

# アーベル圏の部分圏のいくつかのクラスについて

榎本 悠久 (大阪公立大学)\*

アーベル圏  $\mathcal{A}$  を固定して考える。このアーベル圏にどのような部分圏がどれほどあるかという問題は、古くから様々な状況・条件のもとで考察されてきた。例えば代数幾何においては、ネータースキーム上の接続層のなすアーベル圏の **Serre 部分圏** という対象が、スキームの特殊化閉部分集合という位相的条件を満たす部分集合により分類されるという Gabriel の結果 [1] がある。また、導来圏を調べる際にも、アーベル圏の**ねじれ類** という部分圏を用いて  $t$  構造が記述されるという話があり、これは Bridgeland の安定性条件の空間の研究でも重要な役割を果たす。

一方で、多元環の表現論では、有限次元多元環  $\Lambda$  上の有限生成加群のなすアーベル圏  $\text{mod } \Lambda$  を考える。この圏は、全ての対象が直既約対象の有限直和に一意的に分解される (Krull-Schmidt の定理) ことから、「 $\text{mod } \Lambda$  の部分圏を考える」ことと「直既約対象の同型類の集合の部分集合を考える」ことはほぼ等価である。よって、例えば有限表現型という「直既約対象の同型類が有限個しかない」状況では、 $\text{mod } \Lambda$  上にどのような部分圏がどれほどあるかという問は、組合せ論的な毛色を持つ。

この講演では、アーベル圏の部分圏のクラスとして、次を考える。ここで **I, C, K, E** はそれぞれ**像 (image)**, **余核 (cokernel)**, **核 (kernel)**, **拡大 (kernel)** の頭文字である。

- 部分対象・商・拡大を取る操作で閉じている (**Serre 部分圏**)
- 商と拡大を取る操作で閉じている (**ねじれ類**)
- 部分対象と拡大を取る操作で閉じている (**ねじれ自由類**)
- 核・余核・拡大を取る操作で閉じている (**CKE 閉部分圏 = 広大部分圏**)
- 像・余核・拡大を取る操作で閉じている (**ICE 閉部分圏**)
- 像・核・拡大を取る操作で閉じている (**IKE 閉部分圏**)
- 像・拡大を取る操作で閉じている (**IE 閉部分圏**)

これらの部分圏は自明なヒエラルキーがあり、上ほど狭く下ほど広い。本講演では、有限次元多元環の場合や可換環の場合に対して、これらのクラスの部分圏たちの具体的な計算例や、それらを考えるモチベーション (導来圏や組合せ論への応用) [3, 7]、また [2, 4, 5, 6] により明らかになった、非自明な相互関係や分類結果についての概要を話す。

---

\* 〒599-8531 大阪府堺市中区学園町 1 番 1 号

e-mail: [henomoto@omu.ac.jp](mailto:henomoto@omu.ac.jp)

web: <https://haruhisa-enomoto.github.io/>

本研究は科研費 (課題番号:21J00299) の助成を受けたものである。

## 参考文献

- [1] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 323–448.
- [2] H. Enomoto, *Rigid modules and ICE-closed subcategories in quiver representations*, J. Algebra 594 (2022), 364–388.
- [3] H. Enomoto, *From the lattice of torsion classes to the posets of wide subcategories and ICE-closed subcategories*, to appear in Algebr. Represent. Theory.
- [4] H. Enomoto, *IE-closed subcategories of commutative rings are torsion-free classes*, arXiv:2304.032608.
- [5] H. Enomoto, A. Sakai, *ICE-closed subcategories and wide  $\tau$ -tilting modules*, Math. Z. 300 (2022), no. 1, 541–577.
- [6] H. Enomoto, A. Sakai, *Image-extension-closed subcategories of module categories of hereditary algebras*, J. Pure Appl. Algebra 227 (2023), no. 9, Paper No. 107372.
- [7] A. Sakai, *Classifying  $t$ -structures via ICE-closed subcategories and a lattice of torsion classes*, arXiv:2307.11347.