# ある有限性を満たすアーベル圏の組合せ論的特徴づけについて

バーチャル数学科大学院生いたりんっ

Abstract. この記事は、ぴあのん (@piano2683) さん主催の Category Theory Advent Calender 2018 用の数学記事です。適度に扱いやすいよい有限性を満たすアーベル圏が、ある純組合せ論的条件を満たす点線付き有向グラフ (translation quiver) とほぼ一対一に対応する、という Igusa-Todorov の有名な結果の話をします。想定読者はアーベル圏がどんなものか何となく知っている人です。アーベル圏・ホモロジー代数などというと抽象圏論で単なる道具として扱われがちですが、たかだか有限グラフ上の組合せ論というかなり具体的な対象と密接につながっていて、具体的な計算や例が豊富、という雰囲気を実感していただければ幸いです。

目次



## 1. 導入

**1.1. 自己紹介.** まず著者の肩書である「バーチャル数学科大学院生」に見慣れない方もいらっしゃると思うので簡単に自己紹介をします。著者は 2017 年 12 月から一気にブームになったバーチャル YouTuber (いわゆる VTuber) の一人であり、専門数学の内容を YouTube に投稿しております (チャンネルはこちらから、チャンネル登録よろしくね！)。バーチャルなアバターを借りることにより、普通の大学院生でも全世界に気軽に自分の専門分野を紹介したり解説したりできるという点に魅力を感じ、バーチャルになりました (ほかにも自分の精神衛生上の理由もありますがここでは省きます)。このような、アカデミックな発信を行うバーチャルな存在の集まりとして VR アカデミアがあり、著者はそこに所属している大学院生という肩書で発信をしております。

*Date*: 2018.12.24.
*Key words and phrases.* Abelian category, Representation-finiteness.

1.2. **専門・執筆のきっかけ.** 専門は、圏論とくにホモロジー代数を道具や具体例として用いる、いわゆる表現論です (どのような類の表現論かはこの pdf 等を見れば分かると思います)。基本的に preadditive な圏 (Hom 集合がアーベル群な圏) しか扱わないので、他のアドベントカレンダーの方々のようないわゆるトポスやらロジックよりやら高次圏やらの general な圏論はあまり扱わず、ホモロジー代数的な世界に住んでいます。なので、そのような general な圏論のユーザーの方に、こちら側の世界の、「抽象論と具体論が交わる楽しさ」のようなものを見ていただければ、と思ったのがきっかけになります。また個人的には最近数学をあまりできていないので、論文を書くリハビリという点もあります。

1.3. **注意.** 著者の専門分野であるため、必要以上に細かい具体例や説明を手癖で書いてしまいがちなので、よく分からない例や説明が出たら飛ばして読むことを勧めます。

1.4. **いくつか基礎事項.** アブストに書いたように、想定読者はアーベル圏や加群と言った言葉に少しは慣れていて、厳密な定義は言えなくても何となくイメージが付く人を想定しています。そのあたりを念の為少し recall するところから始めましょう。

**Convention.** 本稿では次を仮定します:

- 圏 $\mathcal{C}$ と言ったら、各対象 $X, Y$ に対する射の集まり $\mathcal{C}(X,Y)$ は集合。
- Grothendieck universe 的な議論は、不必要な煩雑さを避けるため無視・省略。
- 圏 $\mathcal{C}$ が**骨格的に小さい** *(skeletally small)* であるとは、対象の同型類が集合となるものを言う (小圏と同値な圏といってもよい)。
- 部分圏は全て充満部分圏かつ同型で閉じるものとする。
- $\mathcal{A}b$ によりアーベル群のなす圏とする (骨格的に小さくはないことに注意)。
- 環といえば単位的結合的なもので、必ずしも可換とは限らない。
- 加群といえば環が単位的結合的に作用するもので、本稿では右加群を主に扱う。

まず、扱うのはすべて (前) 加法圏です:

**定義 1.1.** 圏 $\mathcal{C}$ に対して、

- $\mathcal{C}$ が**前加法圏** *(preadditive category)* であるとは、各射集合 $\mathcal{C}(X,Y)$ が全てアーベル群の構造を持ち、かつ合成が双線形なものを言う。
- $\mathcal{C}$ が**加法圏** *(additive category)* であるとは、$\mathcal{C}$ が有限直和 (と 0 対象) を持つときを言う。加法圏 $\mathcal{C}$ での対象 $X$ と $Y$ の直和のことを $X \oplus Y$ と表す。

**注意 1.2.** 少し補足。

- 前加法圏とは、豊穣圏を知っている人向けに言うと、単に $\mathcal{A}b$ というモノイダル圏 (モノイダル構造はテンソル積で入る) 上に enrich された圏のことです。
- 加法圏においては有限直和と有限直積は一致します。また始対象と終対象は一致して 0 対象となります。

いくつか典型例を見る:

**例 1.3.**
(1) 前加法圏であり加法圏でないものの典型例として、環 $\Lambda$ が与えられたとき、$\Lambda$ 自身を圏と見れる: 対象は唯一つであり、射集合は $\Lambda$、合成を $\Lambda$ の積とすればよい。逆に、対象が一つの前加法圏は自然に射集合が環となり、対象が一つの前加法圏は環に他ならない。これはモノイドが対象一つの圏と同一視できることと同じである。
(2) 加法圏の典型例として、環 $\Lambda$ に対して右 $\Lambda$ 加群の圏 $\mathsf{Mod}\,\Lambda$ は加法圏です。
(3) これの部分圏として、射影加群の圏や、自由加群の圏、有限生成自由加群の圏、有限生成加群の圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$、有限生成射影加群の圏 $\mathsf{proj}\,\Lambda$、入射加群の圏、ネーター加群の圏など、**有限直和で閉じた $\mathsf{Mod}\,\Lambda$ の部分圏は全て加法圏**です。

次に一応簡単にアーベル圏について紹介します。

**定義 1.4.** 加法圏 $\mathcal{C}$ について次を定義する:

(1) $\mathcal{C}$ が**前アーベル圏** *(preabelian category)* であるとは、任意の $\mathcal{C}$ の射が核 (0 射とのイコライザ) と余核 (0 射とのコイコライザ) を持つことをいう。

(2) $\mathcal{C}$ がアーベル圏であるとは、任意の射 $f$ が $f = i \circ p$ というふうに余核射 $p$ と核射 $i$ の合成で書けるときをいう。

アーベル圏の同値な定義はいろいろあるが省略する。また標準的な議論により、加法圏が前アーベル圏なことと、全ての有限極限と有限余極限を持つことは同値である。

**例 1.5.** 以下はアーベル圏である:

- 環 $\Lambda$ 上の右加群のなす圏 $\mathsf{Mod}\,\Lambda$。
- ネーター環 $\Lambda$ 上の有限生成加群のなす圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ (これは骨格的に小さい)。
- 特に、体 $k$ 上のベクトル空間のなす圏や有限次元ベクトル空間のなす圏。

また以下はアーベル圏とは限らないが前アーベル圏である。

- (有限生成)torsion アーベル群の圏や、(有限生成)torsionfree アーベル群の圏。
- より一般に、デデキント整域 $R$ 上の (有限生成)torsion 加群の圏や (有限生成)torsionfree 加群の圏。
- Krull 次元が 2 以下の正則な可換環 $R$ 上の有限生成射影加群のなす圏。

## 2. 圏の有限性条件

アブストで述べたように、本稿では「ある有限性を満たす圏」がアーベル圏かどうかを組合せ論的に記述できることを紹介します。ここでの有限性条件とは次の 2 つです:

(1) 射集合の有限次元性。つまり圏の射集合が**有限次元ベクトル空間**であること。

(2) 対象全体の有限性。ここでは、**直既約な対象の同型類が有限個しかない**こと。

この 2 つについて詳述していきます。

### 2.1. **Hom 有限な線形圏.** 

**有限次元ベクトル空間の線形代数**は、数学徒がまっさきに（アーベル群や集合論より先に！）学ぶものでありながら、高度な現代数学の様々な分野の中で非常に重要な道具・枠組みとして用いられます。たかだか有限次元の線形代数なんて、と思いがちですが、

- 有限次元 (のようなある程度理解しやすい特殊な) 状況に制限して考えることで、(一般性は失われるかもしれないが) かなり具体的な分析が可能であり、豊かな理論・具体例・記述が得られる！

というのは数学をやる上での一つの大きな指針だと思われます。圏論好きの人は一般論が好きなので、有限次元的な状況に不必要に制限するのは納得いかないかもしれませんが、むしろ「有限次元でいろいろ成り立つことを調べてからそれを一般化していく」という方向性は、地に足が着いていて、また具体例での計算で何となくのイメージができるので、抽象的な圏論を学ぶ上でも重要な立場だと思っています。

長々と前置きを書きましたが、導入する定義はシンプルです:

**定義 2.1.** 体 $k$ に対して、前加法圏 $\mathcal{C}$ が **Hom 有限な $k$ 圏** (*Hom-finite $k$-category*) であるとは次を満たすときいう。

(1) 各対象 $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}(X, Y)$ は**有限次元 $k$ ベクトル空間**である。

(2) 合成はスカラー倍に関しても双線形である。

また、Hom 有限な加法圏のことを **Hom 有限な $k$ 線形圏** (*Hom-finite $k$-linear category*) と呼ぶ。

これは、有限次元ベクトル空間のなすモノイダル圏上に enrich された圏、と言い換えてもよい。

**例 2.2.** 体 $k$ に対して次のような例がある。

(1) 対象が唯一つの Hom 有限な $k$ 圏は、有限次元 $k$ 代数に他ならない: ベクトル空間かつ環であり、積がスカラー倍についても双線形なもののことである。
(2) 有限次元ベクトル空間の圏 $\mathsf{mod}\,k$ は Hom 有限で線形なアーベル圏である。
(3) より一般的に、有限次元 $k$ 代数 $\Lambda$ 上の有限生成加群のなす圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ は Hom 有限な線形アーベル圏である。

では加法圏に有限次元性を課すことでどのような利点があるでしょうか？一つは、「対象が直既約対象の有限直和に一意的な形で表せる」という Krull-Schmidt 型の定理です。これについて軽く説明します。

一般に与えられた圏の構造を解析しようと思ったら、対象をより小さい構成要素へ分解しようとするのは自然な発想であり、圏論的に言うと「対象を、より小さな対象の直和 (coproduct) へと分解する」というものがあります。たとえば有限集合の圏において、「任意の対象は一元集合の有限直和になる」という当たり前のことが成り立ちますが、それの類似を考えるわけです。実際あとで述べるように、加法圏においては直和間の射はそれぞれの直和因子の間の射の行列表示としてかけるので、この分解は射に対しても有効です。

そのため、まずは (直和についての) それ以上分解できないアトム的なものを定義しましょう:

**定義 2.3.** 加法圏 $\mathcal{C}$ における $0$ でない対象 $X$ が**直既約** *(indecomposable)* であるとは、「$X = X_1 \oplus X_2$ がなりたつとき $X_1 = 0$ または $X_2 = 0$」が成り立つときをいう。つまり、それ以上非自明な直和に分解できないような対象である。

**例 2.4.** 例えば体 $k$ 上の有限次元ベクトル空間の圏 $\mathsf{mod}\,k$ において、直既約対象は同型を除いて $k$ ただ一つである。なぜなら有限次元ベクトル空間は、基底を考えれば、必ずその次元分 $k$ を直和したものと同型なので (一年生の線形代数より！)。

このように、直既約対象は「加法圏の対象の最小単位」のようなものであるが、Hom 有限な状況ではより状況がうまくいくというのが前述の Krull-Schmidt の定理である。

**定理 2.5** (Krull-Schmidt の定理)**.** 体 $k$ に対して、*Hom* 有限な $k$ 線形圏 $\mathcal{C}$ が前アーベル圏であるとき、$\mathcal{C}$ の任意の対象 $X$ は

$$X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$$

という各 $X_i$ が直既約であるような直和分解を持ち、この分解は同型と番号の並び替えを除いて一意的である。

**注意 2.6.** 本稿ではアーベル圏のみをほぼ扱うので前アーベルであるという仮定を課したが、この仮定は落とせ、次のような一般化を持つ。

(1) 仮定「前アーベル圏である」を、「任意のべき等射が核を持つ」や「任意のべき等射が余核を持つ」や「任意のべき等射が分裂する (Karoubian)」などにしても成り立ち、この 3 つの条件は同値である（**べき等完備** *(idempotent complete)* **な加法圏**と呼ばれる)。
(2) このような定理がなりたつ圏を *Krull-Schmidt* **圏**と呼ぶ。詳しくは著者の Krull-Schmidt 圏動画シリーズを参照のこと。
(3) 基礎体を固定したうえで考えたが、適切な仮定のもとで、体上ではなく完備ネーター局所環に置き換えてもこの定理は成り立つ。

2.2. **有限型な圏.** 先程の Krull-Schmidt の定理 2.5 を見ると、このような Hom 有限な圏 $\mathcal{C}$ の構造を考えるときには、直既約対象のみを考えれば十分だと予想できる。実際、加法圏において $X_1 \oplus \cdots X_m \to Y_1 \oplus \cdots Y_n$ という直和の間の射は、$X_i \to Y_j$ という射を集めた $n \times m$ 行列で行列表示できることが分かるので、次が成り立つ。

**命題 2.7.** 定理 *2.5* の状況 *(*より一般に *Krull-Schmidt* 圏*)* において、圏 $\mathcal{C}$ の直既約対象の同型類の代表系のなす充満部分圏を $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ とすると *(*この部分圏は同型で閉じないことに注意*)*、$\mathcal{C}$ は $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ から復元することができる。

実際の復元方法としては、$\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ の対象の形式的直和を対象とし、それ上の射を行列として捉えることで、$\mathcal{C}$ と同値な加法圏ができる。だがそんなことしなくても、上に述べた注意から、$\mathcal{C}$ の対象と射の情報は全て $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ に濃縮されていることが分かるだろう。

なので、次に導入するのが自然な有限性は、この「直既約対象が有限個しかない」状況である。

**定義 2.8.** 加法圏 $\mathcal{C}$ が**有限型** *(of finite type)* であるとは、$\mathcal{C}$ の直既約対象の同型類の集合 $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ が有限集合なときをいう。

**注意 2.9.** 一番自然な、圏の対象についての有限性は、「対象の同型類が有限個しかない」かもしれない。しかし加法圏であるので、対象が与えられたら自然数分だけ好きなように直和とれるので、対象の同型類はほとんどの場合無限個である。

**例 2.10.** 次は有限型の加法圏である。

- 体 $k$ に対して、有限次元 $k$ ベクトル空間のなす圏 $\mathsf{mod}\,k$。このとき直既約対象は同型を除いて $k$ のみであり、またその間の射はすべて $k$ のスカラー倍に限られる。この意味で圏 $\mathsf{mod}\,k$ の構造は「完全に理解できている」と言える。一年生の線形代数の大部分は、この圏構造の解析に与えられている (任意の有限次元ベクトル空間は $k$ の有限直和に限られ、その間の射はすべて $k$ のスカラー倍を成分とする行列で必ず表せる)。
- 標数 0 の体 $k$ において、有限群 $G$ の有限次元表現のなす圏 $\mathsf{mod}\,kG$ を考える (群環を知っている人はそれ上の有限次元加群圏と思えば良い、知らなかったら無視してよい)。表現論でよく知られた Maschke の補題により、任意の有限次元表現は半単純となり、単純表現の有限直和に分解する。また単純表現は正則表現の直和因子となり、また圏 $\mathsf{mod}\,kG$ は Krull-Schmidt の定理 2.5 を満たすので、分解の一意性から、単純表現の同型類は有限個しかない (この個数が実は群の共役類の個数に等しいことは、有限群の表現論における一番最初の非自明な結果であろう)。同じことは、一般に有限次元代数上の有限生成半単純加群のなす圏においても成り立つ。

では必要な有限性を述べ終わったあとで、本稿の正確な目標を掲げましょう:

**(目標). 代数閉体 $k$ を固定したとき、Hom 有限で有限型な $k$ 線形圏のうち、アーベル圏なものはどれほどあるかを、組合せ論的に記述する！**

まだ組合せ論パートが何も見えないって？以降それを考えます。

## 3. 圏の生成元と関係式による表示

与えられた代数系を記述するために、非常によくとられる方式が「生成元と関係式によって表示する」です。より厳密にはこれは、「生成元から自由生成された代数系を、関係式がなりたつように割ったもの」として代数系を記述することです。次のような例が有名でしょう:

- **群の表示 (presentation)**。与えられた有限群を、ある文字上自由生成させた群 (自由群) の、関係式に対応する正規部分群での商として表す。たとえば $n$ 次対称群は、$s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}$ と

いう生成元 ($s_i$ は $i$ と $i+1$ を入れ替える互換) と、関係式「$|i-j|>1$ とき $s_is_j=s_js_i$ で、$|i-j|=1$ のとき $s_is_js_i=s_js_is_j$ で、$s_i^2=1$」による表示を持つことが知られています。

- **体上の可換 $k$ 代数の、生成元と関係式による表示**。ここでは、ある集合上自由に可換 $k$ 代数を作ればそれはその集合の元を自由変数に持つような多項式環になるので、代数を生成元と関係式で表示することは、この場合は「可換 $k$ 代数を多項式環のイデアル商として記述する」ことに他なりません。特にこの代数が生成元が有限の場合 (有限生成代数の場合) は、よく知られた「多項式環はネーター環である」という定理から、関係式 (= イデアルの生成元) は有限個で取れることが分かったりもします。

(小) 圏も、部分的に合成という演算が定義された代数系だと思うことができます。なので自然に生成元と関係式による表示が出来ないか考えるのは自然ですが、上の例はすべて「演算についての逆元がある」ため商を取ることが簡単にできます (つまり群は逆元があるので部分群で割れるが、単なるモノイドは部分モノイドで割る操作をしにくい) (環はイデアルで割れるが半環は割りにくい)。よって、一般に圏を生成元と関係式で表示することがどれほど意味を持つのか著者はよく知りませんが、「加法圏なら射集合の中でマイナスがあるので割れる！」という発想ができ、実際に加法圏を生成元と関係式で表示することはかなりの状況で可能です (実際に、環を加法圏だと思えるように、加法圏においてもイデアルが定義できてそれで割って加法圏を得ることができます)。

でもまずは簡単のためイメージしやすい小圏でやりましょう。圏論を学びはじめの方が、何の役に立つんだと思いながら次のような有限圏の例を見たことがあるでしょう:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "b"'] & 2 \arrow[d, "c"] \\ & 3 \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

ここで恒等射は略しています。また 1 から 3 に合成射 $ca$ と $cb$ がありますが、それは異なったものだと思っています。もちろん $ca=cb$ なる場合もあるのですが、その場合は「上のグラフを生成系とし、$ca=cb$ という関係式を持つ圏」だと解釈できます。このように「圏を生成元と関係式による表示」をすることを考えていきます。つまり与えられた圏を、「最小生成系たる有向グラフ」を「関係式」で割ったものと考えたいわけで、具体的に次のようにやります:

(1) **対象について**: 圏の対象のなかで、それ以上分割不可能なものを頂点とする
(2) **射について**: 射のなかで、それ以上「分割不可能」なものを矢とする
(3) 与えられた圏は、上でできた有向グラフから自由に生成される圏上に、射についての関係式を入れて割ったものだと思える (といいな)

厳密な議論はあとで書きますが、このようにして**圏を有向グラフを用いて表す**ことができます。次の用語がわりと今は一般的です:

**定義 3.1.** $Q$ が**箙 (quiver)** であるとは、有向グラフであるときをいう (多重辺やループを許す)。厳密には、頂点集合 $Q_0$ と「矢」の集合 $Q_1$ と、矢の始点と終点を表す写像 $s,t\colon Q_1\to Q_0$ の組のことをいう。

上の図 (3.1) は実際は圏の図というより箙の図という方が良い。そして箙があれば、自由に合成や恒等射を付け加えることで、**自由圏**と呼ばれるものを作れる。しかし本稿の主目的は体 $k$ 上の加法線形圏であったので、次の定義が自然である。

**定義 3.2.** 有限箙 $Q$ に対して、**道圏** $k[Q]$ **(path category)** とは以下で定義される $k$ 圏である:

- $k[Q]$ の対象は $Q$ の頂点。
- 頂点 $i$ から $j$ への射は、$i$ から $j$ への道全体の集合を考え、それを基底とする $k$ ベクトル空間。
- 合成は、道をつなげる操作を線形に拡張したもの。

例えば上の箙上の道圏は、対象が $1,2,3$ の 3 つ、例えば 1 から 3 への射集合は $ca$ と $cb$ を基底とする二次元のベクトル空間である (例えば $2ca - 3cb$ なども 1 から 3 への射としてある)。「この圏は直和ができないので加法圏じゃないじゃないか！」とツッコミが入るかもしれないが、命題 2.7 の同一視があるので、対象を 1 と 2 と 3 の (形式的) 有限直和、射を行列で定義することで Hom 有限な線形圏ができる。**以下簡単のため、このように、箙からできる道圏とそれに対応する加法圏を同一視する。**

また箙からは、次のように自然に有限次元代数が与えられる:

**定義 3.3.** 有限箙 $Q$ に対して、**道代数** $kQ$ とは以下で定義される $k$ 圏である。
- $kQ$ はベクトル空間として、$Q$ 上の道全体を基底として持つ。
- 積は、道が繋げられるときは道をつなげ、そうでないときは 0 と定めたものを、線形に拡張する。

先程の道圏との類似性に注意されたい。実は、**道圏を加法圏と思ったものは、有限生成射影的 $kQ$ 加群の圏と同じ**ことが知られている。より正確には、$kQ$ と $k[Q]$ は加群圏が同値である、つまり森田同値であることが知られている。このことと関連して次も重要である:

**命題 3.4.** *有限箙 $Q$ に対して、有限次元 $kQ$ 加群のなす圏は、$Q$ の有限次元表現のなす圏と等しい。ここで $Q$ の有限次元表現とは、$Q$ から有限次元ベクトル空間の圏への関手 ($Q$ は圏ではないが) のことである。*

### 3.1. Hom 有限線形圏の箙表示.

**以下 $k$ を代数閉体とする。**上で述べたように、与えられた箙に対して道圏を取ることで線形圏ができたが、実は**任意のべき等完備な Hom 有限な線形圏 $\mathcal{C}$ に対して、その「最小生成系」たる箙 $\mathsf{Q}(\mathcal{C})$ を決める自然な方法が存在する。**この節ではこのような $\mathcal{C}$ を固定して、$\mathsf{Q}(\mathcal{C})$ の構成を軽く見ていく。べき等完備の仮定は技術的に見えるかもしれないため、各自「べき等完備」の仮定を前アーベル圏や、もしくはもっと制限して、有限次元代数 $\Lambda$ についての有限生成加群の圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ を $\mathcal{C}$ だと読み替えればよい。

**注意 3.5.** この節以降の内容は $k$ が代数閉体でないと、基礎体の有限拡大なども絡んで状況は複雑だが、適当に箙の概念を拡張してやれば同じ論理がなりたつ。

大雑把な考え方は既に上で見ている。つまり、対象についても射についても「それ以上分解できないもの」を箙に書けばよいのである。前アーベルな Hom 有限線形圏 $\mathcal{C}$ は Krull-Schmidt の定理 2.5 が成り立つため、「対象についての最小構成要素は直既約対象」なことに異論はないであろう。なので $\mathsf{Q}(\mathcal{C})$ の頂点集合は $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$、つまり直既約対象の同型類と定めれば良い。

問題は、射についてである。$\mathsf{Q}(\mathcal{C})$ にはどのような矢を描くべきだろうか。$\mathcal{C}$ の直既約対象、つまり $\mathsf{Q}(\mathcal{C})$ の 2 つの頂点 $X$ と $Y$ の間に何本矢を書くべきかを考えよう。

(1) $X \neq Y$ のとき。もし $\mathcal{C}$ において $\mathcal{C}(X,Y) = 0$ ならもちろん $X$ から $Y$ へは矢を書く必要がない。では $\mathcal{C}(X,Y) \neq 0$ の場合、「何も矢を書かないと、$X$ と $Y$ の間には道圏を作ったときに射がなくなる」ように思えるかもしれない。しかし先程の図 (3.1) の 1 と 3 は矢が無いが、道圏を作るとそこでは $ca$ と $cb$ という 2 次元分の射ができる。なので図 (3.1) において 1 から 3 に矢がないのは「1 から 3 への射は、全て他の非同型な射の 2 つ以上の合成の線形和でかける」からだと推測つく。なので、**0 でない射のうち、他の 2 つの射の合成の線形和を用いて書けないものの個数**だけ矢を書けば良さそう。

(2) $X = Y$ のとき。つまり $X$ から $X$ に何本矢を書くべきかを考える。まず、何も矢を書かなくても、道圏を作った時点で「恒等写像とその $k$ のスカラー倍」は自動的に入るので、これらは書かなくて良い。なので、$\mathcal{C}(X,X)$ **のうち、スカラー倍で書けないものの個数**だけ矢を書けばよさそう。

上のように何となく推測できるが、厳密に太字の部分をどのように定式化すればよいのだろうか？ここで重要なのが次に導入する圏 $\mathcal{C}$ の **Jacobson 根基** $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ である。

**定義 3.6.** $\mathcal{C}$ をべき等完備な Hom 有限線形圏とする。

(1) $\mathcal{C}$ の直既約対象 $X$ と $Y$ に対して、

$$\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(X,Y) := \{f\colon X \to Y \mid f \text{ は非同型 }\}$$

で定義する。特に $X$ と $Y$ が非同型なとき $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$ である。

(2) 直既約と限らない対象 $X$ と $Y$ に対しては、

$$\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(X,Y) := \{f\colon X \to Y \mid X, Y \text{ を直既約分解して } f \text{ を行列表示したとき各成分が全て非同型 }\}$$

で定義する。

(3) 直既約対象 $X$ と $Y$ に対して、

$$\mathcal{J}^2_{\mathcal{C}}(X,Y) := \{\sum_i f_i \circ g_i \mid f_i \text{ と } g_i \text{ は } \mathcal{J} \text{ に入る射 }\}$$

で定義する。恒等射を考えれば $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(X,Y) \supset \mathcal{J}^2_{\mathcal{C}}(X,Y)$ に注意。

**例 3.7.** $Q$ を次の箙とし、$\mathcal{C} := k[Q]$ を道圏（に対応する加法圏）とする:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, "e"] & 2 \arrow[d, "b"] \\
3 \arrow[r, "d"'] & 4
\end{tikzcd}$$

このとき次が成り立つ:

- まず 1 と 2 と 3 と 4 は全て非同型である。なぜなら数字の大きい方から小さい方へは道が無いので射が 0 しかないから。
- $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(1,4) = \mathcal{C}(1,4)$ は $ba, dc, e$ の三つを基底とする三次元ベクトル空間である。
- $\mathcal{J}^2_{\mathcal{C}}(1,4)$ は $ba, dc$ の二つを基底とする二次元ベクトル空間である。
- $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(1,2)$ は $a$ を基底とする一次元ベクトル空間である。
- $\mathcal{J}^2_{\mathcal{C}}(1,2) = 0$ である。なぜなら $a$ を二つの射に分けようとしても、$a \circ \mathsf{id}_1 = \mathsf{id}_2 \circ a = 2a \circ (1/2)\,\mathsf{id}_1$ などのように、どちらかに同型射が出てきてしまうから。
- $\mathcal{C}(1,1)$ は $\mathsf{id}_1$ を基底に持つ一次元ベクトル空間だが、$\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(1,1) = 0$ となってしまう (1 から 1 への射は全て恒等射のスカラー倍なので、非同型なものは 0 射しかないので)。

上を見て何となく察せられたように、$\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ は「非自明な射の集合」で、$\mathcal{J}^2_{\mathcal{C}}(X,Y)$ はそのうち「二つの射に合成に分解できるもの」である。さらに次が成り立つことが分かる:

**命題 3.8.** *べき等完備な Hom 有限線形圏 $\mathcal{C}$ 上の対象 $X, Y$ に対して次が成り立つ:*

(1) $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ と $\mathcal{J}^2_{\mathcal{C}}(X,Y)$ は $\mathcal{C}(X,Y)$ の有限次元部分空間である。

(2) $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(X,X) \subset \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ は環 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ の *Jacobson* 根基と一致する。

(3) $X$ が直既約であることと $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ が局所環 *(*唯一の極大右イデアルを持つ*)* ことは同値であり、このとき $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(X,X)$ が $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ の唯一の極大右イデアルであり唯一の極大左イデアルである。$k$ が代数閉体の場合は、$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)/\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(X,X)$ は $k$ に一致する。

意味するところを見ていこう。$\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ の定義すぐからは、$\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ が和について閉じているかが怪しいが、実は部分空間になっているというのが (1) である。(2) は環の根基を知らない人は飛ばしてよいが、$\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ が圏の Jacobson 根基と呼ばれる所以である。(3) は、直既約性が自己準同型環から特徴づけられることを言っており、さらに代数閉体の場合は $X$ の自己準同型は、非同型射の部分 $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(X,X)$ を除いて考えれば自己準同型は恒等写像のスカラー倍しかないことを言っている。

**注意 3.9.** より一般に次のようなことが言える。

- 上での $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ は加法圏 $\mathcal{C}$ の両側イデアルの典型例である。これは、$\mathcal{C}(-,-)\colon \mathcal{C}^op \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{A}b$ という双加法的関手の部分関手として定義される (普通の環の場合と同じだね)。
- ここで採用した Jacobson 根基の定義は、実は Krull-Schmidt 圏の場合しかうまくいかない。一般の加法圏の場合には、$\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(-,X)$ という関手を $\mathcal{C}(-,X)$ の極大右部分加群の共通部分として定義するか、その双対か、ある射についての恒等式 (環の Jacobson 根基の場合と同じような) か、「単純右 $\mathcal{C}$ 加群の annihilator」などで定義する (どれも環の場合の自然な類似である)。
- 基礎体が代数閉体を仮定したのは、そうすると $X$ が直既約対象のとき $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)/\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(X,X)$ は $k$ 上有限次元加除環なので $k$ に一致し、よって「自己準同型のうち同型なもの」が恒等写像のスカラー倍しかないことが成り立つより採用した。そうでない場合は、直既約対象ごとにこの (斜) 体が別のものが出てくる場合があり、うまく下で定義するような道圏による表示がうまくいかない。

以上から、与えられたべき等完備な Hom 有限線形圏 $\mathcal{C}$ に対して、箙 $\mathsf{Q}(\mathcal{C})$ を次で定義すれば良さそうである:

**定義 3.10.** 代数閉体 $k$ 上べき等完備な Hom 有限線形圏 $\mathcal{C}$ に対して、有限箙 $\mathsf{Q}(\mathcal{C})$ を次で定める:

- $\mathsf{Q}(\mathcal{C})$ の頂点集合は $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$、つまり $\mathcal{C}$ の直既約対象の同型類。
- 二つの直既約対象 $X$ と $Y$ の間に矢を、$\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(X,Y)/\mathcal{J}^2_{\mathcal{C}}(X,Y)$ の $k$ 上の次元分だけ書く。

これは稀に $\mathcal{C}$ の **Auslander-Reiten 箙**と呼ばれる。$\mathcal{C}$ が有限型であることと $\mathsf{Q}(\mathcal{C})$ の頂点が有限個なことは同値である。また $\mathcal{C}$ は Hom 有限なので $\mathsf{Q}(\mathcal{C})$ の二つの頂点の間の矢は有限個しかないことに注意。

その心は、$X$ から $Y$ には非自明な射つまり $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ にいる射を書きたいが、もちろんスカラー倍いくらでもできるので $k$ 上の次元分だけしか書かないのは当然だが、そのなかで「他の非自明な二つの射の合成」で書ける分は省きたいわけである（最小生成系にするため)。なので「」に対応する $\mathcal{J}^2_{\mathcal{C}}(X,Y)$ で割って、その次元を書く。

**注意 3.11.** この構成は、可換環論をやっている人はどこかで見たはずである。つまり局所環 $(R,\mathfrak{m})$ に対して、有限生成加群 $M$ の極小生成系は $M$ を $\mathfrak{m}M$ で割ったことで得られる。上の状況の類似では、今やりたいことは環 $R$ 自身を「表示」することで、同型射の部分は $R/\mathfrak{m}$ という剰余体で書けるが、非同型射の部分は極大イデアル (=Jacobson 根基) $\mathfrak{m}$ の極小生成系をとることで、これは $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ の $k$ 上の次元分だけの個数で書ける。余談だが著者はむしろ上の圏についての表示 ($J/J^2$ という圏のイデアルを考える) ことを先に知ったので、そこからすると可換環で $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ が出てくるのは自然に思えた。

これは実際に圏の極小系に次の意味でなっている:

**命題 3.12.** 代数閉体 $k$ 上べき等完備な *Hom* 有限線形圏 $\mathcal{C}$ に対して、その箙を $Q := \mathsf{Q}(\mathcal{C})$ と置くと、加法的関手 $k[Q] \to \mathcal{C}$ が存在し、これは対象について本質的全射かつ射についても充満であり、適切な意味で「それ以上小さくできない全射」である。また実際この関手は、ある $k[Q]$ の両側イデアル $I$ を用いて、$k[Q]/I \simeq \mathcal{C}$ という圏同値を誘導する。

**例 3.13.** 次の箙 $Q$ を考える:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{a} & 2 \\ {\scriptstyle c}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ 3 & \xrightarrow[d]{} & 4 \end{array}$$

この上で次の構成で得られる加法圏 $\mathcal{C}$ を考える。以下の構成は全て同じ圏を与える。

- $Q$ 箙からできる道代数 $kQ$ を、$ba-dc$ という元で生成される両側イデアルで割った代数 $\Lambda := kQ/<ba-dc>$ を考え、有限生成射影的 $\Lambda$ 加群のなす圏。
- 上の図を poset だと思い (すなわち $1<2<4$ と $1<3<4$ という半順序が入った四元順序集合)、それ上の隣接代数 (incidence algebra) をとるとそれは $\Lambda$ と一致する。それについて上と同じく有限生成射影 $\Lambda$ 加群の圏をとる。
- 次のような、$4\times4$ の行列環 $M_4(k)$ の部分環を考える:

$$\begin{bmatrix} k & k & k & k \\ 0 & k & 0 & k \\ 0 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

  これは積について閉じていることが簡単に確認でき、有限次元代数になる (実は上の $\Lambda$ と一致する)。なので同じく有限生成射影 $\Lambda$ 加群の圏をとる。
- こんどは環を作らない。上の箙を「加法圏の可換図式」を表していると見よう。つまり、対象が $1,2,3,4$ の 4 つからなり、$ba=dc$ という等式が成り立っているような前加法圏を考え、それに対応する加法圏をとる (命題 2.7 のあとの構成を参照)。

これらの操作で出来た (全て同じ) 加法圏について、箙を考えると、それは上の箙と同じになる。さらに、想像される通り、この加法圏は道圏 $k[Q]$ を $ba-dc$ という射 $1\to4$ で生成される、圏の両側イデアル $<ba-dc>$ で割った圏 $k[Q]/<ba-dc>$ と圏同値になる。**これは加法圏を、生成元 $Q$ と関係式 $ba-dc$ で表示している！**

**例 3.14.** 上の例は取ってつけたような例だったので、もっと非自明な例を考えよう。上の例でできた有限次元代数 $\Lambda$ に対して、有限次元 $\Lambda$ 加群の圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ を考える（この圏は、「有限次元ベクトル空間の中で、上記 $Q$ のような形をした可換な四角形のなす圏」である！）。これは Hom 有限な線形圏になるが、実は $\mathsf{Q}(\mathsf{mod}\,\Lambda)$ は次のようになる:

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dr] & & 5 \arrow[dr] & & 9 \arrow[dr] & \\
1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 4 \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 6 \arrow[r] & 8 \arrow[ll, dashed, bend right] \arrow[ur] \arrow[dr] & & 11 \arrow[ll, dashed] \\
 & 3 \arrow[ur] & & 7 \arrow[ur] & & 10 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

実際、圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ は、「上の箙に、左右二つの四角形の可換性と、真ん中の 4 から 8 への長さ 2 の三つの道を足すとゼロ、という関係式を入れた圏」に圏同値になる！点線は今はこれらの関係式を表してると思ってよいが、後の主結果で重要な役割を果たす。
このように、与えられた有限次元代数 $\Lambda$ について $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の構造や表示を考える分野を**多元環の表現論**といい、それを学べば上のようなお絵かきで遊べる！

**例 3.15.** もっと簡単な例。$2\times2$ 行列環の部分環 $\Lambda := \begin{bmatrix} k & k \\ 0 & k \end{bmatrix}$ を考える (この環は $1\to2$ という箙の道代数と同型である)。これ上の有限次元右加群のなす圏は次のように書ける:

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{bmatrix} k & k \end{bmatrix} \arrow[dr] & \\
\begin{bmatrix} 0 & k \end{bmatrix} \arrow[ur] & & \begin{bmatrix} k & 0 \end{bmatrix} \arrow[ll, dashed]
\end{tikzcd}$$

ここで環の右作用は、行列を右から掛け算することで定義される。実際 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ は、上の箙上の道圏を、「二つの矢を合成したら 0 になる」という関係式で割った圏と見れる。

上の例二つにおける $\mathsf{mod}\,\Lambda$ は、ちょうど「Hom 有限な有限型線形圏でありアーベル圏であるもの」の例になっている。しかし有限次元代数 $\Lambda$ に対して $\mathsf{mod}\,\Lambda$ が必ず有限型とは限らない:

**例 3.16.** $1 \rightrightarrows 2$ という箙上の道代数 $\Lambda$ を考える。これ上の有限次元加群の圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ は、実は**直既約対象の同型類が無限個存在する！**ので、絵に書きづらい。(この場合は書けて、*Kronecker algebra, Auslander-Reiten quiver* などで調べれば出てくるので見てみるとよい)。このように、Hom 有限なアーベル圏の典型例として有限次元代数 $\Lambda$ 上の有限次元加群の圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ があるが、これは「直既約対象が無限個あるときと有限個あるときがある！」。有限個のときが本稿で調べたいものである。

**注意 3.17.** 有限箙 $Q$ 上の道代数 $kQ$ に対して $\mathsf{mod}\,kQ$ が直既約対象が有限個しかないことと、$Q$ の underlying graph が Dynkin graph の disjoint union であることが同値であることが知られている (Gabriel の定理)。さらにこのとき $\mathsf{mod}\,kQ$ の直既約対象は、対応するルート系の正ルートの集合と一対一対応がある。

導入では本稿の目的は「ある有限性を満たすアーベル圏」を考えるということだったが、実はこれは有限次元代数の加群圏を考えることと同じである:

**定理 3.18.** $\mathcal{C}$ を *Hom* 有限なアーベル線形圏とする。もし $\mathcal{C}$ が有限型だとすると、$\mathcal{C}$ は十分豊富な射影的対象を持ち、さらにある有限次元代数 $\Lambda$ を用いて $\mathcal{C} \simeq \mathsf{mod}\,\Lambda$ とかける。

なのでこのようなアーベル圏を考えることは実は次のような環を考えることと同じである:

**定義 3.19.** 有限次元代数 $\Lambda$ が**有限表現型 (representation-finite)** であるとは、有限次元加群のなす圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ が有限型なとき、すなわち有限次元直既約 $\Lambda$ 加群の同型類が有限個しかないときをいう。

本稿では表現論的な見方というよりはアーベル圏的な見方をするので、あまり触れはしないが、こうして我々は有限次元代数の表現論 (= 有限次元代数上の加群のなす圏を調べる分野) に導かれたわけである。

## 4. 主結果

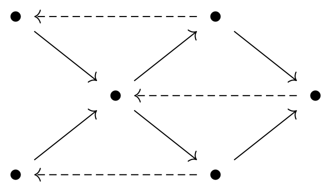
前の節で、Hom 有限で有限型な線形アーベル圏の例として、有限次元代数 $\Lambda$ に対して $\mathsf{mod}\,\Lambda$ という例を二つほど出した。そこで出てきた箙 $\mathsf{Q}(\mathcal{C})$ は、ちょっと似たような形をしていた。ここでまず主結果がどのようなタイプの結果かを予告しよう:

**(目的). 与えられた箙 $Q$ が、ある Hom 有限で有限型な線形アーベル圏 $\mathcal{C}$ に対して $\mathsf{Q}(\mathcal{C}) = Q$ となるような $\mathcal{C}$ が存在するときは、どのようなときか。それを判別する箙についての組合せ論的条件を求めよ。**

実は箙だけではこのような判別はできない。なぜなら、箙 $\mathsf{Q}(\mathcal{C})$ は「$\mathcal{C}$ の生成元」という情報を持っているが「$\mathcal{C}$ の関係式」についての情報は持っていないからである。しかし、これまでの例や下の例を見ていくとなんか関係式は一定の決まった形をしていそうである:

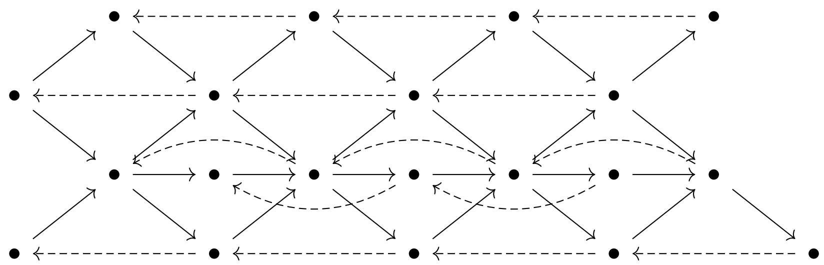
**観察 4.1.** いくつかの Hom 有限な線形アーベル圏を他に見よう。点線は関係式を表していて、あとで述べる。

(1)



これは $\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet$ という箙の道代数上の有限次元加群の圏、またはこの箙の有限次元表現の圏である。

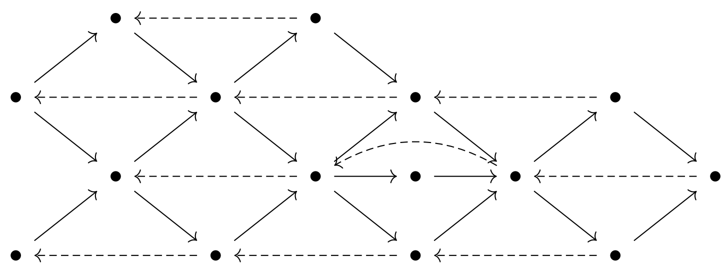
(2)



これは次の箙上の道代数の圏、またはこの箙の有限次元表現の圏である。

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr] & & & \\
& \bullet \arrow[dl] \arrow[r] & \bullet & \bullet \arrow[l] \\
\bullet & & &
\end{tikzcd}$$

(3)

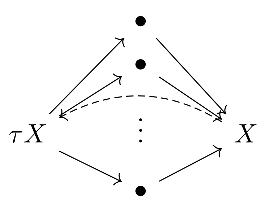


これは次の箙

$$\begin{tikzcd}
& 5 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
3 \arrow[dr] & & 4 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
& 1 & & 2
\end{tikzcd}$$

上の道代数に、四角が可換で $5 \to 4 \to 2$ が $0$ になるという関係式を入れた代数上の有限次元加群の圏、またはそのような関係式を満たす箙の有限次元表現の圏である。

ここで上の例において、点線の矢印は次のように関係式を表している:




(4.1)

点線矢印の付近がこのような格好をしてるとき、関係式は「$\tau X$ から $X$ へ向かう上の図での長さ 2 の道を全て足したらゼロ」というものである (これを**メッシュ関係式**と呼ぶ)。この関係式を全ての点線に対して考える。

これまで見てきたように、アーベル圏 $\mathcal{C}$ の生成元と関係式による表示では上の図の「メッシュ」が積み重なったような形をしている！

**注意 4.2.** このようなアーベル圏におけるメッシュは、実はアーベル圏での短完全列を指している。先程の一般的なメッシュの場合は、

$$0 \to \tau X \to \bullet \oplus \bullet \oplus \cdots \oplus \bullet \to X \to 0$$

というふうに。なので、点線があったときの「長さ 2 を全て足したらゼロ」というのはこの完全列において射を二つ合成したらゼロなことと対応している！
アーベル圏における短完全列は他にもいっぱいあり得るが、このようなメッシュで出てくる完全列はある意味で「分裂していない中で最小な完全列」と思えて、**Auslander-Reiten 列, 概分裂列 (almost split sequence)** などと呼ばれる。ちなみにこれは純圏論的に、「アーベル圏 $\mathcal{C}$ における単純 $\mathcal{C}$ 加群 ($= \mathcal{C}$ 上の $\mathcal{A}b$ 値前層のなすアーベル圏のなかで単純なもの) の極小射影分解」と対応している。このように圏上の加群を考えるとこれらの概念は自然と出てくるのだが、本稿の主題から外れるので詳しくは書かない (Auslander が発展させた「functorial method in representation theory」だということだけ述べておこう)。

とりあえず、なんかアーベル圏を生成元と関係式で表示する際には「点線つきの箙」を考えるのが良さそうだ。これを組合せ論的に正確に定義しよう。

**定義 4.3.** 箙 $Q$ の頂点集合を $Q_0$ と書く。$(Q, \tau)$ が**移動箙 (translation quiver)** であるとは次のときをいう:

- $\tau$ は、$Q_0$ のある部分集合 $P$,$I$ に対して $\tau\colon Q_0 \setminus P \xrightarrow{\simeq} Q_0 \setminus I$ という全単射である (つまり $\tau$ は $Q_0$ のある部分集合の間の全単射である)。
- $X \in Q_0$ に対して $\tau X$ が定義されるとき (つまり $X \notin P$ のとき)、任意の $Y \in Q_0$ に対して、「$\tau X$ から $Y$ への矢の本数」と「$Y$ から $X$ への矢の本数」は等しい (ゼロ本の場合も含む)。これはつまり、$\tau X$ から $Y$ へ矢があることと $Y$ から $X$ へ矢があることが同値で、その本数は等しい)。

移動箙を図に表すときは、$X$ から $\tau X$ へ点線の矢印を描くことで $\tau$ を図示するものとする。

この定義により、上で出てきた点線付きの図は全て移動箙の図だと思うことができる。(矢の本数についての条件は、ちょうど点線がメッシュをなしていることに対応している)。このとき、次のように有限的なアーベル圏に対して移動箙を定めることができる。

**命題 4.4.** $\mathcal{C}$ を $Hom$ 有限な線形アーベル圏で、有限型なものとする。また既に定義した箙 $Q := \mathsf{Q}(\mathcal{C})$ に対して、$P, I \subset Q_0$ をそれぞれ「直既約な射影的対象」「直既約な入射的対象」に対応する頂点とする。このとき次が成り立つ。

- ある $\tau\colon Q_0 \setminus P \to Q_0 \setminus I$ という全単射が存在する、つまり $\mathcal{C}$ における直既約非射影的対象と直既約非入射的対象の間には全単射が存在する。
- この $\tau$ によって $(Q, \tau)$ は移動箙の構造を持つ。
- 直既約非射影的対象 $X$ に対して、次のような短完全列

$$0 \to \tau X \to Y_1 \oplus Y_2 \oplus \cdots \oplus Y_n \to X \to 0$$

が存在して、このときに出てくる $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ はちょうど、$Q$ において $X$ へ矢があるもの *(*$= \tau X$ から矢があるもの*)* になっている。

では、このような圏 $\mathcal{C}$ に対して移動箙 $\mathsf{Q}(\mathcal{C})$ は、もとの $\mathcal{C}$ の構造をどれだけ持っているのだろうか？実は $\mathcal{C}$ の関係式が $\mathsf{Q}(\mathcal{C})$ におけるメッシュ関係式になっているかどうかは非常に微妙な問題だが、次が知られている:

**定理 4.5** ([BGRS]). $\mathcal{C}$ を *Hom* 有限な線形アーベル圏で有限型とする。もし体 $k$ の標数が 2 でない場合は、$\mathcal{C}$ は生成元 $\mathsf{Q}(\mathcal{C})$ と、その移動箙におけるメッシュ関係式による表示を持つ。つまり $\mathcal{C}$ は $\mathsf{Q}(\mathcal{C})$ 上の道圏を、メッシュ関係式で割ったような圏になっている。

これは非常に微妙で難しい定理だが、移動箙の組合せ論的構造から本当に完全にアーベル圏が復元できることを主張していて、ヤバい (著者は証明をフォローしたことがないが、非常に長く複雑で難しいということで有名である)。でも、標数や難しい上の定理を使わずとも、本質的全射 $k[\mathsf{Q}(\mathcal{C})] \twoheadrightarrow \mathcal{C}$ があるのは確かで、さらに次のような $\mathcal{C}$ についてのほとんど全ての情報は $\mathsf{Q}(\mathcal{C})$ に埋め込まれていることが分かる (すなわち移動箙についての純組合せ論的な操作だけで次を求めることができる)

- 二つの対象のあいだの Hom が何次元分あるか、特に Hom が消えているか消えていないか。
- 射影対象・入射対象がどこの頂点に対応するか (ちょうど $\tau$ の非定義域が射影対象に対応するため)。
- 二つの対象のあいだの射は全て道圏における道の線形和で必ず書けている。
- 単純対象がどこの頂点に対応するか。
- 与えられた対象の射影分解など。

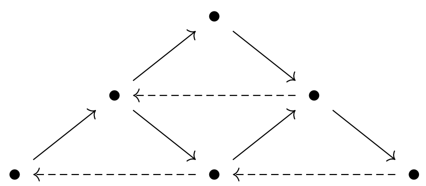
まあ、ほとんどの圏の情報は移動箙の組合せ論的な情報に思えばよい。

4.1. **Igusa-Todorov の結果.** 本稿での主結果を紹介するときが来た (複雑な組合せ論的条件は省くので、何も言ってないじゃないかとは言わないで)。

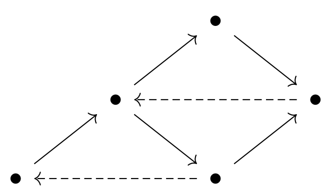
**定理 4.6** ([IT]). 与えられた有限移動箙 $Q$ に対して、$Q$ がある *Hom* 有限な有限型アーベル圏 $\mathcal{C}$ に対する移動箙 $(\mathsf{Q}(\mathcal{C}), \tau)$ と同型であるかどうかを判定する、有限回で終わる純組合せ論的なアルゴリズムが存在する。

**系 4.7.** 移動箙をとる対応によって、「*Hom* 有限な有限型アーベル圏の圏同値類」から「ある純組合せ論的条件を満たす有限移動箙」への全射が存在する。先の [BGRS] の定理 *4.5* を使うと、体 $k$ が標数 2 でないとき、「*Hom* 有限な有限型アーベル圏の圏同値類」と、「ある純組合せ論的条件を満たす有限移動箙」は一対一対応がある。

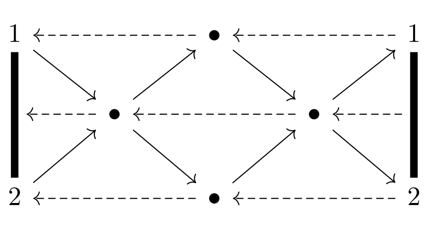
**例 4.8.** アーベル圏になる例やならない例を少し。



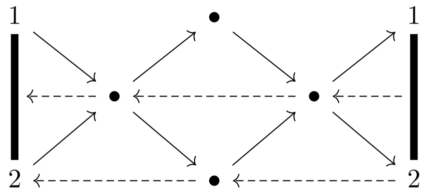
これはアーベル圏。



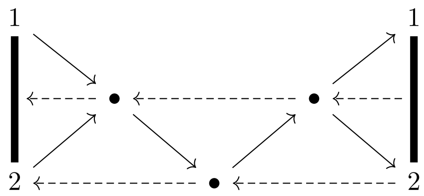
これはアーベル圏ではない。



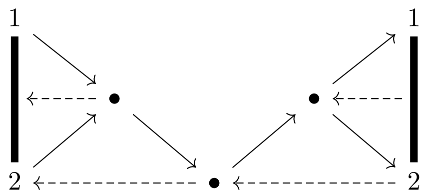
これはアーベル圏でない (左右の太い縦線や 1, 2 は同一視されて、円柱上の絵だと思ってください)



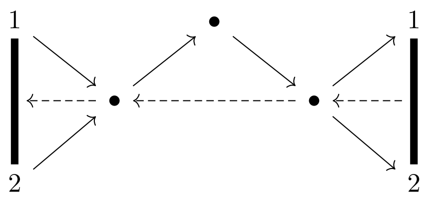
これはアーベル圏。



これはアーベル圏でない。



これはアーベル圏。



これはアーベル圏でない。

4.2. **Auslander 対応.** 組合せ論的条件と圏論的条件の対応は既に見たが、それの考えで重要な **Auslander 対応**について軽く紹介して本稿を終わりとする。

まず、本稿で考えたような有限的な圏は、実は有限次元代数と一対一対応している:

**命題 4.9.** *次の二つの間には一対一対応がある:*

(1) *$Hom$ 有限で有限型なべき等完備な線形圏 $\mathcal{C}$ (の圏同値類)*
(2) *有限次元代数 $\Gamma$ (の森田同値類)*

*対応は、(1) の圏 $\mathcal{C}$ に対して直既約対象を全て直和したものを $G$ として $\Gamma := \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(G)$ を取ることで (2) ができ、(2) の代数については有限次元射影加群のなす圏として (1) を取る。さらに $\mathcal{C}$ と $\Gamma$ が対応するとき、$\Gamma$ 加群の圏と、$\mathcal{C}$ 加群の圏 (= $\mathcal{C}$ 上 $\mathcal{A}b$ 値前層のなす圏) は同値である。*

この視点は、有限型の圏を考えるという「圏論的な性質のもの」と、代数を考えるという「加群論的・表現論的」なものが関係するという意味で、次の疑問が出てくる:

**Question 4.10.** *$\mathcal{C}$ と $\Gamma$ が上で対応するとき、次の二つはどう関係するか?*

(1) *$\mathcal{C}$ の持つ圏論的性質 (アーベル圏であるなど)*
(2) *$\Gamma$ のもつホモロジー代数的性質 (ホモロジー次元の有限性など)*

これについて考えるときに、次の観察は大事である。

**命題 4.11.** $\mathcal{C}$ をべき等完備な加法圏とすると、米田埋め込み $X \mapsto \mathcal{C}(-,X)$ は $\mathcal{C}$ と有限生成射影的右 $\mathcal{C}$ 加群の圏との圏同値を与える。とくに、$\mathcal{C}$ が有限型で $\Gamma$ が上で $\mathcal{C}$ と対応するもののとき、$\mathcal{C}(G,-)\colon \mathcal{C} \to \mathsf{mod}\,\Gamma$ という関手は $\mathcal{C}$ と有限生成射影的 $\Gamma$ 加群との圏同値を与える。

これに関して簡単に分かることとして、例えば次のような対応がある。

**命題 4.12.** $\mathcal{C}$ と $\Gamma$ を上で対応するものとする。このとき $\mathcal{C}$ が前アーベル圏であることと、$\Gamma$ の大域次元が 2 以下 *(= 任意の $\Gamma$ 加群の射影次元が 2 以下)* なことは同値である。

**証明.** $\Gamma$ 加群の圏と $\mathcal{C}$ 加群の圏を同一視する。
まず $\mathcal{C}$ が前アーベル圏だとする。任意の有限次元 $\mathcal{C}$ 加群 $M$ は $\mathcal{C}(-,Y) \to \mathcal{C}(-,Z) \to M \to 0$ が完全になるように有限表示ができる。米田の補題より対応する $\mathcal{C}$ の射 $Y \to Z$ をとり、その核を $0 \to X \to Y \to Z$ とすれば、米田埋め込みは左完全より、$0 \to \mathcal{C}(-,X) \to \mathcal{C}(-,Y) \to \mathcal{C}(-,Z) \to M \to 0$ が完全、よって $M$ の射影次元は 2 以下。
逆も同様なので省略する。 □

アーベル圏であるという条件は前アーベル圏よりかなり複雑だが、次のような対応があり、**Auslander 対応**と呼ばれる。

**定理 4.13.** $\mathcal{C}$ と $\Gamma$ が上で対応するとき、$\mathcal{C}$ がアーベル圏であることと、$\Gamma$ の大域次元が 2 以下かつ支配次元 *(dominant dimension)* が 2 以上なことは同値である。特に、次の間に全単射がある*:*

(1) *Hom* 有限アーベル圏で有限型なもの *(*の圏同値類*)*。
(2) 大域次元 2 以下支配次元 2 以上な有限次元代数 *(*の森田同値類*)*。

実際、Igusa-Todorov の組合せ論的特徴づけよりもこちらのほうが純圏論的・表現論的に対処できるので、まだ証明は煩雑ではない。しかしこの Auslander の発見や関手的手法の有効性・エレガントさは楽しいところがある。詳しくは Auslander 自身のサーベイ [Au3] を見てほしい。

## 5. 文献案内

圏論アドベントカレンダーなので圏論的な見地を強調したが、察せられてる通り、本稿はいわゆる**有限次元代数の表現論** と呼ばれる分野に属する事柄である。これについて定番教科書や関連する面白い論文を紹介して本稿を終える。

- 定番教科書: [ARS, ASS]。ちょっとホモロジー代数と圏論に慣れてたら基礎知識なしで読めると思う。これらを読めばいろんなアーベル圏の箙を書くテクニックが身につく。
- 面白い論文: [Au1, Au2, Au3]。Auslander の関手的な論文は、圏論的な広い見地から具体的な表現論的な話題をいろいろ繰り広げており、どれを今読んでも面白いと思う。
- 本稿のテーマへの導入: [Iy]。先程述べたが Igusa-Todorov のものは読みにくく古く self-contained でなく、self-contained な [Iy] をおすすめする。そこでは本稿で考えた「アーベル圏」という条件以外にも「almost abelian」や「integral almost abelian」の組合せ論的特徴づけや、それらが表現論的にどう実現されるか (「有限次元代数の加群圏」のように「ある種の条件を満たす加群のなす圏」として) も書かれており、豊富な具体例もある。

## 参考文献

[Au1] M. Auslander, *Coherent functors*, Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla, Calif., 1965) 189–231 Springer, New York.
[Au2] M. Auslander, *Representation dimension of Artin algebras*, Queen Mary College Mathematics Notes, Queen Mary College, London, 1971.
[Au3] M. Auslander, *A functorial approach to representation theory*, Proceedings on representations of algebras, Puebla 1980, Lecture Notes in Math. 944 (Springer, 1982) pp. 105–178

[ARS] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[ASS] I. Assem, D. Simson, A. Skowrónski, *Elements of the representation theory of associative algebras Vol. 1*, London Mathematical Society Student Texts, 65, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[BGRS] R. Bautista, P. Gabriel, A.V. Roiter, L. Salmeroń,*Representation-finite algebras and multiplicative bases*, Invent. Math. 81 (2) (1985) 217–285.

[IT] K. Igusa, G. Todorov, *A characterization of finite Auslander-Reiten quivers*, J. Algebra 89 (1984), no. 1, 148–177.

[Iy] O. Iyama, The relationship between homological properties and representation theoretic realization of Artin algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005), no. 2, 709–734.

VR アカデミア HTTPS://SITES.GOOGLE.COM/VIEW/VR-ACADEMIA/

*Email address*: `@italing_math`

*URL*: `https://sites.google.com/view/italing/`