Part II Wide interval

II.1. Heart

Def $\vec{H}(\mathrm{tors}A)$: quiver

点 : $\mathcal{T} \in \mathrm{tors}A$

矢 : $\mathcal{T} \to \mathcal{U}$:$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \circ\ \mathcal{T} \supsetneq \mathcal{U}, \\ \circ\ \nexists\, \mathcal{C} \in \mathrm{tors}A,\ \mathcal{T} \supsetneq \mathcal{C} \supsetneq \mathcal{U}. \end{cases}$$

Ex

Aim

$\vec{H}(\mathrm{tors}A)$ の矢を brick,

sp-split を使ってぬく!

Tool. Heart of interval

Def $\mathcal{U}, \mathcal{T} \in \mathrm{tors}A$, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ とする.

(1) $[\mathcal{U}, \mathcal{T}] := \{\mathcal{C} \in \mathrm{tors}A \mid \mathcal{U} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}\}$

(2) $\mathcal{H}[\mathcal{U},\mathcal{T}] \subseteq \mathrm{mod}\, A$

$$= \mathcal{T} \cap \underbrace{\mathcal{U}^{\perp}}_{\text{torf}} \quad (= \text{“}\mathcal{T} - \mathcal{U}\text{”})$$

Ex

$$\begin{cases} \mathcal{H}[0,\mathcal{T}] = \mathcal{T} \\ \mathcal{H}[\mathcal{T}, \mathrm{mod}\, A] = \mathcal{T}^{\perp} \end{cases}$$

$\mathrm{mod}\, A$

$] \ \mathcal{T}^{\perp}$

$\mathcal{T}$

$] \ \mathcal{T}$

0

Def $[\mathcal{U},\mathcal{T}]$: $\underset{\text{interval}}{\text{itv}}$ in $\mathrm{tors}\, A$

これが wide itv

:$\iff$ heart $\mathcal{T}\cap\mathcal{U}^{\perp}$ が wide subcat.

($\Longleftarrow$ CKE-closed)

$\rightsquigarrow$ abelian.

Rem

$\forall\, \mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\, A$: wide (ICE, IKE-closed)

$\rightsquigarrow \exists\, [\mathcal{U},\mathcal{T}] \quad \mathcal{C} = \mathcal{H}[\mathcal{U},\mathcal{T}]$

Prop (HW)

$[\mathcal{U},\mathcal{T}]$: itv with heart $\mathcal{H}$

(1) $\mathcal{T} = \mathcal{U} * \mathcal{H} \quad (= \text{“}\mathcal{U}+\mathcal{H}\text{”})$

(2) $\mathcal{U} = \mathcal{T} \cap {}^{\perp}\mathcal{H}$ $= (\mathcal{U} = \mathcal{T} \wedge \mathcal{H})$

((3) $\mathcal{H} = \mathcal{T} \cap \mathcal{U}^{\perp}$)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T} \arrow[d, dash, "\mathcal{H}"] \\ \mathcal{U} \end{tikzcd}$$

<u>Prop 15</u> 上の状況で、

$\mathcal{U}, \mathcal{T}, \mathcal{H}$ のうち 2つが fun.fin

⇒ 残りもそう 」

(2-out-of-3)

① ($\mathcal{U}, \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{T}$)

$\mathcal{T} = \mathcal{U} * \mathcal{H}$

Fact より OK.

<u>Fact</u> $\mathcal{C}, \mathcal{D}$: fun.fin

⇒ $\mathcal{C} * \mathcal{D}$ も ― 」

($\mathcal{T}, \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{U}$)

Smalø's symmetry 使って

上の場合から従う

$\underbrace{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}}_{\mathcal{H}}$ $\overset{(-)^{\perp}}{\rightsquigarrow}$ $\underbrace{\mathcal{U}^{\perp} \supseteq \mathcal{T}^{\perp}}_{\mathcal{H}}$ in torf

$\mathcal{U}^{\perp} = \mathcal{H} * \mathcal{T}^{\perp}$: fun.fin.

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{U}$ も.

$(\mathcal{T}, \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{H})$

$$\mathcal{H} = \mathcal{T} \cap \underbrace{\mathcal{U}^{\perp}}_{= \mathcal{G}}$$

$\mathcal{G}$: fun. fin.
(Small ∅)

$\forall X \in \mathrm{mod}A$

$$\begin{tikzcd} & G_X \arrow[r, "\mathcal{G}\text{-approx}"] & X \\ \mathcal{H} \ni t(G_X) \arrow[ur, hook] \arrow[urr, bend right, "\mathcal{T}\text{-approx}"'] & & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{H}$-approx.

□

<u>Lem</u> 上の条件で、

$\mathcal{T}$ が progen M を持つとすると、

$\mathcal{H}$ も progen. gM もつ

$$(0 \to uM \to M \to gM \to 0)$$

$uM \in \mathcal{U}$, $gM \in \mathcal{G} := \mathcal{U}^{\perp}$

$\begin{cases} (\mathcal{T}, \mathcal{F}) \\ (\mathcal{U}, \mathcal{G}) \end{cases}$

がんばる!

<u>Cor</u> $[\mathcal{U}, \mathcal{T}]$: wide itv のとき

$\mathcal{T}$: fun. fin $\Leftrightarrow$ $\mathcal{U}$: fun. fin. で、

このとき $\mathcal{H}$ も fun. fin. ⌟

(∵) (⇐) $\mathcal{T}$: fun fin

$\Rightarrow$ $\mathcal{T}$ は proper だ

$\underset{\text{Lem.}}{\Rightarrow}$ $\mathcal{H}$ も proper だ

$\underset{\text{Cor 6.}}{\Rightarrow}$ $\mathcal{H}$ は fun. fin.

$\underset{2-3}{\Rightarrow}$ $\mathcal{U}$ も fun. fin. $\square$

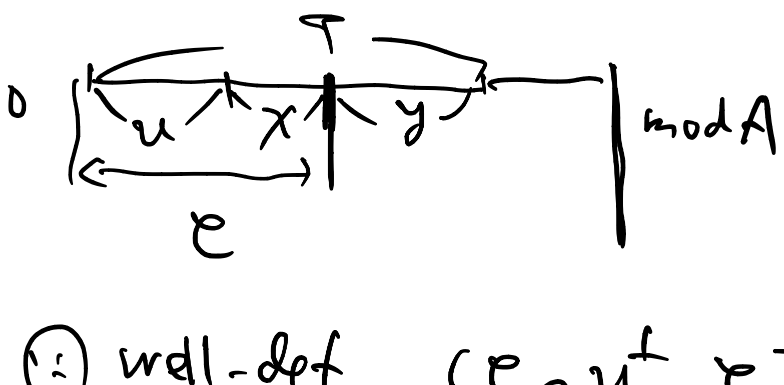
<u>Thm</u> [Asai-Pfeifer, Jasso]

$[\mathcal{U},\mathcal{T}]$: wide itv heart $\mathcal{W}$ とする

$$[\mathcal{U},\mathcal{T}] \xleftrightarrow{1:1} \text{tors}\,\mathcal{W}$$

$$\mathcal{C} \longmapsto \mathcal{C} \cap \mathcal{U}^{\perp}$$

$$\mathcal{U} * \mathcal{X} \longleftarrow\!\shortmid\ \mathcal{X}$$



(∵) <u>well-def</u>. $(\mathcal{C}\cap\mathcal{U}^{\perp}, \mathcal{C}^{\perp}\cap\mathcal{T})$: tors pair in $\mathcal{W}$!

- $(\mathcal{U} * \mathcal{X}, \mathcal{Y} * \mathcal{T}^{\perp})$: tors pair in mod A.

互いに逆: ハーラムーン

<u>Rem</u> 上は $\forall$ exact cat で, 成立
(ET)

(wide itv はダメ) [足立-榎-塚本]

II.2. Brick label

<u>Def</u> $B \in \operatorname{mod} A$: brick
$:\Longleftrightarrow$ $\operatorname{End}_A(B)$: division ring
($\forall$ non-zero が isom)

<u>Def</u> $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{mod} A$

- $\operatorname{Filt} \mathcal{C} := \bigcup_{n \geq 0} \overbrace{\mathcal{C} * \cdots * \mathcal{C}}^{n}$,

- $\operatorname{brick} \mathcal{C} := \{ B \in \mathcal{C} \mid B : \text{brick} \} / \cong$

<u>Lem</u> $\forall\, 0 \neq X \in \operatorname{mod} A$ $\exists\, f : X \to X$ s.t.
$\operatorname{Im} f$: brick.

(:) $l(X)$ について induction.

$l(X)=1 \Rightarrow X$: simple (brick)

$\Rightarrow$ id_X でOK

$l(X)>1$ とき

- X : brick : id_X
- X : not brick とき $\exists\, 0 \neq f : X \to X$: not isom

$$\rightsquigarrow \begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & X \\ & \mathrm{Inf} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

ここに induction

$\exists\ \mathrm{Inf} \twoheadrightarrow B \hookrightarrow \mathrm{Inf}$
B : brick

$\rightsquigarrow X \twoheadrightarrow \mathrm{Inf} \twoheadrightarrow B \hookrightarrow \mathrm{Inf} \hookrightarrow X$
が求めるもの。 □

<u>Prop</u> $[U, T]$: itv, heart $\mathcal{H}$

$\rightsquigarrow \mathcal{H} = \mathrm{Filt}(\mathrm{brick}\ \mathcal{H})$ 」

(:) $\forall X \in \mathcal{H}$, $l(X)$ の induction で

$X \in \mathrm{Filt}(\mathrm{brick}\ \mathcal{H})$ みる

$l(X) = 0 \Rightarrow$ OK

$\ell(X) > 0$ のとき、さっきより

$\exists\ X \twoheadrightarrow B \hookrightarrow X$, この $B \in \mathcal{H}$ がすぐ。

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
T \supseteq & tK \arrow[r, equal] \arrow[d] & tK \in \mathcal{H} \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r, "\in \mathcal{H}"] \arrow[d, equal] & 0 \\
\mathcal{F} = T^{\perp} \arrow[r, Rightarrow] & fK \arrow[r] \arrow[d] & \square \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & \cap\ \mathcal{H} &
\end{tikzcd}
$$

$\rightsquigarrow$

$\mathcal{H}$ がある。

ここは $\mathcal{H}$ の s.e.s.

・$tK \neq 0$ のとき

$\square \neq 0$ なら induction おわる

$\square = 0 \Rightarrow K \in T \rightsquigarrow K \in \mathcal{H}$

$\rightsquigarrow 0 \to K \to X \to B \to 0$ で

K に induction で OK

・$tK = 0$ のとき　$K \in \mathcal{F}$

$$0 \to K \to X \to B \to 0$$

に $(B, -)$ して、

$$0 = (B,K) \to (B,X) \to (B,B) \to {}^{1}(B,K)$$

$\exists\ B \hookrightarrow X \ \text{—}\ (B,X) \neq 0$

$\uparrow$ 1-dim as End B-mod

$\therefore$ $(B,X) \cong (B,B)$ より

$\Downarrow$

1_B

$X \longrightarrow B$: retraction

$\rightsquigarrow$ $K \oplus X$ より $K=0$ のはず
$\;\;\;\; \cap \;\;\;\;\;\; \cap$
$\;\;\;\; \mathcal{T} \;\;\;\;\;\; \mathcal{T}$ $\rightsquigarrow X=B$ □

<u>Lem</u> B: brick

$\Rightarrow$ Filt B : wide subcat with unique simple obj B ┘

(証) ker-closed の特徴付け

$\{X \mid \forall X \xrightarrow{f} B : 0$ or surj かつ $\mathrm{Ker} f \in \mathrm{Filt}\, B\}$

は ext-closed だから, B 入る

$\rightsquigarrow$ Filt B $\subseteq \{ \text{---} \}$.

・ $\forall X \xrightarrow{f} Y$, $X, Y \in$ Filt B, Ker f ∈ Filt B を, Y の Filt B-length で induction.

0, 1 $\rightsquigarrow$ 上.

X
$\downarrow f$ ⊗, 0 or not

$0 \longrightarrow \square \longrightarrow Y \longrightarrow B \longrightarrow 0$

smaller

□ 存る.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d] \arrow[dl, "\tilde{f}"'] \\ \square \arrow[r, hook] & Y \end{tikzcd}$$

で. $\mathrm{Ker}\, f \cong \mathrm{Ker}\, \tilde{f}$

で induction

$\rightsquigarrow$ □ = 0 なら surj その Ker $\in \mathrm{Filt}\, \mathcal{B}$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Delta \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\text{pb}"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \square \arrow[r] & Y \arrow[r] & B & \end{tikzcd}$$

で. $\mathrm{Ker}\, f \cong \underline{\mathrm{Ker}\, \varphi}$: induction $\blacksquare$

<u>Thm</u> $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ in $\mathrm{tors}\, A$ TFAE

(1) $\exists\, \mathcal{T} \to \mathcal{U}$ in $\vec{\mathcal{H}}(\mathrm{tors}\, A)$

(2) $|\,\mathrm{brick}\, \mathcal{H}[\mathcal{U}, \mathcal{T}]\,| = 1$

(3) $\mathcal{H}[\mathcal{U}, \mathcal{T}]$: wide with one simple. ⌟

∵ <u>(1) ⇒ (2)</u>

$B_1, B_2 \in \mathcal{H} := \mathcal{H}[\mathcal{U}, \mathcal{T}]$ とする.

$\rightsquigarrow$ $B_i \notin \mathcal{U}$, $B_i \in \mathcal{T}$

$\therefore\ \mathcal{U} \subsetneq \underset{\mathcal{T}}{\mathsf{T}(\mathcal{U} \cup B_i)} \subseteq \mathcal{T}$ for $i = 1, 2$

$(\longrightarrow)$ を含む最小の tors

$$\therefore\ \underset{B_2\ \in}{T(\mathcal{U}\cup B_1)} = \underset{\underset{T(\mathcal{U}\cup B_2)}{\parallel}}{T}$$

一方 $\mathcal{C} := \{X \mid \forall X \to B_1$ は 0 or surj$\}$

とすると、B_1 と $\mathcal{U}$ 入る

$(B_1 \in \mathcal{U}^{\perp})$

しかも tors (HW)

$\therefore\ B_2 \in T(\mathcal{U}\cup B_1) \subseteq \mathcal{C}$

$\therefore\ (B_2, B_1) = 0$ or $\underbrace{\exists\, B_2 \twoheadrightarrow B_1}_{\text{これを示したい}}$

$(B_2, B_1) = 0$ とすると

$$B_2 \in \underbrace{{}^{\perp}B_1}_{\text{tors}} \qquad \therefore\ T(\mathcal{U}\cup B_2) \subseteq {}^{\perp}B_1$$

$$\mathcal{U} \subseteq {}^{\perp}B_1 \qquad B_1 \in T(\mathcal{U}\cup B_1) = T(\mathcal{U}\cup B_2)$$

$\therefore\ (B_1, B_1) = 0$ でおかしい

$\therefore\ \exists\, B_2 \twoheadrightarrow B_1$, 対称にして

$B_1 \twoheadrightarrow B_2$

$\therefore\ B \simeq B_2$.

また $\mathcal{H} \neq 0$ より $\operatorname{brick} \mathcal{H} \neq 0$

(そうでないと $\mathcal{T} = \mathcal{U} * \mathcal{H} = \mathcal{U}$) $\mathcal{H} = \operatorname{Filt}(\operatorname{brick} \mathcal{H})$

$\therefore \; |\operatorname{brick} \mathcal{H}| = 1$

(2) ⇒ (3) OK

(3) ⇒ (1)

$$[\mathcal{U}, \mathcal{T}] \cong \underbrace{\operatorname{tors} \mathcal{H}}_{\text{unique simple}}$$

$$\operatorname{tors} \mathcal{H} = \{0 \neq \mathcal{H}\} \quad (\text{HW})$$

$\left(\because \; 0 \neq \mathcal{X} \in \operatorname{tors} \mathcal{H} \right.$

$\rightsquigarrow \; 0 \neq {}^{\exists} x \in \mathcal{X}$

$\twoheadrightarrow$

$B : \text{simple} \in \mathcal{X}$ $\quad \left. \mathcal{X} = \mathcal{H} \right)$

Cor

(1) $\exists\, \mathcal{T} \to \mathcal{U}$ in $\vec{\mathcal{H}}(\operatorname{tors} A)$ 也

$\mathcal{T}$: fun. fin $\Longleftarrow$ $\mathcal{U}$: fun. fin

(2) $|\operatorname{tors} A| < \infty$ 也

$\forall$ tors is fun. fin $\quad \lrcorner$

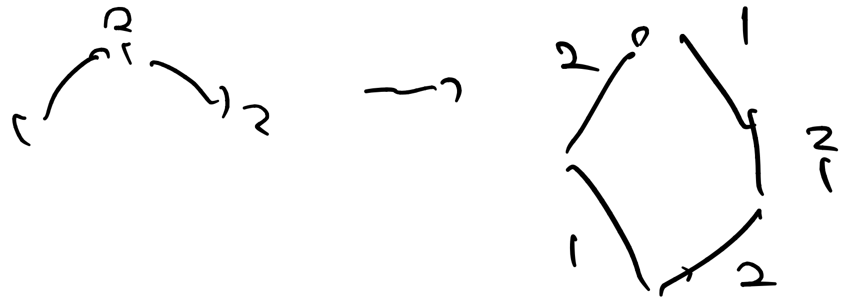
(証) (2) $\operatorname{tors} A$: finite poset

$\therefore \; \forall\, \mathcal{T} \neq 0$, $\mathcal{T} \to 0$ より

$\exists\ T \to \cdots p \to 0$: path

$\rightsquigarrow \Leftarrow \Leftarrow$ fun. fin

Ex



II.3. Hasse 系の性質. tors v.s. wide

Thm [DIJ] $T \in \operatorname{tors} A$,

$U \subsetneq T$ なる $U \in \operatorname{tors} A$ とる.

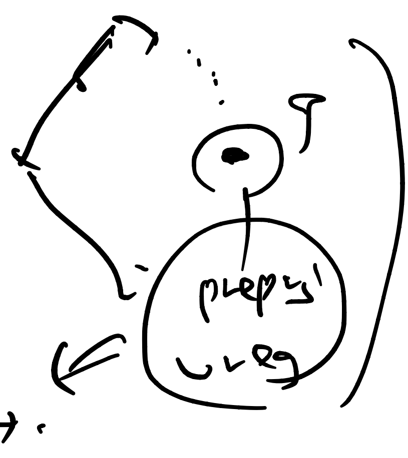
もし T : fun. fin. なら,

$\exists\ T \to T'$: in $\vec{H}(\operatorname{tors} A)$

s.t. $U \subseteq T' \leftarrow T$.

($|\operatorname{tors} A| < \infty$ ならば自明.

一般には : $1 \Leftarrow 2$)



$\nexists\ T \to$.

これは「M: f.g. mod. $H \subsetneq M$: sub

$\rightsquigarrow \exists\, H \subseteq \underbrace{M' \subsetneq M}_{\text{maximal sub}}$」

と全く同じ $\rightsquigarrow$ Zorn! 使う!

$[\mathcal{U}, \mathcal{T}) := \{ \mathcal{C} \in \mathrm{tors}A \mid \mathcal{U} \subseteq \mathcal{C} \subsetneq \mathcal{T} \}$

とすると $\mathcal{U}$ が入り not empty.

$\forall$ chain が上界もつか?

$\{\mathcal{C}_i\} \subset [\mathcal{U}, \mathcal{T})$: chain とる.

$\bigcup \mathcal{C}_i$ を考えると. これは tors が分かる

ふつうの union.

(Fac-closed は OK
ext : tot. ordered より)

$\therefore\ \mathcal{U} \subseteq \bigcup \mathcal{C}_i \boxed{\subseteq} \mathcal{T}$ は OK

$\mathcal{T} \neq \bigcup \mathcal{C}_i$ 示せば $\bigcup \mathcal{C}_i$ が上界

$\mathcal{T} = \bigcup \mathcal{C}_i$ とする.

$\mathcal{T}$: fun. fin より $\exists M$ $\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\,M$

$\rightsquigarrow$ $M \in \bigcup \mathcal{C}_i$ より

$\exists i \quad M \in \mathcal{C}_i$

$\Downarrow$

$\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\, M \subseteq \mathcal{C}_i \subsetneq \mathcal{T}$

で ムジュン」

$\therefore$ Zornより $\exists\, \mathcal{T}' \in [\mathcal{U}, \mathcal{T})$: 極大元

このとき $\mathcal{T}' \leftarrow \mathcal{T}$ はすぐ □

<u>Cor</u> $\mathcal{T}, \mathcal{U} \in$ f-tors$A$ について

$\mathcal{T} \to \mathcal{U}$ in $\vec{\mathcal{H}}(\mathrm{tors} A)$

$\Longleftrightarrow \mathcal{T} \to \mathcal{U}$ in $\vec{\mathcal{H}}(\text{f-tors} A)$」

(∵) (⇒) ok

(⇐) $\mathcal{T} \supsetneq \mathcal{U}$ より

$\exists \quad \mathcal{T} \to \mathcal{T}' \supseteq \mathcal{U}$ in $\vec{\mathcal{H}}(\mathrm{tors} A)$

しかし $\mathcal{T}$: fac. fin より $\mathcal{T}'$ もそう

$\therefore \quad \mathcal{T} \to \mathcal{T}' \supseteq \mathcal{U}$ in $\vec{\mathcal{H}}(\text{f-tors} A)$

$\therefore \quad \mathcal{T}' = \mathcal{U}$ □

IV. Hasse arrow via sp-proj (mutation)

今まで：　$T \to U$ in $\vec{\mathcal{H}}(\mathrm{tors}\,A)$ (f-)

についての基本性質みた

これから：　具体的に矢をつくるには？

矢がある "$\Longleftrightarrow$" mutation

$\rightsquigarrow$ メイン：「T の sp-proj $\longleftrightarrow$ T からの矢」

Wide itv の rank について。

Prop (rank lemma)　$\mathcal{T}$: tors with progen T.

$\cup\!\shortmid$

$(\mathcal{U}, \mathcal{F})$: tors. pair

$\rightsquigarrow$ gT : $\mathcal{H}_{[\mathcal{U},\mathcal{T}]} = \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$ の progen

について

$$|gT| = |\,\mathrm{ind}\,T \setminus \mathcal{U}\,|$$

$$\quad = \{X \in \mathrm{ind}\,T \mid X \notin \mathcal{U}\}$$

g は functor

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{mod}A & \xrightarrow{\;g\;} & \mathcal{G} \cdots \mathrm{torf} \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{H} = \mathcal{T} \cap \mathcal{G} \end{array}$$

を つくるが

に restrict する

$(\forall X \in \mathcal{T},\ 0 \to uX \to X \to gX \to 0)$

$gX \in \mathcal{T} \cap \mathcal{G}$.

Claim　これは equiv

$$\frac{\mathrm{add}\, T}{[U]} \simeq \mathrm{add}\,(gT)$$

U を通る 射

を induce する

gU = 0 より induce される.

Obj dense は OK

$$\therefore \frac{\mathrm{End}_A(T)}{[U](T,T)} \cong \mathrm{End}\,(gT) \text{ みる.}$$

• surj?

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & uT \arrow[r] \arrow[d, "i"] & T \arrow[r] \arrow[d, "\exists"] & gT \arrow[r] \arrow[d, "\forall"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & uT \arrow[r] & T \arrow[r] & gT \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$T \in P(\mathcal{T})$ より

• inj ?.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & uT \arrow[r] & T \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, dashed, bend right] & gT \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & uT \arrow[r] & T \arrow[r] & gT \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$\square$

$$\therefore\ |gT| = |\mathrm{add}\, gT| = \left| \frac{\mathrm{add}\, T}{[U]} \right| \overset{HW}{=} |\mathrm{ind}\, T \setminus U|$$

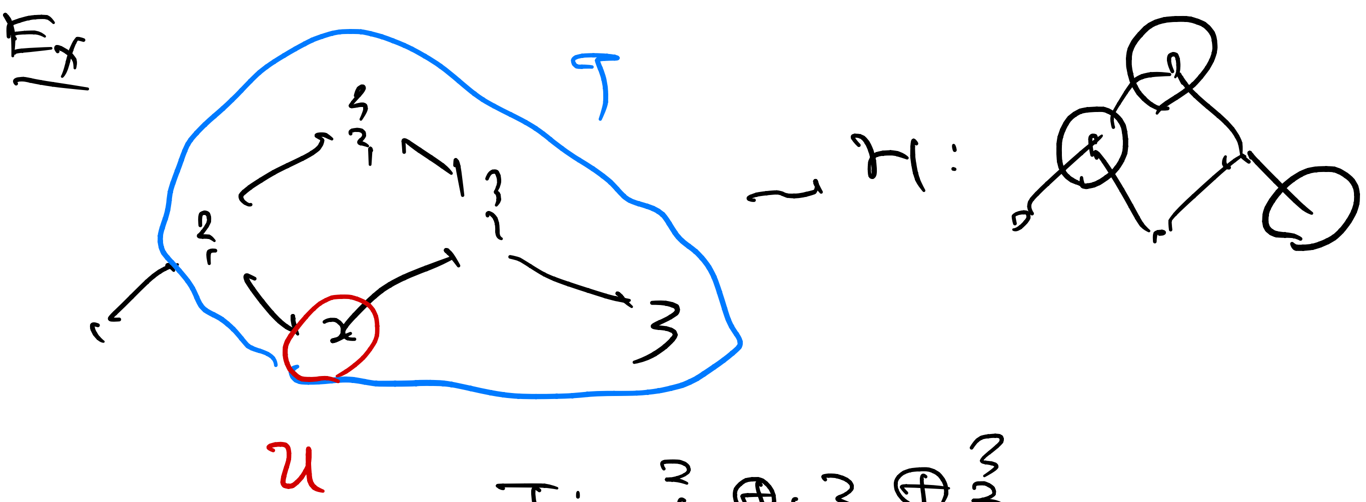
(一般に $U \subseteq T$ より

$$\mathrm{ind}\, \frac{T}{[U]} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathrm{ind}\, T \setminus U$$

well-known.)

これを ind T に restrict したもの

Ex



$T: \ {}^{2}_{1} \oplus \underbrace{2}_{U} \oplus {}^{3}_{\substack{2\\1}}$

$\rightsquigarrow$ Hのproj : 2つ.

Key Prop $\mathcal{T} \in$ f-tors$A$ T: $\mathcal{T}$ の progen

T: basic, $T = X \oplus U$ で

$X \in \mathcal{P}_0(\mathcal{T})$ とする (i.e. X: sp-proj)

⇝ [Fac U, $\mathcal{T}$] は wide itv で、

その heart は rank $|X|$ (の f.d. alg の module cat と equiv.)

スローガン

「tors の sp-proj をおとすと、

おとした rank の wide 区間ができる」

(∵) $\mathcal{H} := \mathcal{T} \cap \text{Fac}\, U^{\perp} = \mathcal{T} \cap U^{\perp}$ とする

∘ $\mathcal{H}$: wide

・$\mathcal{H}$: IE-closed はすぐ分かる

RTS $\forall\, 0 \to L \to M \to N \to 0$: ex,

(i) $L, M \in \mathcal{H} \Rightarrow N \in \mathcal{H}$

(ii) $M, N \in \mathcal{H} \Rightarrow L \in \mathcal{H}$ 」

(i) $M \in T$ より $N \in T$.

$N \in U^\perp$?

$$(U,M) \to (U,N) \to {}^1(U,L)$$

$M \in U^\perp \Rightarrow (U,M) = 0$

$0 = {}^1(U,L) \Leftarrow L \in T,\ U \in P(T)$

(ii) $M \in U^\perp$ より $L \in U^\perp$.

$L \in T$ など?

<u>Claim</u> $\exists\ 0 \to N' \to X_0 \to N \to 0$, $N' \in T$, $X_0 \in \mathrm{add}\,X$

(∵ T は $U \oplus X$ が progen.

∴ $\exists$

$$0 \to N'' \to U^{\oplus} \oplus X^{\oplus} \to N \to 0, \quad N'' \in T$$

$U^{\oplus} \xrightarrow{f} N$

しかし、$(U,N)=0$ より $f \mapsto 0$

∴ これは $U^{\oplus} = U^{\oplus}$ ⊕ $0 \to N' \to X^{\oplus} \to N \to 0$

と isom.)

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
T \ni & & N' \arrow[r, equal] \arrow[d] & N' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & \square \arrow[r] \arrow[d] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\mathrm{pb}"] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

g

$\square \in \mathcal{T}$ より $\square \twoheadrightarrow X_0$: split

($\because$ $X \in \mathcal{P}_0(\mathcal{T})$)

$\therefore$ $L \,|_{\oplus}\, \square$ より $L \in \mathcal{T}$.

<u>rank</u>

H の rank $= |H$ の progen$|$

$= |\,\mathrm{ind}\,(U \oplus X) \setminus \mathrm{Fac}\,U|$

rank-gen

$= |X|$

($\because$ もちろん ind U の元は Fac U に入る.
もし $X' \in \mathrm{ind}\,X$ が Fac U に入れば
$U^{\oplus} \twoheadrightarrow X'$ より X' : <u>sp-proj</u> なので
$X' \,|_{\oplus}\, U$ となり おかしい)

Cor　$\mathcal{T} \in \text{f-tors}\,A$, T : $\mathcal{T}$ の basic progen.

(1)　$X \in \mathrm{ind}\,P_0(T)$: indec sp-proj とると
$(X \overset{\oplus}{<} T)$

$$\mathcal{T} \to \mathrm{Fac}\, T/X \quad \text{in } \vec{H}(\mathrm{tors}\,A)$$

(2) 逆に、$\mathcal{T} \to \mathcal{U}$ を任意にとると

$\exists!\ X \in \mathrm{ind}\,P_0(T)$　s.t.

$$\mathcal{U} = \mathrm{Fac}(T/X)$$

┘

(∵) (1)　$T = X \oplus U$ とかけば

さっき示より　$[\mathrm{Fac}\,U, \mathcal{T}]$: wide で、

rank は 1

∴ heart は simple が1つの P-mod(局)

∴ $\mathcal{T} \to \mathrm{Fac}\,U$.

(2)　$\mathcal{T} \to \mathcal{U}$ とする。$\mathcal{T}$: fun. fin より $\mathcal{U}$ もそう

一方　$[\mathcal{U}, \mathcal{T}]$: wide itv で

heart の rank は 1

∴ $|\mathrm{ind}\,\mathcal{T} \setminus \mathcal{U}| = 1$.

これを X とする. $T = X \oplus U$ とおく. ↳ $U \in \mathcal{U}$

<u>Claim</u> X : sp-proj in $\mathcal{T}$.

(☹ ちがうなら, T の cover T から X とれる

$\therefore$ $X \in \mathrm{Fac}\, U \subseteq \mathcal{U}$

$\therefore$ $\mathrm{Fac}\, T = \mathrm{Fac}(X \oplus U) \subseteq \mathcal{U}$ でおかしい)

$\rightsquigarrow$ (1) から $\mathcal{T} \xrightarrow{\exists} \mathrm{Fac}\, U$

$\mathcal{T} \supsetneq \mathcal{U} \supseteq \mathrm{Fac}\, U$

$\therefore$ $\mathcal{U} = \mathrm{Fac}\, U$.

<u>Cor</u> $\mathcal{T} \in$ f-tors A とき

$\{\mathcal{T} \to\ \} \xleftrightarrow{1-1}$ ind $\mathcal{P}_0(\mathcal{T})$ ⌟

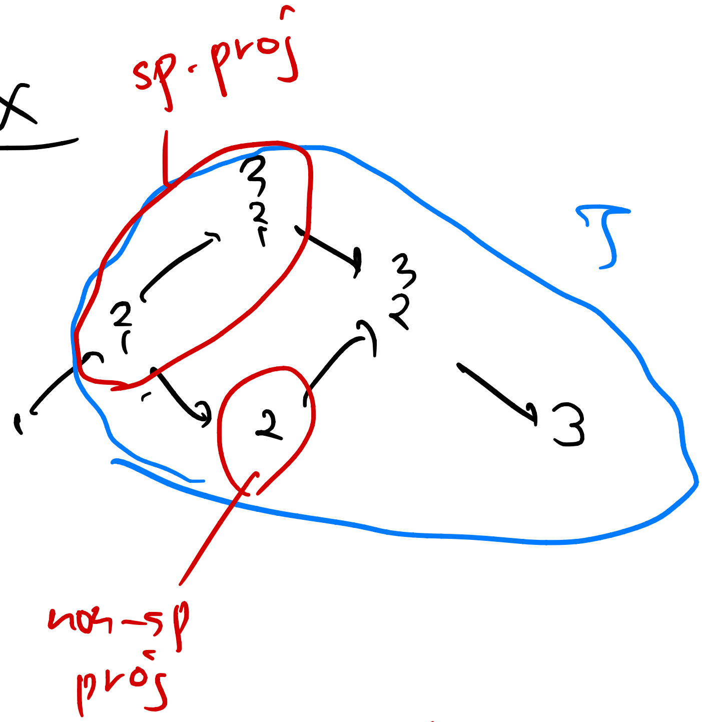
<u>まとめ</u> $\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\, T$ から 1つ下へ行くには

T のうち indec sp-proj

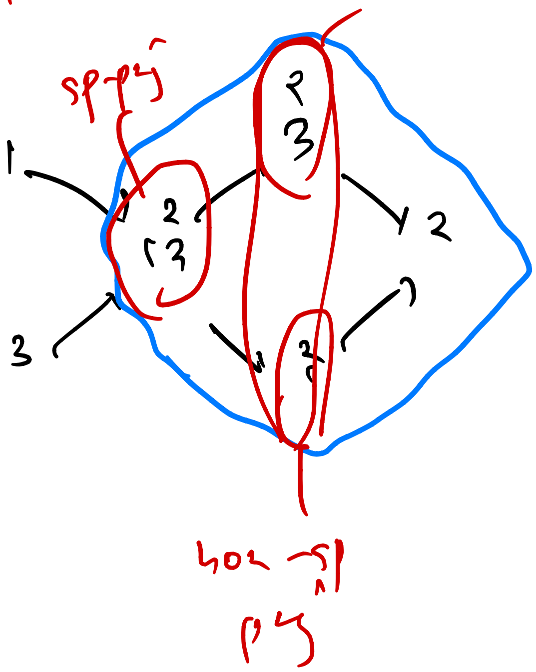
(= 他の Fac でかけない indec)

をはずして Fac とればいい!

Ex



$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{Fac}\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus 2\right) & & \mathrm{Fac}\left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus 2\right) \end{tikzcd}$$



$$\begin{tikzcd} T \arrow[d] \\ \mathrm{Fac}\left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right) \end{tikzcd}$$

「全ての sp-proj を足す」

tors vs wide

$T \in$ f-tors A $\quad T$: T a basic progen

$\rightsquigarrow \quad T = \underbrace{T_{sp}}_{\text{sp-proj}} \oplus \underbrace{T_{nsp}}_{\text{それ以外}}$ とする。

Thm [Marks - Stovicek]

(1) $[\operatorname{Fac} T_{nsp}, \operatorname{Fac} T]$: wide itv で、

$\alpha T :=$ その heart とする

(2)
$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, "B_1"'] \arrow[dr, "B_r"] & \\
T_1 & \cdots & T_r
\end{tikzcd}$$
: T からの全ての矢

⇝ $r = |T_{sp}|$ で、

$\alpha T = \operatorname{Filt}(B_1, \cdots, B_r)$,

∴ $B_1 \sim B_r$ を simple にもつ

(3) $T = T(\alpha T)$　　$T(\bigcirc)$

$= T(B_1, \cdots, B_r)$　smallest wide

(∵) (1) や、た

(2) $[\operatorname{Fac} T_{sp}, \operatorname{Fac} T] \simeq \operatorname{tors} \alpha T$.

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Fac} T \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
T_1 & \cdots & T_r
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \alpha T \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
0 & \cdots &
\end{tikzcd}$$
← 全体

($T_{sp} \in T_i$ より)　　0

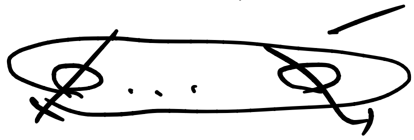
?

$$\mathcal{T}_i = \mathrm{Fac}(\underbrace{\mathcal{T}\text{ の } s_i \text{ の sp-proj おとす}}_{\oplus\ \mathcal{T}_{nsp}.})$$

しかも

$\alpha\mathcal{T} \simeq \mathrm{mod}\,B$ (B : rank r f.d. alg) で.

一般に $\mathrm{tors}\,B$: mod B



ここに simple全て並ぶ

HW

(dual 考え $\mathrm{Fac}\,S_1 \to 0 \leftarrow \mathrm{Fac}\,S_2$ をみると良い)

$\therefore$ $B_1, \cdots, B_r$: $\alpha\mathcal{T}$ の simple 全て

(3) $B_1, \cdots, B_r \in \mathcal{T}$ は OK

$\mathcal{T}'$: tors が B_i 全て含むとする.

$\mathcal{T} \cap \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. 等しくないと仮定

→ mutation property より

$$\exists\ \mathcal{T} \cap \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}_i \leftarrow \mathcal{T}$$

$B_i \in \mathcal{T}\cap\mathcal{T}'$, $\mathcal{T}_i = \mathcal{T} \cap {}^{\perp}B_i$

$\therefore\ B_1' \in {}^{\perp}B_1$ で矛盾.

$\therefore\ \mathcal{T} \cap \mathcal{T}' = \mathcal{T}$

$\therefore\ \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$

$\therefore\ \mathcal{T} = \mathsf{T}(B_1, \cdots, B_r)$ $\square$

$\left(= \mathsf{T}(\alpha\mathcal{T})\right)$

<u>Cor</u>

$$\text{f-tors}A \underset{\mathsf{T}(-)}{\overset{\alpha(-)}{\rightleftarrows}} \text{wide}A$$ に入る

$\circlearrowleft$: id.

<u>Fact</u>

$$\text{tors}A \underset{\mathsf{T}(-)}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \text{wide}A$$

で, $\circlearrowright$: id.

$\left(\therefore\ \text{tors}A = \text{f-tors}A \text{ なら} \right.$

$\left. \text{tors}A \xleftarrow[\text{bij}]{} \text{wide}A \right)$

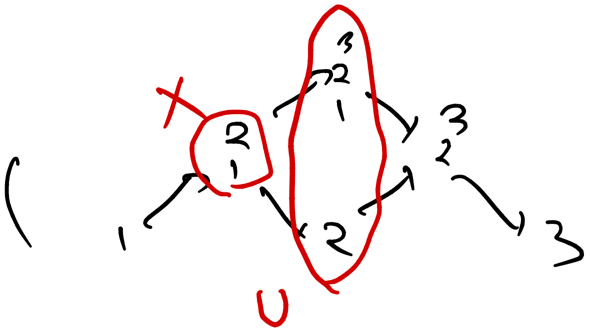
IV. Mutation Sequence

$$T = X \oplus U$$

$\uparrow$ index sp.py

$$\rightsquigarrow \quad \mathrm{Fac}\,T \longrightarrow \mathrm{Fac}\,U$$

しかし $\mathcal{P}(\mathrm{Fac}\,U)$ は U 以外に増える!



$$\rightsquigarrow \mathcal{P}(\mathrm{Fac}\,U) = \overbrace{\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus 2}^{U} \oplus \overbrace{\boxed{\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}}}^{???}$$

X と U のみから残りを計算したい!

||

mutation.

Prop (Important Seq)

$\mathcal{T} \supseteq \mathcal{U}$: f-tors

progen T, U とする.

$$T \xrightarrow{f} U_0^T \to U_1^T \to 0 \quad \text{s.t.}$$

f: leftmin $\mathcal{U}$-approx であると.

次が成立

(1) $U_0^T, U_1^T \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$

(2) $\operatorname{ind} U_0^T \cap \operatorname{ind} U_1^T = \phi$

(3) $\underset{\substack{\| \\ \operatorname{add} U}}{\mathcal{P}(\mathcal{U})} = \operatorname{add}(U_0^T \oplus U_1^T)$ ⌟

(証) $T = A$, $U = T$ の関係
すでにやった!
全く同じ証明で行く.!

Claim "U_0^T : sp-proj of $\mathcal{U}$ in $\mathcal{T}$", i.e.,

$$\forall\ 0 \to L \to M \to U_0^T \to 0$$
$$L \in \mathcal{T},\ M \in \mathcal{U} \Rightarrow \text{split}$$

$$\left(\begin{tikzcd}
 & & & T \arrow[dll, "f"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "\exists"'] & \\
 & U_0^T \arrow[r] & M & U_0^T & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r, "\text{retr}"] & U_0^T \arrow[r] & 0 \\
 & \mathcal{P} \ni T & \mathcal{U} \ni & &
\end{tikzcd}\right)$$

(1) よって $U_0^T \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$

$0 \to \operatorname{Im} f \to U_0^T \to U_1^T \to 0$

に $(-,\mathcal{U})$ して、$^1(U_1^T,\mathcal{U})=0$

もOK

(2) もし $\exists\, U' \in \operatorname{ind} U_0^T \twoheadrightarrow \operatorname{ind} U_1^T$ なら

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{U} \ni & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Im} f \arrow[r] \arrow[d, equal] & \triangle \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b}"] & \square \in \mathcal{U} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Im} f \arrow[r] & U_0^T \arrow[r] \arrow[d] & U_1^T \arrow[r] \arrow[d, "\text{proj}"] & 0 \\
 & & U' \arrow[d] & U' \arrow[l] \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

ここみて、claimより

$U_0^T \twoheadrightarrow U_1^T \twoheadrightarrow U'$ が retr

$\rightsquigarrow$ しかし $U_0^T \to U_1^T$: rad で矛盾。

(3) $U_0^T \oplus U_1^T$ が $\mathcal{U}$ の progen なのが、

同じ証明 である！

$\forall M \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$.

$$\exists\ 0 \to \underset{\mathcal{T}}{\underset{\cap}{M'}} \to (U_0^T)^{\oplus} \to M \to 0$$

$$\left(\because\quad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underset{\mathcal{T}\ni}{\square} \arrow[r] \arrow[d] & \overset{\mathrm{add}\,T}{\overset{\in}{T^{\oplus}}} \arrow[r] \arrow[d, "\exists"'] & \overset{\mathcal{U}}{\overset{\in}{M}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \triangle \arrow[r] & (U_0^T)^{\oplus} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\quad T:\ \text{Ext-proj}
\right.$$

$\triangle \oplus T^{\oplus} \in \mathcal{T}$ より

$\triangle \in \mathcal{T}$)

$$\rightsquigarrow\quad
\begin{tikzcd}
& T^{\oplus} \arrow[r] \arrow[d] & (U_0^T)^{\oplus} \arrow[r] \arrow[d, "\exists"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & (U_1^T)^{\oplus} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & (U_0^T)^{\oplus} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

つなげて OK.

<u>Cor</u> T: basic st-tilt

$T = U \oplus X$ $\quad X$: indec sp-proj ($\Longleftrightarrow X \notin \mathrm{Fac}\,U$)

$\rightsquigarrow \exists\ X \xrightarrow{f} U_0^X \to U_1^X \to 0$

s.t. (1) f: left min $\underline{\underline{U}}$-approx

(2) $\mathrm{add}(U \oplus U_1^X) = \mathcal{P}(\mathrm{Fac}\,U)$ ⌟

$\mathcal{U} := \mathrm{Fac}\,U$

(∵) f を left min $\underline{\underline{\mathcal{U}}}$-approx とすると、

$$\left[\begin{matrix} X & \xrightarrow{f} & U_0^X \\ \oplus & & \oplus \\ U & = & U \end{matrix}\right] \to U_1^X \to 0 \quad : \text{left min } \mathcal{U}\text{-approx}$$

$$\begin{matrix} \| & & \| \\ T & \to & U_0^T \end{matrix}$$

∴ 主定理より $\mathcal{P}(\mathrm{Fac}\,U) = \mathrm{add}(U \oplus U_1^X)$

∴ $U_0^X \in \mathrm{add}\,U$ のみみればいい。

$\mathcal{P}(U) = \mathrm{add}(U \oplus U_0^X) \sqcup \mathrm{add}\,U_1^X$: $\underset{\text{ind が}}{\underline{\text{disjoint}}}$

主定理

一方 $|\mathcal{P}(\mathcal{U})| = |\mathrm{supp}\,\mathcal{U}|$

$= |\mathrm{supp}\,\mathrm{Fac}\,U|$

$= |\mathrm{supp}\,U|$ で、

$$|U| \leq |\underbrace{U \oplus U_0^X}_{\text{ここで}} \oplus \underbrace{U_1^X}_{}| = |\mathcal{P}(\mathcal{U})|$$

ind(?) disj

$$|\mathcal{P}(\mathcal{U})| = |\operatorname{supp} U| \leq |\operatorname{supp}(U \oplus X)| = |U \oplus X| = |U|+1$$

$\therefore \quad |\mathcal{P}(\mathcal{U})| = \underline{|U|}$ or $\underline{|U|+1}$

$\mathcal{P}(\mathcal{U}) \ni U.$

<u>$|U|$ とき</u> もう $U \in \mathcal{P}(U)$ なので

$\mathcal{P}(U) = \operatorname{add} U$

$\therefore \quad U_0^X \in \operatorname{add} U$

<u>$|U|+1$ とき</u>

つまり $|\operatorname{supp}(U \oplus X)| = |\operatorname{supp} U|$

$\therefore \quad \operatorname{supp} X \subseteq \operatorname{supp} U$

<u>Claim</u> $\underline{U_1^X \neq 0}$ 示せばよく.

$U_1^X = 0$ とする

$$0 \to K \to X \to U_0^X \to 0$$

$\leadsto (-, U)$ して.

$$(U_0^X, \mathcal{U}) \twoheadrightarrow (X, \mathcal{U}) \to (K, \mathcal{U})$$

$$\to {}^1(U_0^X, \mathcal{U}) = 0$$

$\therefore$ $(K, \mathcal{U}) = 0 \rightsquigarrow K \in {}^\perp \mathcal{U}^{\text{tors}}$

$\Rightarrow$ $(K, \operatorname{supp} \mathcal{U}) = 0$

HW

(∵) $S \in \operatorname{supp} \mathcal{U}$ $\exists M \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow$ ここで $\mathcal{U}$: $M \supseteq M_0 \supseteq M_1 \supseteq 0$, $M_0 / M_1 = S$

$S \hookrightarrow \square \in \mathcal{U}$

$\rightsquigarrow 0 \to (K, S) \to (K, \square) = 0$

しかし $K \neq 0$ なら $\exists K \twoheadrightarrow S$ simple

$S \in \operatorname{supp} K \subset \operatorname{supp} X \subset \operatorname{supp} \mathcal{U}$

でおかしい

$\therefore$ $K = 0$

[illegible]