τ傾理論と ねじれ類入門

1日目

—分裂射影対象と広大区間の立場から—

榎本 悠久 (大阪公立大)

予定(キーワード)

1日目

Part I ◦ 分裂射影対象・被覆,
関手的有限性

Part II ◦ (関手的有限)ねじれ類と
(τ)傾加群.

2日目

Part III ◦ ねじれ類の(広大)区間, brickラベル.

◦ 分裂射影対象と
Hasse矢の対応

Part IV ◦ 変異の性質

Part 0. これは何か？

- 私が3年前くらいに、ねじれ類について勉強しながら身内で発表したセミナー「τ-tilting for me」のまとめ
（名大の酒井氏・斉藤氏・東大の竹田氏に感謝）
（いくつかは［E-酒井, ICE-closed …］の共同研究にもとづく）

- 内容：ねじれ類・τ傾理論周辺の $\boxed{\text{重要な論文たちの結果}}$ を、
「自分が分かりやすいように」
解釈（なおし（多くを））別証明を与えたもの。

Tool
1. 分裂射影対象［Auslander-Smalø, 1980］
2. （広大）区間［淺井-Pfeifer, 2022］
［Demonet-伊山-Reading-Reiten-Thomas 2023］［E-酒井, 2021］

- ［足立-伊山-Reiten］, ［Jasso］
- ［Demonet-伊山-Jasso］, ［Smalø］
- ［Marks-Šťovíček］, ［淺井］, …

ねらい

1. 多くの結果が、Tool を使った分かりやすい解釈・証明があるが、
あまり知られていなさそうなので布教したい

2. 加群圏の部分圏を調べる理論の入門.

注意

(知ってる人向け)

- 「加群圏の部分圏」という立場に特化した見方・手法なので、三角圏、とくに(2-)silting の言葉は使わない.

- 多元環の表現論のキソは仮定
(AR theory、AR quiver)

(傾加群 tilting, ねじれ類 torsion class は仮定しないが、[ASS] でみたことあるとより良い)

- 時間の関係で扱わないトピック多数。
- 簡単な証明は HW として省略

コピペここまで.
以下 板書.

設定・記法

- k: field, A: f.d. k-alg.
- $\mathrm{mod}A$: f.g. 右 moduleの cat.

  $\cup$

  $\mathrm{proj}A :=$ ―― proj ――

  $\mathrm{inj}A :=$ ―― inj ――.

  $D := \mathrm{Hom}_k(-, k)$
- $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}A$ というとき

  $\mathcal{C}$: full subcat で、

  isom & summand で閉じる。 直和とる
- $M \in \mathrm{mod}A$

  $\rightsquigarrow \mathrm{add}M := \{ N \in \mathrm{mod}A \mid N \oplus M^n \}$
- $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}A$ 直和因子

  $\longrightarrow \mathrm{ind}\,\mathcal{C} := \{ X \in \mathcal{C} \mid X : \text{indecompose} \} / \cong$.
- $|\mathcal{C}| := |\mathrm{ind}\,\mathcal{C}|$ ← コスウ

  $|M| := |\mathrm{add}M|$

  $= |\{ M\text{の indec. summand} \} / \cong|$.

Part I

I.1. (前編) 射影対象

Recall $\mathrm{mod}\,A \ni P$: proj は二次と同値に一

proj obj (1) $\mathrm{Ext}^1_A(P, \mathrm{mod}\,A) = 0$.

split proj (2) $\forall M \twoheadrightarrow P$: surj が split する
(retraction)

さらに、 A_A : progen は
$(=)$

(3) $\mathrm{mod}\,A \subseteq \mathrm{Fac}\,A_A$

cover ($\mathrm{Fac}\,X := \{M \in \mathrm{mod}\,A \mid \exists X^{\oplus n} \twoheadrightarrow M\}$)

(つまり $\forall M \; \exists A^n \twoheadrightarrow M$).

minimal cover
さらに、
$P \oplus A$ について、 $\mathrm{mod}\,A \subseteq \mathrm{Fac}\,P$
$\rightsquigarrow$ $\mathrm{add}\,P = \mathrm{add}\,A$.

<u>Def</u> $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,A$. (射影対象)

(1) $P \in \mathcal{C}$: (Ext-) proj obj

$:\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ext}^1_A(P, \mathcal{C}) = 0$

(2) $P \in \mathcal{C}$: ~~split proj obj~~（分裂射影対象） sp-proj

$:\Longleftrightarrow$ $\forall\, M \twoheadrightarrow P$: surj が split.
$M \in \mathcal{C}$

(3) $P(\mathcal{C}) := \{\text{proj obj in } \mathcal{C}\}$

$\cup\!\mathrm{I}$

$P_0(\mathcal{C}) := \{\text{sp-proj obj in } \mathcal{C}\}$

if $\mathcal{C}$: extension-closed.

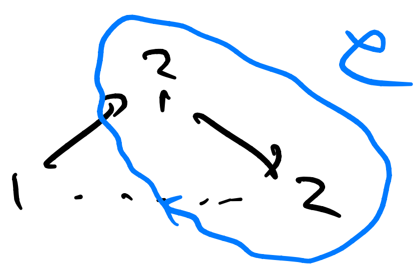
($:\Longleftrightarrow$ $\forall\, 0 \to L \to M \to N \to 0$: ex, $L, N \in \mathcal{C} \Rightarrow M \in \mathcal{C}$) HW

Rem $\mathcal{C}$ のみからは決まらない!

Ex $P(\mathrm{mod}\,A) = P_0(\mathrm{mod}\,A) = \mathrm{proj}\,A$

Ex $A = k(1 \leftarrow 2)$

mod A :



$P(\mathcal{C}) = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix},\ 2.$

$\cup\!\neq$

$P_0(\mathcal{C}) = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}.$

($\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \twoheadrightarrow 2$: surj より,
2 : sp-proj でない)

Def $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\, A$, ext-closed とする.

(1) $\mathcal{C}$ has **enough proj**

$:\Longleftrightarrow \forall C \in \mathcal{C}$, $\exists$ s.e.s.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C' & \to & P_0 & \to & C & \to & 0 \quad : \text{ex.} \\ & & \cap & & \cap & & & & \\ & & \mathcal{C} & & \mathcal{P}(\mathcal{C}) & & & & \end{array}$$

(2) $P \in \mathcal{C}$: **progenerator**

$:\Longleftrightarrow \mathcal{C}$: enough proj かつ

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \mathrm{add}\, P.$$

Ex

$$|\mathcal{C}| < \infty \overset{[\Xi]}{\Longrightarrow} \mathcal{C} : \text{enough proj}$$

(progen もつ)

Prop $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\, A$ が kernel ext-closed

(i.e., $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ $\forall C_1 \xrightarrow{f} C_2$, $\mathrm{Ker}\, f \in \mathcal{C}$)

とすると. $\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \mathcal{P}_0(\mathcal{C})$

(:) ($\supseteq$) OK

($\subseteq$) $\forall P \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$, $C \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} P$: surj.

$\rightsquigarrow \mathrm{Ker}\, \pi \in \mathcal{C}$

$$\rightsquigarrow \quad 0 \to \ker\pi \to C \xrightarrow[\pi]{} P \to 0 \quad : \text{ex}$$
$$\ker\pi \subset \mathcal{C}$$

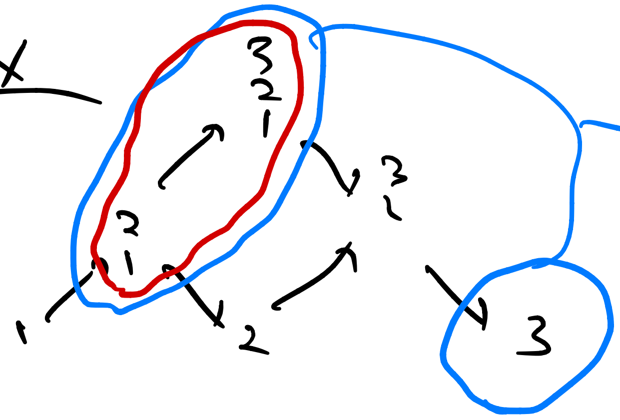
$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Ext}^1_A(P, \ker\pi) = 0$ より split

$\therefore$ π is retraction. $\square$

(Ex torf, wide などは kernel, ext-closed)

(Fun Fact (HW)
$\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}A$, ext-closed, enough proj とする.
$P_0(\mathcal{C}) = P(\mathcal{C}) \iff \mathcal{C}$: epi-ker で閉じる)

Ex



$\mathcal{C}$: kernel, ext-closed. (wide)

$\bigcirc = P(\mathcal{C}) = P_0(\mathcal{C})$

$(1 \leftarrow 2 \leftarrow 3)$

Cover

Def $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}A$ (とする)

(1) $M \in \mathcal{C}$: cover of $\mathcal{C}$

$:\iff \mathcal{C} \subseteq \mathrm{Fac}\, M$

$\Longleftrightarrow \forall C \in \mathcal{C},\ \exists M^n \twoheadrightarrow C$

(2) $M \in \mathcal{C}$: <u>minimal cover</u>

$:\Longleftrightarrow$ (i) $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Fac}\, M$

(ii) $N \oplus M$, $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Fac}\, N$

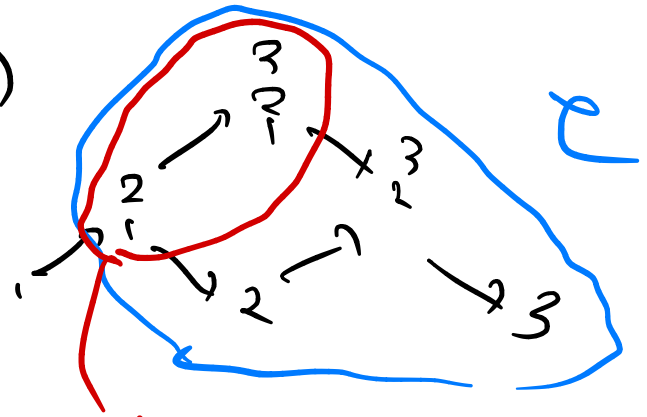
$\Longrightarrow \mathrm{add}\, N = \mathrm{add}\, M$.

[つまり M から indecを1つでも へらすと cover でまない！]

Ex

(1) A_A は $\mathrm{mod}\, A$ の minimal cover.

(2)



min. cover $= P_0(\mathcal{C})$

Rem M : $\mathcal{C}$ の cover

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}$ は min. cover をもつ.

しかし unique か??

Thm [Auslander–Smalø]

$\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\, A$: cover M をもつとき.

$M \in \mathcal{C}$: min cover

$\Longleftrightarrow \operatorname{add} M = \mathcal{P}_0(\mathcal{C})$

(つまり sp-proj をあつめたの = min cover)

Obs $M \in \mathcal{C}$: cover

$\Rightarrow \mathcal{P}_0(\mathcal{C}) \subseteq \operatorname{add} M$

($\forall P$: sp-proj $\in \mathcal{C}$ $\exists\ M^{\oplus} \twoheadrightarrow P$, $M^{\oplus} \in \mathcal{C}$, $P \in \mathcal{C}$

$\rightsquigarrow$ split.)

($\Leftarrow$) Obs より OK.

($\Rightarrow$) Obs より $\operatorname{add} M \supseteq \mathcal{P}_0(\mathcal{C})$

等しくないとしてハイリホウ

$\therefore\ M = X \oplus Y$　X : indec. basic

$X \notin \mathcal{P}_0(\mathcal{C})$

・X : not sp-proj. $\therefore \exists\ C \twoheadrightarrow X$: non retr, $C \in \mathcal{C}$

$M^n \not\to C$ cover

$M^n = X^n \oplus Y^n \xrightarrow{\ \varphi\ } X$ (crossed)

φ : surj

not retr

$\varphi:\ \begin{matrix} X^n \xrightarrow{[f_1,\dots,f_n]} X \\ \oplus \\ Y^n \xrightarrow{\quad g\quad} \end{matrix}$: surj. ∵ index ↘ non-retr

⇓

$f_i : X \to X$: rad $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ ⇐ φ : radical.

⇝ X を 左 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$-mod とみると,

$$X = (\mathrm{rad}\,\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X))\cdot X + \sum\{\mathrm{Im}\,h \mid Y \to X\}$$

⇝ 中山 より $X = \sum\{\text{———}\}$,

⇝ $\exists\ \underline{Y^m \to X}$: surj.

⇝ Y が $\mathcal{C}$ を cover する

∵ $\forall\, C$ ⇝ M の minimal 性に反する.

$(Y^m) \oplus Y^n \twoheadrightarrow \underset{\sim}{X^n} \oplus Y^n \to C$

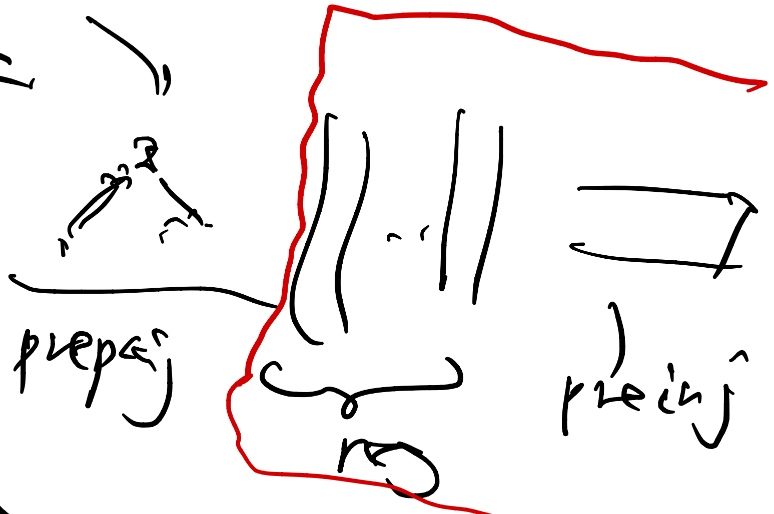
□

<u>Rem</u> cover をもたないことはある!

($|\mathcal{C}| < \infty \Rightarrow \mathcal{C}$: cover もつ

$|\mathcal{C}| = \infty$ とき. ——

I.2. 関手的有限性



Def

$\mathcal{C} \subseteq \operatorname{mod} A \ni X$

(1) $X \xrightarrow{f} C^X$: left $\mathcal{C}$-approximation
左近似

$:\Longleftrightarrow \begin{cases} \circ\ C^X \in \mathcal{C} \\ \circ\ {}^{\forall} X \to C \in \mathcal{C} \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C \\ C^X \arrow[ur, dashed, "\exists"'] & \end{tikzcd}$$

(2) $f : X \to C^X$: left $\underline{\text{minimal}}$ $\mathcal{C}$-approx

$:\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$-approx かつ

left min $\left(\Longleftrightarrow \begin{tikzcd} & C^X \arrow[d, "\varphi"] \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f"'] & C^X \end{tikzcd} \quad {}^{\exists}\varphi : \text{isom} \right)$

(3) $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{mod} A$: 共変有限
(covariantly finite)
cov. fin.

$\Longleftrightarrow {}^{\forall} X \in \operatorname{mod} A$ が 左 $\mathcal{C}$ approx もつ.

Dually for 有 $\mathcal{C}$-approx $C_X \to X$

min.

反変有限
(contravariantly finite)
cont. fin.

(4) $\mathcal{C}$: functorially finite
(fun. fin)

$:\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$: cov. fin & cont. fin

$$\exists\, C_X \longrightarrow \overset{\forall}{X} \longrightarrow \overset{\exists}{C}{}^X.$$

Fact

(1) HW $|\mathcal{C}| < \infty$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{C}$: fun. fin.

(2) $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\, A$: fun. fin (ext-closed)

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C} \text{ は AR 列をもつ.} \\ \mathcal{C} \text{ is enough proj \& inj} \end{array} \right)$$

(3) HW $\exists\, X \to C^X$: $\mathcal{C}$-approx

$\Longrightarrow \exists\, X \to (C^X)'$: min. $\mathcal{C}$-approx.

Ex

$\mathrm{inj}\,A \subseteq \mathrm{mod}\,A$: fun. fin. で

$X \to I^X$: left min $\mathrm{inj}\,A$-approx

//

X の inj hull.

Thm [AS] $\mathcal{C}$: fin. 回ぐでる.

$\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,A$: TFAE

(1) $\mathcal{C}$ が cover もつ

(2) A_A が 左 $\mathcal{C}$-approx もつ.

(とくに $\mathcal{C}$: cov. fin $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$: cover もつ)

さらに、$A \to C^A$: left min $\mathcal{C}$-approx

$\rightsquigarrow$ C^A が $\mathcal{C}$ の min. cover,

($\because$ $\mathrm{add}\, C^A = \mathcal{P}_0(\mathcal{C})$) $\square$

(証) (2) $\Rightarrow$ (1)

$A \to C^A$: left $\mathcal{C}$-approx とる.

⇝ C^A は $\mathcal{C}$ の cover.

$$\left(\forall C \in \mathcal{C}, \quad \begin{tikzcd} A^n \arrow[r] \arrow[d] & C \\ (C^A)^n \arrow[ur, dashed, "\exists"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowright"] & \end{tikzcd} \text{approx} \right)$$

(1) ⇒ (2).

$M \in \mathcal{C}$: cover とる.

$A \to M^A$: left (add M)-approx とる.

は $\mathcal{C}$-approx でもある.

$$\left(\begin{tikzcd} \forall A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & C \in \mathcal{C} \\ M^A \arrow[r, dashed] \arrow[ur, phantom, "\exists\circlearrowright"] & M^n \arrow[u, "\exists \text{ cover}"'] \end{tikzcd} \quad \exists : \text{proj} \right)$$

まさに上以降

$M \in \mathcal{C}$: min cover とる.

$f : A \to M^A$: left min (add M)-approx

⇝ (1) ⇒ (2) より f : left min $\mathcal{C}$-approx.

一方 (2) ⇒ (1) より M^A は $\mathcal{C}$ の cover.

$M^A \in \operatorname{add} M$. ⇝ M の minimal 性より)

$$\operatorname{add} M = \operatorname{add} M^A .$$

$\square$

Ex

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & \substack{3\\2\\1} \arrow[dr] & & \\
 & \substack{2\\1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \substack{3\\2} \arrow[dr] & \\
1 \arrow[ur] & & \substack{3\\2} \arrow[ur] & & 3
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{C}$

∴ left min $\mathcal{C}$-approx.

$$P(1) : \quad 1 \longrightarrow \substack{3\\2\\1}$$

$$P(2) : \quad \substack{2\\1} \longrightarrow \substack{3\\2\\1} \oplus \substack{3\\2}$$

$$\oplus \quad P(3) : \quad \substack{3\\2\\1} = \substack{3\\2\\1}$$

$$A \longrightarrow \left(\substack{3\\2\\1}\right)^{\oplus 3} \oplus \substack{3\\2} .$$

∴ left min $\mathcal{C}$-approx

$$\therefore \longrightarrow \substack{3\\2\\1}, \ \substack{3\\2} = P_0(\mathcal{C}).$$

「sp-proj = min cover は

A の left min approx である」

Def $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{mod} A$: <u>image-closed</u>

$:\Longleftrightarrow \forall\, C_1 \xrightarrow[f]{} C_2$, $C_1 \in \mathcal{C}$, $C_2 \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f \in \mathcal{C}$. ⌟

(<u>Ex</u> tors, torf, wide)

<u>Thm</u> [AS]

$\mathcal{C}$: image-closed とき, TFAE

(1) $\mathcal{C}$: cov. fin.

(2) $\mathcal{C}$: cover をもつ ⌟

(:) <u>(1) ⇒ (2)</u>

$\mathcal{C}$: cov. fin なら

$\exists A \longrightarrow C^A$: left $\mathcal{C}$-approx

cover なのはさっきやった

<u>(2) ⇒ (1)</u> セズメイ!!

$\forall X \in \operatorname{mod} A$.

$\rightsquigarrow \ \exists\ A^n \twoheadrightarrow X$: surj

$\exists$ left $\mathcal{C}$-approx by さっき、

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[d, "f"] & & X \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ C^{A^n} \arrow[rr, dashed] & & {} \end{tikzcd}$$

p.o.1.

$\mathcal{C}$-approx ?

◦ $C \in \mathcal{C}$ と $\varphi : X \to C$ を

全て動かして

$X \xrightarrow{\prod \varphi_i} \prod_{i \in I} C_i$ をつくる。

$\notin \mathrm{mod}\, A$.

各 $i \in I$ で、

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "\varphi_i"] \\ C^{A^n} \arrow[r, dashed, "\exists \psi_i"] & C_i \end{tikzcd}$$

($\because f$: $\mathcal{C}$-approx)

$\underset{\prod}{\rightsquigarrow}$

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r] \arrow[d] & & X \arrow[d, "\prod \varphi_i"] \\ C^{A^n} \arrow[r, two heads] \arrow[rr, "\prod \psi_i"', bend right] & \square \arrow[r, hook] & \prod C_i \end{tikzcd}$$

$D := \mathrm{Im}(\prod \psi_i) \in \mathcal{C}$ を示す。

C^{A^n}, C_i は f.d. より

$$D = C^{A^n} \Big/ \bigcap \ker \psi_i$$

有限にとり直す。

$$= C^{A^n} \Big/ \ker\psi_1 \cap \cdots \ker\psi_n$$

$$= \mathrm{Im}\Big(C^{A^n} \xrightarrow{\varphi} \underbrace{C_{i_1} \oplus \cdots \oplus C_{i_n}}_{\in\, \mathcal{C}} \Big)$$

$\in \mathcal{C}$ by

$\mathcal{C}$: im-closed. $\square$

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[r, two heads, "\text{surj}"] \arrow[d] & X \arrow[dl, "\exists g"'] \arrow[d, "\prod \psi_i"] \\
C^{A^n} \arrow[r, two heads, "\exists"] & D \arrow[r, hook] & \prod C_i
\end{tikzcd}$$

$D \in \mathcal{C}$

$\rightsquigarrow$ $g : X_a$ left $\mathcal{C}$-approx.

(①
$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr] & C \\
\mathcal{C} \ni & \square \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \prod C_i \arrow[u, "\exists"']
\end{tikzcd}$$
)

$\square$

<u>Def</u> $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{mod} A$,

$\mathcal{C}$: wide subcat
(拡大)

:⟺ $\mathcal{C}$: ker, coker, ext で
とじる.

($\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}$: abelian
(image-closed))

IKE-closed

<u>Cor</u> $\mathcal{C}$: image, kerenel, ext-closed とする.
(e.g. wide, torf)

TFAE (1) $\mathcal{C}$: cov. fin

(2) $\mathcal{C}$: cover もつ

(3) $\mathcal{C}$: progen をもつ

このとき、$\mathcal{C}$ の min cover

$= \mathcal{C}$ の progen.

(1) $\Longleftrightarrow$ (2) OK

(3) $\Rightarrow$ (2) 明らか。

(P : proj $\Rightarrow$ $\forall X$ $P^{n} \xrightarrow{\theta} X \to 0$)

$0 \to \square \to$

$\rightsquigarrow$ P は cover.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\mathcal{C}$ の min cover P をとる

$\rightsquigarrow$ $P \in \mathcal{P}_0(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{C})$

$\rightsquigarrow$ $\forall X \in \mathcal{C}$. $\exists$

$0 \to X' \to P^{n} \xrightarrow{\theta} X \to 0$

$X' \in \mathcal{C}$ ← $\mathcal{C}$: ker-closed

θ : cover.

$\therefore$ P は $\mathcal{C}$ の progen. $\square$

Key Cor $\mathcal{W} \subseteq \mathrm{mod}\, A$: wide subcat.

TFAE

(1) $\mathcal{W}$: cov. fin

(2) $\mathcal{W}$: cont. fin

(3) $\mathcal{W}$: fun. fin.

(4) $\mathcal{W} \simeq \mathrm{mod}\, B$ $\exists B$: f.d. alg.

(証) さっきより

(1) $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{W}$: cover もつ $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{W}$: progen P もつ

$\Uparrow$ (B は mod B の cover)　　$\Downarrow$ 森田 ($B := \mathrm{End}(P)$)

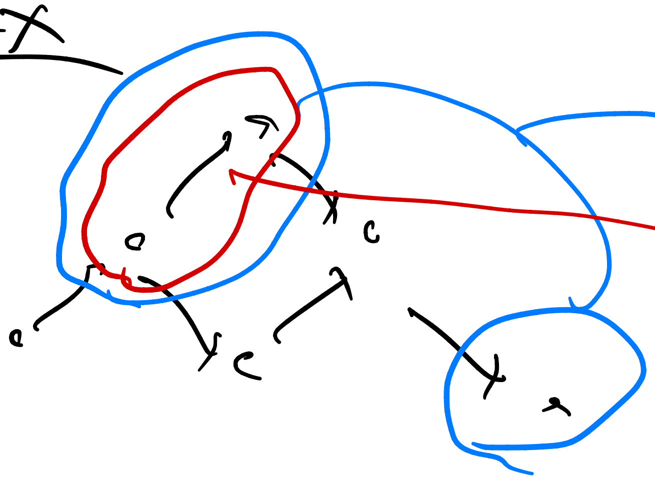
$\mathcal{W} \simeq \mathrm{mod}\, B$

$\Downarrow$　　$\cup$　　$\cup$

$\square$: $\mathcal{W}$ の cover.　　$\square \hookleftarrow B$

(4) では 左右対称より (2), (3) も同値. $\square$

Ex



W : wide,

progen of W

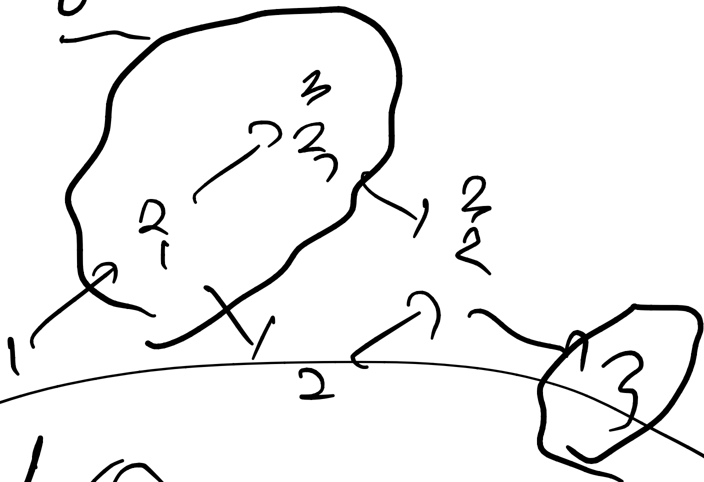
$\rightsquigarrow \quad W \simeq \mathrm{mod}\, k(1 \leftarrow 2)$

Serre $\dashv$ wide $\qquad$ wide $\therefore$ $W \hookrightarrow \mathrm{mod} A$ exact.

$\because$

Sub $\qquad$ ker

quot $\qquad$ coker $\qquad$ surj 像?



15:00 —

Part II. ねじれ類の(c)傾加群

II.1. Tilting vs tors

__Def__ $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \operatorname{mod} A$.

$$\mathcal{C} * \mathcal{D} := \{ X \in \operatorname{mod} A \mid \exists\, 0 \to C \to X \to D \to 0 \}$$
$$C \in \mathcal{C}, \quad D \in \mathcal{D} \text{ ex.}$$

__Def__ $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$: $\operatorname{mod} A$ の subcat のペア が

__ねじれ対 (torsion pair)__

$$:\Longleftrightarrow \begin{cases} (1)\ \operatorname{Hom}_A(\mathcal{T}, \mathcal{F}) = 0 \\ (2)\ \operatorname{mod} A = \mathcal{T} * \mathcal{F} \end{cases}$$

このとき $\mathcal{T}$: ねじれ類 (torsion class) $\boxed{\text{tors}}$

$\mathcal{F}$: —— 自由類 (torsion-free class) $\boxed{\text{torf}}$

とよぶ.

「tors. pair = $\operatorname{mod} A$ の直交分解」

$\rightsquigarrow \ \forall X \in \operatorname{mod} A.$

$\exists !$ HW

$$0 \to tX \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} fX \to 0$$

$$tX \in \mathcal{T}, \qquad fX \in \mathcal{F}$$

HW i : right min $\mathcal{T}$-approx

p : left min $\mathcal{F}$-approx.

よって. $\mathcal{T}$: cont. fin.

$\mathcal{F}$: cov. fin. $\qquad \mathcal{T}$

<u>Prop</u> HW $\mathcal{T} \subseteq \operatorname{mod} A$: tors

$\iff \mathcal{T}$: ext, Fac - closed.

$$\left(\iff \forall T \twoheadrightarrow M, \ T \in \mathcal{T} \Rightarrow M \in \mathcal{T} \right)$$

このとき

$$\mathcal{T}^{\perp} := \{ X \in \operatorname{mod} A \mid (\mathcal{T}, X) = 0 \}$$

$\rightsquigarrow (\mathcal{T}, \mathcal{T}^{\perp})$: tors. pair.

Def

$\mathrm{tors}\,A := \{\ \mathrm{mod}\,A$ の tors たち $\}$

$\mathrm{torf}\,A := \{$ ―― torf ―― $\}$

⇝ 包含により poset.

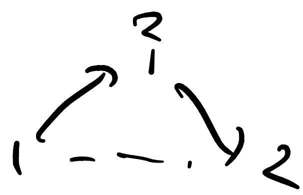
$$\begin{tikzcd} \mathrm{tors}\,A \arrow[r, bend left, "(-)^{\perp}"] & \mathrm{torf}\,A \arrow[l, bend left, "{}^{\perp}(-)"] \end{tikzcd} \quad : \underline{\underline{\text{bij}}}$$

(anti-iso of posets)

Ex

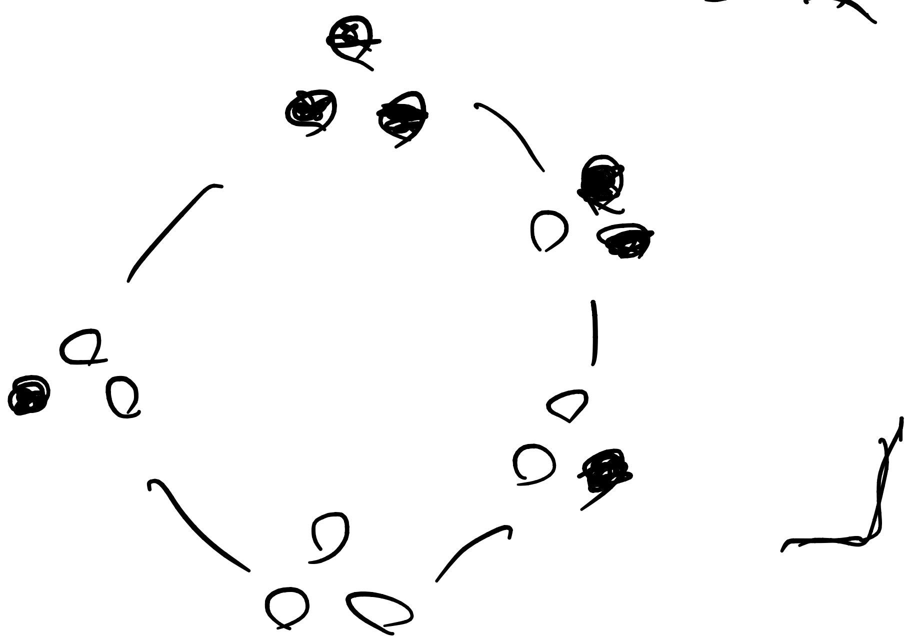
$A = k(1 \leftarrow 2)$

⇝ $\mathrm{mod}\,A$:



⇝ $\mathrm{tors}\,A$:

5コ



Part I の系

Thm $\mathcal{T} \in \mathrm{tors}A$ 次が成立

(1) $\mathcal{T}$: fun. fin ($\Longleftrightarrow$ $\mathcal{T}$: cov. fin)

$\Longleftrightarrow$ ${}^{\exists}M \in \mathcal{T}$ s.t. $\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\,M$.

(2) $\mathcal{T}$ は enough inj で,

$\{\text{inj obj}\} =: I(\mathcal{T}) = \mathrm{add}\ t(DA)$.

$I(\mathcal{T}) \overset{\text{dual}}{\leftrightarrow} P(\mathcal{T})$

$0 \to tX \hookrightarrow X \to fX \to 0$ $\square$

(1) $\mathcal{T}$: fun. fin $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{T}$: cov. fin

$\Updownarrow$ [AS]

$\mathcal{T}$ は Fac-closed より image-closed.

$\mathcal{T}$ が cover をもつ

$\Updownarrow$

${}^{\exists}M \in \mathcal{T}$, $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{Fac}\,M$.

$\Updownarrow$ $\mathcal{T}$: Fac-closed.

$\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\,M$

(2) $\mathcal{T}$ は conf. fin ではあった
($\tau X \hookrightarrow X$)

たIの Cor の dual より

$\mathcal{T}$ は inj cogen をもつ.

$\rightsquigarrow$

$\underline{t(DA)} \hookrightarrow \underset{\sim}{DA}$: min right $\mathcal{T}$-approx. より

$\mathcal{T}$ は inj cogen $\underset{\sim}{t(DA)}$ をもつ. $\square$

Rem $\mathcal{T}$ は enough proj と限らない.

$\mathcal{P}(\mathcal{T}) = \{0\}$ もありえる

いつ enough proj?. ← $\dfrac{\text{fun. fin}}{\text{のとき!}}$

fun. fin. tors の proj を決定する!

Thm $\mathcal{T} \in \operatorname{tors} A$, fun. fin とする

$A \xrightarrow{f} T_0^A$: left min $\mathcal{T}$-approx

$\Rightarrow$ $A \to T_0^A \to T_1^A \to 0$: ex とする. と.

(1) add $T_0^A = \mathcal{P}_0(\mathcal{T})$,

$T_1^A \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$

(2) ind $T_0^A \cap$ ind $T_1^A = \emptyset$.

(3) $\mathcal{P}(\mathcal{T}) = \mathrm{add}(T_0^A \oplus T_1^A)$. しかも.

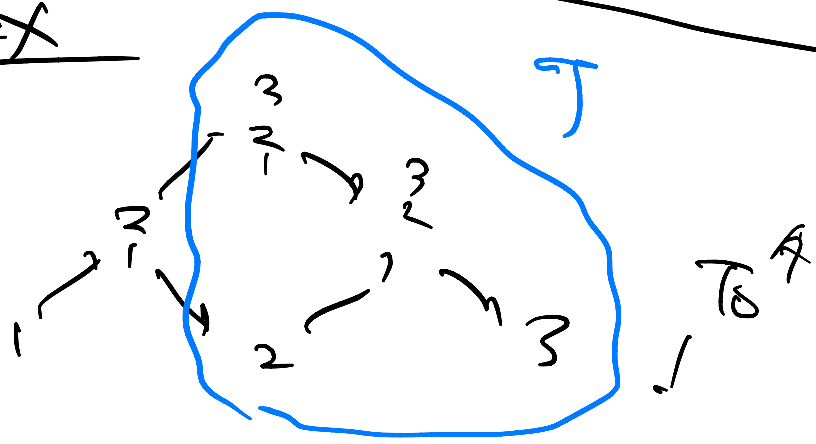
$T_0^A \oplus T_1^A$ は $\mathcal{T}$ の progen. になる ⌋

「 $\mathcal{P}(\mathcal{T}) = T_0^A \sqcup T_1^A$

T_0^A ↑ $\mathcal{T}$ の sp-proj

T_1^A ↑ $\mathcal{T}$ の proj, not sp-proj

Ex



$$1 \longrightarrow \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \longrightarrow 0$$

$$\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus 2 \longrightarrow \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \longrightarrow 0$$

$$\oplus \quad \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

$$A \longrightarrow T_0^A \longrightarrow T_1^A \longrightarrow 0$$

$$\therefore\ P(T) = \underbrace{\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix},\ 2}_{\text{sp-proj}},\ \underbrace{\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}}_{\text{proj}},$$

not sp-proj.

12 (1) add $T_0^A = P_0(T)$ は OK.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Inf} \oplus T_0^A \longrightarrow T_1^A \longrightarrow 0$$

~~leff~~ left T-app $(1+w)$

T_0^A : sp-proj

$(-, T)$ すると,

$$(T_0^A, T) \oplus (\mathrm{Inf}, T) \longrightarrow {}^1(T_1^A, T) \longrightarrow {}^1(T_0^A, T) = 0$$

surj

$\therefore\ T_1^A \in P(T)$

(2) $\exists\ M \in \operatorname{ind} T_0^A \cap \operatorname{ind} T_1^A$ とする.

$\rightsquigarrow$ M : sp-proj in T.

$\rightsquigarrow$ $T \nearrow T_0^A \twoheadrightarrow T_1^A \overset{\text{proj}}{\twoheadrightarrow} M$: splitする.

(なし、次の Len より
$T_0^A \to T_1^A$: radical.

$\rightsquigarrow$ $T_0^A \rightarrowtail T_1^A \twoheadrightarrow M$: radical
ムジュン。 not retr.

Len (HW)
$(0 \to) L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ について
f : left min $\Leftrightarrow$ $g \in$ rad.

(3) 直接 $T_0^A \oplus T_1^A$: $\mathcal{T}$ の progen を示す。
$\forall X \in \mathcal{T}$, T_0^A : $\mathcal{T}$ の cover より

$\exists$ left $\mathcal{T}$-app.

$$\begin{tikzcd}
 & A^n \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, dashed] & (T_0^A)^n \arrow[r] \arrow[d] & (T_1^A)^n \arrow[r] \arrow[d, "\exists"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & (T_0^A)^{\oplus m} \arrow[r] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\exists$: ex

(※)

(※) は、ここが surj より push out になる!

$\rightsquigarrow$ つぶして

$$(T_0^A)^n \longrightarrow (T_0^A)^m \oplus (T_1^A)^n \longrightarrow X \longrightarrow 0 \quad \because \text{ex.}$$

$$\Downarrow$$

~~enough proj が~~

$\therefore$ $T_0^A \oplus T_1^A$: progen of $\mathcal{T}$ が1つある。 □

tilt. mod

Def $T \in \operatorname{mod} A$.

(1) T : partial tilting module

$$:\Longleftrightarrow \begin{cases} \circ \ \operatorname{pd} T \leq 1 \\ \circ \ \operatorname{Ext}_A^1(T,T) = 0. \end{cases}$$

(2) T : tilting module
傾加群

$:\Longleftrightarrow$ T : part. tilt かつ

$$\exists \ 0 \longrightarrow A \longrightarrow \underbrace{T_0 \longrightarrow T_1}_{\text{add } T \text{ に入る.}} \longrightarrow 0 \ \because \text{ex}$$

┘

Prop T: tilt. とすると、

(1) $\mathrm{Fac}\,T = T^{\perp_1} := \left\{ X \in \mathrm{mod}A \;\middle|\; \mathrm{Ext}^1(T, X) = 0 \right\}$

(2) $\mathrm{Fac}\,T$ は tors

(3) —————— progen T をもつ。 」

(1) $\exists\ 0 \to A \to T_0 \to T_1 \to 0$: ex.

left $\underline{(T^{\perp_1})}$-approx が存在する HW

$\rightsquigarrow$ $T^{\perp_1}$ は cover T_0 を持つ。

$\therefore$ $T^{\perp_1} \subseteq \mathrm{Fac}\,T$.

逆は、$T^{\perp_1}$ は tors より OK
$\supset T$

(2) HW

(3) $T \in \mathrm{Fac}\,T$ が progen 示す。

$\forall X \in \mathrm{Fac}\,T$, $\underline{\text{right } (\mathrm{add}\,T)\text{-approx}}$
$\Vert$
surj.

$$\begin{tikzcd} T_X \arrow[r, two heads] & X \\ \hat{T} \arrow[u, dashed] \arrow[ur, two heads] & \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow \left[\, 0 \to K \to T_X \to X \to 0 \,\right]$

に $(T,-)$ すると.

$(T,T_X) \twoheadrightarrow (T,X) \to (T,K) \to (T,T_X)$

approx より

surj

$(T,T_X) = 0$.

$\therefore K \in T^{\perp_1} = \mathrm{Fac}\,T$.

($\underline{T} \in P(\mathrm{Fac}\,T)$ は

$\mathrm{Fac}\,T = \underline{T^{\perp_1}}$ より 従う)

Def $\mathcal{T} \in \mathrm{tors}\,A$: <u>faithful</u>

$:\Longleftrightarrow \mathrm{ann}\,\mathcal{T} = 0$

$\left(\mathrm{ann}\,\mathcal{T} = \{ a \in A \mid \forall T \in \mathcal{T}\ \ Ta = 0 \} \right)$

$\Longleftrightarrow DA \in \mathcal{T}$.

HW

Thm $\mathcal{T} \in \mathrm{tors}\,A$. TFAE.

(1) $\exists T$: tilt s.t. $\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\,T$.

(2) $\mathcal{T}$: fun. fin & faithful.

①: (1) ⇒ (2)

Fac T : cover Tも)

⇒ fun. fin. tors.

$\mathrm{Fac}\,T = T^{\perp_1} \ni DA$

∴ faithful.

(2) ⇒ (1)

$\mathcal{T}$: fun. fin tors

min $\mathcal{T}$-approx ~~left~~

⇝ ∃ $A \xrightarrow{f} T_0^A \to T_1^A \to 0$

⇝ $\mathcal{T}$: faithful ⇒ HW f : inj

⇝ $0 \to A \to T_0^A \to T_1^A \to 0$ s.e.s.

⇝ $\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\,T_0^A = \mathrm{Fac}(T_0^A \oplus T_1^A)$

$T := T_0^A \oplus T_1^A$: tilt?

∵ $\mathcal{T}$ の progen より

$^1(T_1, T) = 0$.

〜, pd $T \leq 1$ を示す OK.

T: faithful より $DA \in \mathcal{T}$, に注意して.

$\forall X \in \operatorname{mod} A$,

$$\operatorname{Ext}^2(T, X) \cong \operatorname{Ext}^1(T, \Sigma X) = 0$$

$$(0 \to X \to \underset{\text{inj}}{I^X} \to \Sigma X \to 0)$$

$I^X \in \mathcal{T}$, $\Sigma X \in \mathcal{T}$

$\therefore$ pd $T \leq 1$ $\square$. $T \in P(\mathcal{T})$

まとめ : bij

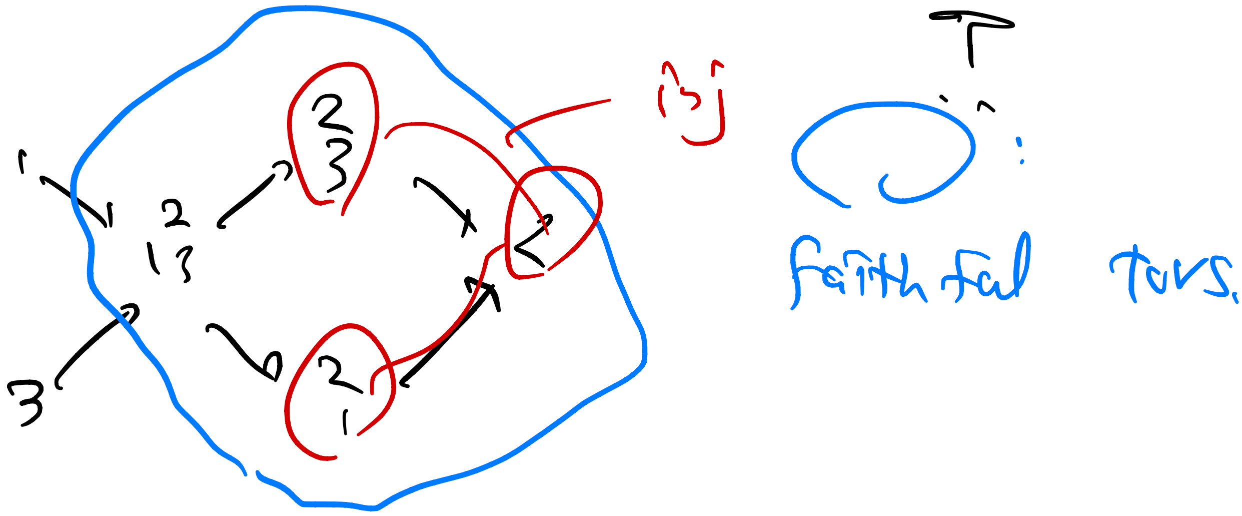
$$\{\text{tilt}\} \underset{\text{progen.}}{\overset{\mathrm{Fac}}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{matrix}\text{fun. fin} \\ \text{faith. tors}\end{matrix}\right\}$$

?. ↓ おそくはない

$$\cap \qquad\qquad\qquad\qquad \cap$$

$$\{\ ?.\ \} \overset{?}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix}\text{fun. fin} \\ \text{tors}\end{matrix}\right\}$$

Ex



$$k(1 \leftarrow 2 \rightarrow 3)$$

$$1 \longrightarrow \begin{smallmatrix}2\\13\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix} \longrightarrow 0$$

$$\begin{smallmatrix}2\\13\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}2\\13\end{smallmatrix}$$

$$\oplus \quad 3 \longrightarrow \begin{smallmatrix}2\\13\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A \;\cancel{\longrightarrow}\; T_0^A \longrightarrow T_1^A \longrightarrow 0$$

$$P(T) = \underbrace{\begin{smallmatrix}2\\13\end{smallmatrix}}_{\text{sp-proj}}, \underbrace{\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}}_{\substack{\text{proj}\\ \text{not sp-proj}}} : \text{tilting}$$

II. 2. τ-tilting

Prop [Auslander Smalø]

$X, Y \in \operatorname{mod} A$. TFAE.

(1) $\operatorname{Hom}_A(X, \tau Y) = 0$.

(2) $\mathrm{Ext}^1_A(Y, \mathrm{Fac}\,X) = 0$. ┘

∵ AR formula

$$\mathrm{Ext}^1_A(Y, X) = D\overline{\mathrm{Hom}}(X, \tau Y)$$ ┘

(1) ⇒ (2)

$X' \in \mathrm{Fac}\,X$ について.

$\exists\, X^n \twoheadrightarrow X'$.

$\rightsquigarrow\ 0 \to (X', \tau Y) \to (X^n, \tau Y)$: ex

$(X^n, \tau Y) = 0$.

∴ $\mathrm{Hom}(X', \tau Y) = 0$.

∴ ARより $\mathrm{Ext}^1(Y, X') = 0$.

(2) ⇒ (1)

$f : X \to \tau Y$ をとる.

$X \twoheadrightarrow \mathrm{Im} f \hookrightarrow \tau Y$

(2)より

$\mathrm{Ext}^1(Y, \mathrm{Im} f) = 0$

∴ ARより $\overline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Im} f, \tau Y) = 0$.

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \operatorname{Im} f \arrow[r, hook] \arrow[d, "\text{inj hull}"', "\oplus"] & \mathcal{T}Y \\ I \arrow[ur, dashed, "\exists"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Im} f \arrow[dl, "\oplus"'] \arrow[d, "\oplus"] \arrow[dr, hook, "\oplus"] & \\ I \arrow[r, "\exists"'] & \mathcal{T}Y \arrow[r, "\oplus", "\exists"'] & I \end{tikzcd}$$

$\exists$ (∵ I : inj.)

$\rightsquigarrow$ inj hull : left min より

$I \xrightarrow[\text{sec}]{\oplus} \mathcal{T}Y \xrightarrow[\text{retr.}]{\oplus} I$: isom. $\Rightarrow$

$I \oplus \mathcal{T}Y$.

$\rightsquigarrow$ しかし $\underset{\sim}{\mathcal{T}Y}$: inj summand をもたない

$\rightsquigarrow \quad I = 0.$

$\rightsquigarrow \quad \operatorname{Im} f = 0$

$\rightsquigarrow \quad f = 0. \qquad \square$

<u>Def</u> M : τ-rigid

$:\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Hom}(M, \tau M) = 0$.

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ext}^1(M, \mathrm{Fac}\, M) = 0$.

さっき

<u>"Def"</u> $M \in \mathrm{mod}\, A$: <u>台 τ 傾加群</u>

(~~support~~ τ-tilting
$s\tau$-tilt)

$:\Longleftrightarrow$ (1) M : τ-rigid

(2) $M \in \mathrm{mod}\, A/\mathrm{ann}\, M$: として

tilting module.」

$s\tau\text{-tilt}\, A := \{ s.\tau\text{-tilt. mod} \} \cancel{/ M \simeq N \; (:\Longleftrightarrow \mathrm{add}\, M = \mathrm{add}\, N.)}$

<u>Prop</u> (HW)

M : <u>τ-rigid</u> $\Rightarrow$ $\mathrm{Fac}\, M$: tors.」

で($^1(M, \mathrm{Fac}\, M) = 0$ を使う.)

Thm 次の bij がある。

$$\left\{\begin{array}{ccc} s\tau\text{-tilt}\,A & \rightleftarrows & f\text{-tors}\,A \subset \mathrm{tors}\,A \\ & & \| \\ & & \{\text{fun.fin. tors たち}\} \\ M & \longmapsto & \mathrm{Fac}\,M \\ \mathcal{T}\text{ の progen.} & \longleftarrow\!\shortmid & \mathcal{T} \end{array}\right.$$

[Adachi-Iyama-Reiten]

Well-defined?

$\to$ は OK.

$\leftarrow$ は、$\mathcal{T} \in f\text{-tors}\,A$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{T}$ は progen M をもつ。

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\,M$,

$${}^1(M, \underset{\mathrm{Fac}\,M}{\underset{\|}{\mathcal{T}}}) = 0 \Longrightarrow M : \tau\text{-rigid}.$$

$\underset{\mathrm{Fac}\,M}{\overset{\|}{\mathcal{T}}} \subseteq \mathrm{mod}\,A/\mathrm{ann}\,M$ とみれる。

$\mathrm{ann}\, \mathcal{T} = \mathrm{ann}\, M$. ($\because \mathcal{T} = \mathrm{Fac}\, M$)

$\rightsquigarrow \mathcal{T} \subseteq \mathrm{mod}\, A/\mathrm{ann}\, M$

: faithful. tors になる

$\rightsquigarrow M$: faithful. $\underbrace{\text{tors}}_{\text{in } \mathrm{mod}\, A/\mathrm{ann}\, M}$ a progen

$\rightsquigarrow$ $\underline{M : \text{tilting}}$ $A/\mathrm{ann}\, M$-module.

$\therefore M$: $s\tau$-tilt.

細かい事はやれば分かる。

$\square$

II.3. Counting argument

<u>Fact.</u> $T \in \mathrm{mod}\, A$: partial tilt

$\Rightarrow |T| \leq |A|$ ← alg の rank.

(等号 $\Longleftrightarrow$ T : tilt)

<u>Def</u> $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\, A$

$\rightsquigarrow \operatorname{supp} \mathcal{C} := \left\{ S : \text{simple } A\text{-mod} \;\middle|\; \exists C \in \mathcal{C},\ S \text{ は } C \text{ の組成因子} \right\}$

($\operatorname{supp} M$ も同じく)

Prop (HW) $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{mod} A$ について，

$$|\operatorname{supp} \mathcal{C}| = |A/\operatorname{ann} \mathcal{C}|$$

/≅

なるに．

$\exists\ A \xrightarrow{f} C^A$: left $\mathcal{C}$-approx

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Im} f \cong A/\operatorname{ann} \mathcal{C}.$$

Thm TFAE for $M \in \operatorname{mod} A$.

(1) M : sτ-tilting.

(2) (i) M : τ-rigid

(ii) $|M| = |\operatorname{supp} M|$

$|M|$ が 十分多い，

M : τ-rigid について

M : sτ-tilt $\Leftrightarrow$ $M \in \operatorname{mod} A/\operatorname{ann} M$: tilt. $(*)$

一方、 $\operatorname{Fac} M \subsetneq \operatorname{mod} A/\operatorname{ann} M$

faithful tors.

M : τ-rigid $\Rightarrow$ 前のギロンより

M : partial tilt over $A/\operatorname{ann} M$.

$\therefore$ $(*) \overset{\text{Fact}}{\Longleftarrow} |M| = |A/\operatorname{ann} M|$

$$= |\operatorname{supp} M|$$

$\square$

Ex

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \\
 & \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[dr] & \\
1 \arrow[ur] & & 2 \arrow[ur] & & 3
\end{tikzcd}$$

$\Leftarrow$: faithful tors.

$M := \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus 2 \rightsquigarrow \tau$-rigid.

$|M| = 2$, $|\operatorname{supp} M| = 3$.

$M \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$: supp τ-tilting.