\mathcal{T}$ より

$$\underset{\mathcal{T}}{\overset{T_0^A}{\cap}} \xrightarrow[g]{} \!\!\!\!\!\rightarrow T_1^A \underset{\text{projection}}{\overset{\theta}{\twoheadrightarrow}} M$$ は split

よって 合成がradで 矛盾

しかし 次の Lem より $g \in \mathrm{rad}$ で矛盾.

(**Lem HW**

$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$: ex

f : left min $\Longleftrightarrow$ g : radical)

(3) NEW 直接 $T_0^A \oplus T_1^A$ が $\mathcal{T}$ の progen をみる. proj は OK.

$\forall X \in \mathcal{T} = \mathrm{Fac}\, T_0^A$ (cover より) より

$$\exists \quad \begin{tikzcd} & A^m \arrow[r] \arrow[d] & (T_0^A)^m \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & (T_1^A)^m \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & (T_0^A)^n \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ここで, ここ surj から (*) : pushout (HW)

〜> つなげば,

$$\begin{tikzcd} (T_0^A)^m \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & (T_1^A) \oplus (T_0^A)^n \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \quad : \mathrm{ex} \\ & X' \arrow[ur, hook] & & & \end{tikzcd}$$

$X' \in \mathcal{T}$ by $\mathcal{T}$: Fac-closed.

∴ $T_0^A \oplus T_1^A$ は $\mathcal{T}$ の progen. $\square$

Cor $\mathcal{T}$: fun. fin. tors

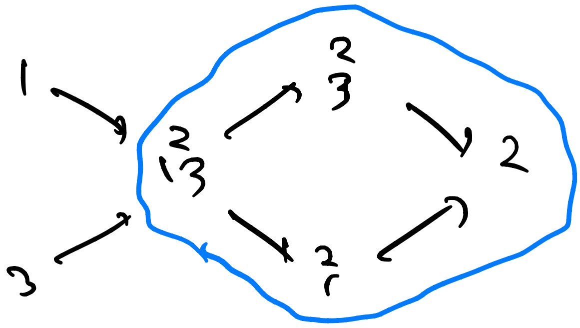
⇒ $\mathcal{T}$ は progen をもつ. A の min left $\mathcal{T}$-app から

$$A \xrightarrow{f} T_0^A \longrightarrow T_1^A \longrightarrow 0$$ つくると

$$\mathcal{P}(\mathcal{T}) = \underset{\text{sp-proj}}{T_0^A} \underset{\text{disj}}{\sqcup} \underset{\text{non-sp proj}}{T_1^A}$$

とキレイに分かれる!

Ex $K[1 \leftarrow 2 \rightarrow 3]$



$$P(1) \longrightarrow \begin{smallmatrix}2\\13\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix} \longrightarrow 0$$

$$P(2) = \begin{smallmatrix}2\\13\end{smallmatrix}$$

$$\oplus \quad P(3) \longrightarrow \begin{smallmatrix}2\\13\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \longrightarrow 0$$

$$A \longrightarrow \left(\begin{smallmatrix}2\\13\end{smallmatrix}\right)^{\oplus 3} \longrightarrow \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix} \longrightarrow 0$$

$$\therefore \; P(T) : \quad \underbrace{\begin{smallmatrix}2\\13\end{smallmatrix}}_{\text{sp-proj}} \oplus \underbrace{\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}}_{\text{nsp-proj}} .$$

Def $T \in \operatorname{mod} A$

(1) T: partial tilting

$:\Longleftrightarrow$
- $\operatorname{pd} T \leq 1$
- $\operatorname{Ext}_A^1(T, T) = 0$

(2) T: tilting (傾斜加群)

$:\Longleftrightarrow$ T : partial tilt かつ

$$\exists\, 0 \to A \to \underbrace{T_0 \to T_1}_{\operatorname{add} T} \to 0 \;:\; \text{ex}$$

Prop 9.

T : tilting とすると.

(1) $\mathrm{Fac}\, T = T^{\perp_1} := \{ X \in \mathrm{mod} A \mid \mathrm{Ext}^1_A(T, X) = 0 \}$

(2) $\mathrm{Fac}\, T$: tors.

(3) $\mathrm{Fac}\, T$ は progen T をもつ. ┘

∵ NEW

(1) $\exists\, 0 \to A \xrightarrow{f} T_0 \to T_1 \to 0$ だが,

f は left $T^{\perp_1}$-approx がすぐ示せる

∴ $T^{\perp_1}$ は cover T_0 を持つ

一方 $T^{\perp_1}$ は tors HW

∴ $T^{\perp_1} = \mathrm{Fac}\, T_0 = \mathrm{Fac}\, T$

(2) HW (1) つかってもOK

(3) $T \in \underset{\underset{T^{\perp_1}}{\parallel}}{\mathrm{Fac}\, T}$: progen みる

ここから $T \in P(T^{\perp_1})$ は明らか,

$\forall X \in \mathrm{Fac}\, T$,

$\exists\, 0 \to X' \to T_X \xrightarrow{\text{right } T\text{-approx}} X \to 0$

surj は $\exists\, T' \twoheadrightarrow X$, $T' \to T_X$, $T_X \to X$

で、$(T,-)$ すると、

$$(T,Tx) \twoheadrightarrow (T,x) \to {}^1(T,x') \to {}^1(T,Tx)$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \| \; 0$$

$\therefore\ x' \in T^{\perp_1} = \mathrm{Fac}\,T$ $\square$

Def $\mathcal{T} \in \mathrm{tors}\,A$: faithful

$:\Leftrightarrow$ $\mathrm{ann}\,\mathcal{T} = 0$

$\overset{\text{def}}{\|}$

$\{a \in A \mid {}^\forall T \in \mathcal{T},\ Ta = 0\}$

$\Leftrightarrow$ $DA \in \mathcal{T}$ HW $\Rightarrow$ $\mathcal{T} \Downarrow {}^\exists A \hookrightarrow T$

HW

Thm 10 $\mathcal{T} \in \mathrm{tors}\,A$ について TFAE

(1) $\exists\ T$: tilt s.t. $\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\,T$

(2) $\mathcal{T}$: fun. fin & faithful

NEW!

$\underline{(1) \Rightarrow (2)}$ Thm 7 より $\mathcal{T}$: fun. fin.

$\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\,T \underset{\text{Prop 9}}{=} T^{\perp_1} \supset DA$ より faithful.

$\underline{(2) \Rightarrow (1)}$ Thm 8 使う。

$\mathcal{T}$: faithful より $\exists A \hookrightarrow T \in \mathcal{T}$

∴ left min $\mathcal{T}$-app $A \to T_0^A$ は単射

$\leadsto 0 \to A \to T_0^A \to T_1^A \to 0$ ——(※)

ができ、$\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\, T_0^A = \mathrm{Fac}(T_0^A \oplus T_1^A)$

$T := T_0^A \oplus T_1^A$ として、T: tilt を示す.

$T \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$ より

$$\mathrm{Ext}_A^1(T, T) = 0$$

また (※) もある.

∴ $\mathrm{pd}\, T \leq 1$ のみみるが、

$\mathcal{T}$: faithful より $DA \in \mathcal{T}$ に注意して.

$\forall X \in \mathrm{mod}\, A$,

$$\mathrm{Ext}^2(T, X) = \mathrm{Ext}^1(T, \Sigma X)$$

$$\left(0 \to X \to \underset{\underset{\mathrm{inj}\,A \subseteq \mathcal{T}}{\cap}}{I} \to \Sigma X \to 0 \right)$$

で $\Sigma X \in \mathcal{T}$ より、$(= 0)$

∴ $\mathrm{pd}\, T \leq 1$ $\square$

II.2. τ傾斜加群

Prop 11 [Auslander-Smalø]

$X, Y \in \mathrm{mod}A$. TFAE.

(1) $\mathrm{Hom}_A(X, \tau Y) = 0$

(2) $\mathrm{Ext}^1_A(Y, \mathrm{Fac}X) = 0$ ⌟

(:) Recall AR formula

$$\mathrm{Ext}^1_A(Y, X) \cong D\overline{\mathrm{Hom}}(X, \tau Y)$$

(1)⇒(2) $X' \in \mathrm{Fac}X$ とすると.

$$X^n \twoheadrightarrow X'$$

$$\rightsquigarrow \quad 0 \to (X', \tau Y) \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{(X^n, \tau Y)}$$

$\therefore$ $\mathrm{Hom}(X', \tau Y) = 0$ より

$\mathrm{Ext}^1_A(Y, X') = 0$

(2)⇒(1) $f : X \to \tau Y$ とると,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads] & & \tau Y \\ & \mathrm{Im}f \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd} \quad \mathrm{Im}f \in \mathrm{Fac}X$$

$\mathrm{Ext}^1(Y, \mathrm{Im}f) = 0 \Rightarrow \overline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Im}f, \tau Y) = 0$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \mathrm{Im} f \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d] & I \arrow[dl, dashed, "\exists"] \\ \tau Y & \end{tikzcd} \qquad I : \text{inj hull}$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \mathrm{Im} f \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook, "\exists"] \arrow[ddr, hook, bend right, "\exists"] & I \arrow[d, dashed] \\ & \tau Y \arrow[d, dashed, "\exists"] \\ & I \end{tikzcd} \qquad \iota : \text{left min'l}$$

$$\tau Y \twoheadrightarrow I : \text{retr}$$

しかし τY: inj summand なし

$\therefore \quad I = 0 \quad \therefore \quad \mathrm{Im} f = 0$

<u>Def</u> M : τ-rigid

$:\Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, \tau M) = 0$

$(\Longleftrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M, \mathrm{Fac} M) = 0)$

"<u>Def</u>" $M \in \mathrm{mod} A$: 台τ傾加群

(support τ-tilting, sτ-tilt)

$:\Longleftrightarrow$ (1) M : τ-rigid

(2) $M \in \mathrm{mod}\, A/\mathrm{ann} M$ として tilting.

$$s\tau\text{-tilt} A := \{\text{supp } \tau\text{-tilt}\} / \begin{array}{l} M \sim N \\ \Leftrightarrow \mathrm{add} M = \mathrm{add} N \end{array}$$

<u>Prop</u> (r:W)

M : τ-rigid ⇝ Fac M : tors

(ext-closed をチェック) ┘

Thm 12 次の bij がある：

$$\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,A \rightleftarrows \text{f-tors}\,A \subset \mathrm{tors}\,A$$

$$\text{f-tors}\,A = \{\text{fun. fin. tors}\}$$

$$M \longmapsto \mathrm{Fac}\,M$$

$$\mathcal{T}\text{ の progen.} \longleftarrow\!\shortmid\ \mathcal{T}$$

┘

(!) <u>Well-defined?</u>

- M : τ-rigid ⇝ Fac M : tors で cover をつかう fun. fin.
- $\mathcal{T} \in$ f-tors A ⇝ $\mathcal{T}$ は progen M をもつ (Thm 8)

⇝ $\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\,M$ で、 $^1(M, \mathrm{Fac}\,M) = 0$ より M : τ-rigid.

- $\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\,M \subseteq \mathrm{mod}\,A/\mathrm{ann}\,M$ とみれる.

(なぜ ann M = ann $\mathcal{T}$!

$\therefore$ $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{mod}\, A/\mathrm{ann}\, M$: faithful tors

$\therefore$ その progen M は、Thm 10 より tilting」

互いに逆 は OK $\square$ 」

II.3 Counting argument

Fact $T \in \mathrm{mod}\, A$: partial tilting とする

$\rightsquigarrow$ T : tilting $\Leftrightarrow$ $|T| = |A|$

(証) ($\Rightarrow$) $D^b(A) \simeq D^b(\mathrm{End}\, T_A)$ $\}K_0$

$\mathbb{Z}^{|A|} \cong \mathbb{Z}^{|T|}$

($\Leftarrow$) Bongartz compl.)

Def $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\, A$

$\mathrm{supp}\, \mathcal{C} := \{ S : \text{simple } A\text{-mod} \mid \exists C \in \mathcal{C}.\ S \text{ は } C \text{ の組成因子} \} / \cong$

(supp M も同じく)

Prop 13 HW $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\, A$ について.

$$|A/\mathrm{ann}\, \mathcal{C}| = |\mathrm{supp}\, \mathcal{C}|$$

本当に $\exists$ $A \xrightarrow[f]{} C^A$: left approx $\Rightarrow$ $A/\mathrm{ann}\, \mathcal{C} = \mathrm{Im}\, f$

Thm 14 TFAE for $M \in \mathrm{mod}\,A$.

(1) M: sτ-tilt

(2) (i) M: τ-rigid　　|M|が意外に多い!

(ii) $|M| = |\mathrm{supp}\, M|$

(suppの数だけ smd ある!)

M: τ-rigid について

M: sτ-tilt $\Longleftrightarrow$ M: tilt $A/_{\mathrm{ann}\,M}$-mod　(*)

一方 $\mathrm{Fac}\,M \subseteq \mathrm{mod}\, A/_{\mathrm{ann}\,M}$: faithful なら

前のボードで M: partial tilt over $A/_{\mathrm{ann}\,M}$.

$\therefore$ (*) $\Longleftrightarrow$ $|M| = |A/_{\mathrm{ann}\,M}| = |\mathrm{supp}\, M|$ $\square$

II.4. Smalø's symmetry

Thm 14 (Sm ————)

$(\mathcal{T}, \mathcal{F})$: tors pair in mod A とき

$\mathcal{T}$: fun. fin $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$: fun. fin.

これを proj, inj の数え あげて 示す.

Lem $\mathcal{T} \in \operatorname{tors} A$

(1) $|I(\mathcal{T})| = |\operatorname{supp} \mathcal{T}|$

(2) $|P(\mathcal{T})| \leq |I(\mathcal{T})|$ で,

等号 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}$: fun. fin. ⌟

(証) (1) Thm 7 より

$|I(\mathcal{T})| = |t(DA)|$

($t(DA) \hookrightarrow DA$: min. right $\mathcal{T}$-approx)

$\overset{\text{Prop 13 の dual}}{\rightsquigarrow}$ $|t(DA)| = |\operatorname{supp} \mathcal{T}|$

(2) $\mathcal{T} \subseteq \operatorname{mod} A/\operatorname{ann} \mathcal{T}$: faithful tors で,

$\therefore \underset{\uparrow \text{ part. tilt}}{|P(\mathcal{T})|} \leq |A/\operatorname{ann} \mathcal{T}| = |\operatorname{supp} \mathcal{T}|$

等号 $\Leftrightarrow$ $\underset{M:=}{\bigoplus_i} P(\mathcal{T})$: ST-tilt

$\underset{(*)}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{T}$: fun. fin.

($\Leftarrow$) OK

($\Rightarrow$) $\mathcal{T} = \operatorname{Fac} M$ を示したい。 $X \in \mathcal{T}$ とする

$X \in \mathcal{T} \subseteq \mathrm{mod}\, A/\mathrm{ann}\,\mathcal{T}$

$\quad\quad \cup\!\!\mid$

$\quad\quad \mathrm{Fac}\, M = (M^{\perp_1})$ in $\mathrm{mod}\, A/\mathrm{ann}\,\mathcal{T}$

M: tilt in $A/\mathrm{ann}\,\mathcal{T}$

より $\quad X \in \mathrm{Fac}\, M \quad \square$

<u>Lem (HW)</u> $\quad (\mathcal{T}, \mathcal{F})$: tors. pair

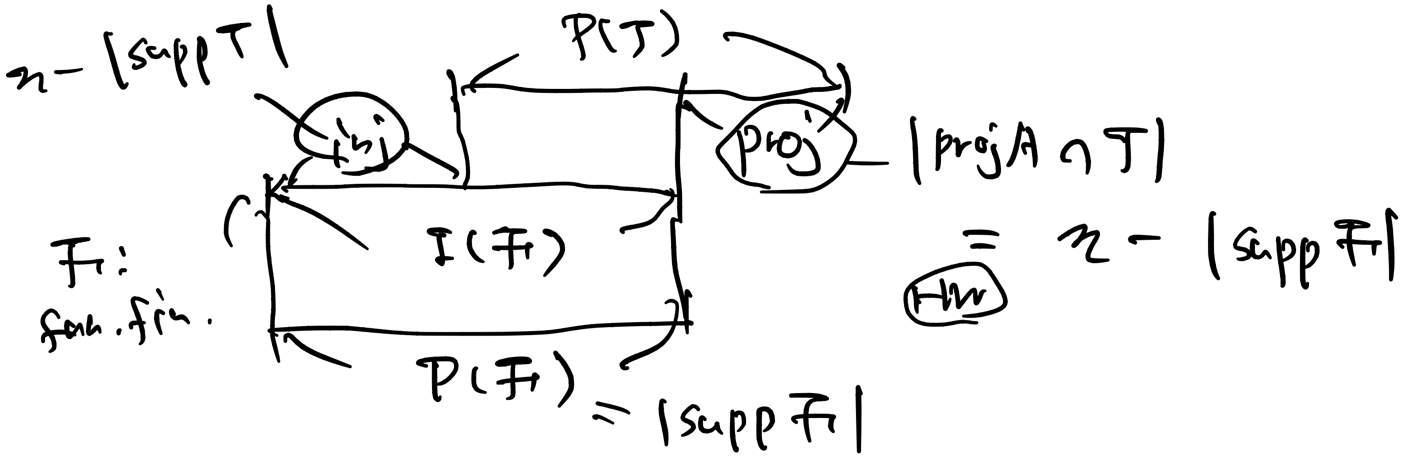
$\exists$ bij

$$\mathrm{ind}\, P(\mathcal{T}) \setminus \mathrm{proj}\, A \underset{\tau^-}{\overset{\tau}{\rightleftarrows}} \mathrm{ind}\, I(\mathcal{F}) \setminus \mathrm{inj}\, A \;\lrcorner$$

$$\because \left(\begin{array}{l} M \in P(\mathcal{T}) \Longleftrightarrow {}^1(M, \mathcal{T}) = 0 \\ \quad\quad \Longleftrightarrow (\mathcal{T}, \tau M) = 0 \Longleftrightarrow \tau M \in \mathcal{F} \\ N \in I(\mathcal{F}) \underset{\text{dual}}{\Longleftrightarrow} \tau^- N \in \mathcal{T}. \end{array} \right)$$

<u>Proof of Smalø's sym.</u> $\quad |A| = n$

$\mathcal{F}$: fun. fin とする. $\quad |P(\mathcal{T})| = |I(\mathcal{T})|$?



$$|P(\mathcal{T})| = |\operatorname{supp} F_{\mathcal{T}}| - (n - |\operatorname{supp} \mathcal{T}|) + (n - |\operatorname{supp} F_{\mathcal{T}}|)$$

$$= |\operatorname{supp} \mathcal{T}| = |I(\mathcal{T})| \quad \square$$

<u>まとめ</u> $\mathcal{T} \in \operatorname{tors} A$ について TFAE

(1) $\mathcal{T}$: fun. fin

(2) $\exists M \quad \mathcal{T} = \operatorname{Fac} M$

(3) $\mathcal{T}$: progen $\exists$)

(4) $\mathcal{T}$: enough proj

(5) $|P(\mathcal{T})| = |I(\mathcal{T})|$.

(6) $\mathcal{T}^{\perp}$: fun. fin.

Syu 17

<u>Rem</u> ネーター環だとだめ

($\operatorname{fl} R$, $\operatorname{proj} R$)

not cov. fin. DVR fun. fin

<u>Open</u> $\mathcal{E} \subseteq \operatorname{mod} A$: ext-closed, fun. fin.

$\Rightarrow |P(\mathcal{E})| = |I(\mathcal{E})|$?

($\rightsquigarrow$ Auslander-Reiten conj, ... etc)