注意!! 誤植や数学的なミスやギャップ等が含まれている場合があります。使用は自己責任にてお願いします。

GROTHENDIECK アーベル圏の基礎事項 (未完)

榎本 悠久

Abstract. Grothendieck アーベル圏についての、よく引用されたり使われている事項を、自分に分かりやすいようにまとめる、自分用のメモです。書きかけです。気が向いたら書き進めます。割とめんどくさいけどよく使う事柄だし、一度自分でちゃんと証明をやっておいた、という事実が残っていると、後に使いたいときに証明が気になって進まない、ということがなく、安心して Fact として扱えるので、メモとして残しておきます。参考文献は、[Po] と [St] の 2 つがド定番です。

目次

1. Introduction 2
1.1. 利点 2
1.2. デメリット 2
1.3. 構成 3
1.4. 方針 3
1.5. 前提知識 3
1.6. Conventions and notations 3
2. 基礎的な定義集め 4
2.1. 部分圏のいろいろな名前 4
2.2. 入射包絡・射影被覆 4
3. Grothendieck 圏への準備 8
3.1. 部分対象の束はモジュラー束である 8
3.2. 生成子について 11
4. Grothendieck 圏の定義 13
5. アーベル圏の局所化・localizing subcategory 17
5.1. 局所化の定義 18
5.2. Serre 部分圏による局所化 19
5.3. 局所化部分圏 (localizing subcategory) 29
5.4. Grothendieck 圏の局所化 34
6. (Ab5) アーベル圏での入射包絡の存在 38
7. 局所連接 Grothendieck 圏へ向けて 40
7.1. 対象に対する有限的条件 40
7.2. 局所有限性 (locally coherent, noetherian とかとか) 44
Appendix A. 束論について 47
A.1. 束の基本的な定義 47
A.2. モジュラー束 48
A.3. 上連続な完備束 50
A.4. 順序集合のガロア接続 51
A.5. 余剰 (superfluous) 、本質的 (essential) な元と根基、socle とか 51
Appendix B. Direct limit v.s. filtered colimit 53
Appendix C. アーベル圏の定義・基本性質 54

Date: 2019/2/5.
Key words and phrases. Grothendieck category.

Appendix D.　圏の局所化の一般論周辺 54
D.1.　圏の狭義局所化 v.s. 圏の 2 局所化 55
D.2.　反映的局所化 58
D.3.　Calculus of fractions 周辺 64
Appendix E.　加群圏の場合 64
E.1.　加群は入射加群に埋め込める 64
E.2.　前加法圏上の加群の場合 66
参考文献 68

1. Introduction

Grothendieck アーベル圏は、良い条件を満たす大きいアーベル圏です。例：

(1) 環 Λ 上の (有限生成と限らない) 右加群の圏 $\mathsf{Mod}\,\Lambda$
(2) より一般に、skeletally small preadditive category $\mathcal{C}$ 上の右加群の圏 $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$
(3) 環付き位相空間の上の加群層の圏
(4) スキーム上の準連接層のなす圏

著者が想定している例はほぼ (2) の場合です。ですが Grothendieck が導入して有名になった有効活用例は多分代数幾何の方です。それぞれが Grothendieck 圏になる証明はそのうち書くかも。

1.1. 利点.

Grothendieck 圏はアーベル圏のクラスで、かなり加群圏に近い議論が正当化される圏です。著者が思う利点として

(1) enough injective に必ずなる
(2) localization や torsion theory がいろいろうまくいく (localizing subcategory の特徴づけが楽)
(3) Gabriel-Popescu の定理 (Grothendieck 圏は必ず加群圏の localizing subcategory での局所化)
(4) injective がいっぱいあるので、それを用いて可換環の Spec みたいな Ziegler Spectrum という位相空間が定義でき、Serre subcategory とかの分類をそれでできる
(5) 上と関連して、神田さんの Atom spectrum という、素イデアルにより近い構成から位相空間ができ、いろいろ分類できる [Ka]

このようなことがうまくいくのは背後には

- 無限直和や直積や direct limit が取れるので、大雑把な議論ができる
- 部分対象の束が、部分加群の場合と同じく**上連続な完備モジュラー束**になる。

があります。後者は微妙な点に見えますが、加群についての議論は部分加群のなす束を考えると議論が整理されるところが多々あり、一般のアーベル圏では部分加群の束はモジュラー束にしかなりません（加群の場合は上連続性はほぼ自明なのに）。とくに加群の injective hull の存在などのところで部分加群の束についての微妙な議論を加群の場合行うのですが、そこで使われるのがちょうど上連続という微妙な条件になっているわけです。

1.2. デメリット.

このようにいろいろ良いところはあるのですが、

- 大きい圏のため、Krull-Schmidt 圏のような扱いやすさがない (直既約さえ理解できれば全てが直既約の有限直和になるので、とかそういうことが言えない)
- 大きい圏のため、具体的な構造を決定するのはほぼ無理がある (上と関連)
- 議論が少し抽象的で分かりにくい (とくに Ab 条件とか初見ではテクニカルすぎる)

などがあり、圏構造の解析という意味ではやはり有限生成加群に限ったりするほうがやりやすいです。しかし最近は、有限生成加群を調べるのにも無限生成加群を使ったりとかもあるので、著者自身何となく苦手意識を持つのは良くないということで、まとめています。

1.3. **構成.** 書きつつ加筆して考えていきます。以下書いておきたいこと

- Grothendieck の Ab 条件いろいろまとめ
- Injective hull の存在
- アーベル圏の localization まとめ、特に Grothendieck 圏での localizing subcategory の特徴づけ
- Gabriel-Popescu の定理

余力があったら

- Torsion theory やら Gabriel filter の話
- Ziegler spectrum, Atom spectrum でいろいろ分類できる話

1.4. **方針.** Grothendieck 圏の定義のなかで一番分かりにくいであろう、部分対象束の上連続性 (direct limit が完全) がわりかし不自然ではないということを強調するために、できるだけ仮定を落としたアーベル圏上で議論をして、上連続性がないといろいろ示せないことがあることを見ていきます。なので不必要にめっちゃ仮定をできるだけ落としてます (著者の好みでもある)。あと基本的に束論の道具で殴れるものは殴ります。

1.5. **前提知識.** 読者としては、アーベル圏上でのホモロジー代数についてや、(co)limit や随伴などの圏論の考え方に慣れている人を想定しています。証明などは大雑把な方針だけかいて細かく書かない可能性もあります。

1.6. **Conventions and notations.** 読者から指摘がありましたので、圏論の集合論的基礎づけをもう少しちゃんとやります。以下無限集合を含むような Grothendieck universe $\mathcal{U}$ を一つ固定して次の言葉遣いをします:

- 集合が $\mathcal{U}$ **集合** *($\mathcal{U}$-set)* であるとは、$\mathcal{U}$ に属するときをいう。
- 集合が *$\mathcal{U}$-small* であるとは、$\mathcal{U}$ 集合と全単射が存在するときをいう。
- **圏** $\mathcal{C}$ とは、射全体や対象全体が集合であり ($\mathcal{U}$ についてのクラスであることは仮定しない)、各対象 $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}(X, Y)$ が $\mathcal{U}$-small という条件を課す ($\mathcal{U}$ 集合であることは仮定しない)。このような圏は、各 $\mathcal{C}(X, Y)$ と $\mathcal{U}$ 集合との全単射を選ぶことで、各 Hom 集合が $\mathcal{U}$ 集合になっているような圏と圏同値が作れることに注意。
- 加法圏とは underlying category が圏なものをさす。
- 圏が**小圏** *(small category)* であるとは、対象全体・射全体の集合が $\mathcal{U}$-small であるときいう (このような圏は、射全体や対象全体は $\mathcal{U}$ 集合である圏と圏同値になっていることに注意)。
- 圏が *skeletally small* であるとは、$\mathcal{C}$ の対象の同型類の集合が $\mathcal{U}$-small になることと定義する。これは小圏であるような骨格が内部に取れることや、小圏と圏同値なことと同値である。
- 以下単に集合、アーベル群、環、加群、位相空間、順序集合、束などといったら、全て $\mathcal{U}$ 集合であることを課す (unless otherwise stated)。
- $\mathcal{U}$ 集合であるようなアーベル群のなす圏を $\mathcal{A}b$ と書く (実際圏になっている)。

このとき次に注意する。

命題 1.1. *Skeletally small* な圏 *(resp.* 加法圏*)*$\mathcal{C}$ と圏 *(resp.* 加法圏*)*$\mathcal{D}$ に対して、対象を $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への関手 *(resp.* 加法的関手*)*、射を自然変換とすることで圏 *(resp.* 加法圏*)* となる。

以下簡単のため次の用語を採用する。

- $\mathcal{U}$-small な集合のことを単に *small* **な集合**、あるいは単に集合という。
- $\mathcal{U}$-small とは限らない集合のことを**集まり** *(collection)* という。

また**部分圏**といったら常に充満部分圏で、かつ同型で閉じているものをさす。

束 L の二元 $x \leq y$ に対して、$[x, y]$ で interval lattice、つまり $\{z \in L | x \leq z \leq y\}$ を指すこととします。また**順序写像**といったら poset の間の順序を保つ写像 (つまり $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ なるような f) とすることとする (束の間の写像であっても join や meet が保たれることは仮定しない)。

圏が完備または余完備であることを (余) 完備である、と書くこととする。

2. 基礎的な定義集め

2.1. 部分圏のいろいろな名前. アーベル圏の部分圏についての良い性質の定義を集める。

定義 2.1. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の部分圏 $\mathcal{E}$ が

(1) **拡大で閉じる** *(closed under extension)* とは, 任意の短完全列
$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$
において、X と Z が $\mathcal{E}$ に属するなら Y も属するときをいう。

(2) **部分** *(resp.* **商***)* **対象で閉じる** *(closed under subobjects, quotients)* とは、任意の短完全列
$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$
において、Y が $\mathcal{E}$ に属するなら X (resp. Z) も属するときをいう。

(3) *Serre* であるとは、$\mathcal{E}$ が拡大・部分・商対象で閉じるときをいう。

(4) **アーベル部分圏** *(abelian subcategory)* であるとは、$\mathcal{E}$ がアーベル圏であり埋め込みが完全であるとき、すなわち $\mathcal{E}$ が有限直和と核と余核で閉じているときをいう。

(5) *wide* であるとは、$\mathcal{E}$ が拡大で閉じたアーベル部分圏のときをいう。

アーベル部分圏の定義に「埋め込みが完全」を課していることに注意されたい (exact abelian subcategory とか呼ばれる？)。例えば presheaf の圏の中での sheaf の圏はアーベル圏かつ部分圏だがアーベル部分圏とは呼ばない。

また Grothendieck の条件いくつかはすぐ書けるので定義 (recall) しておく。

定義 2.2. アーベル圏 $\mathcal{A}$ が *(*余*)* **完備**であるとは、$\mathcal{A}$ が ($\mathcal{U}$-small な) 無限直積 (直和) を持つときをいう。これは標準的な議論により、$\mathcal{A}$ が任意の $\mathcal{U}$-small な (co)limit を持つことと同値である。

2.2. 入射包絡・射影被覆. 任意の加群は射影加群の商であり、入射加群の部分加群である。そのような中で最小なものが**射影被覆** *(projective cover)* や**入射包絡** *(injective hull, injective envelope)* である。

まず、全射や単射の中である意味「極小」という条件を満たすものを定義しよう:

定義 2.3. アーベル圏における射 $\pi\colon P \to X$ が**本質的全射** *(essential epimorphism)* であるとは、次が成り立つときを言う:

(1) π は全射である。

(2) 任意の次の図式
$$\begin{tikzcd} W \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\pi\varphi"] & \\ P \arrow[r, two heads, "\pi"'] & X \end{tikzcd}$$
において $\pi\varphi$ が全射ならば φ は全射となる。

また双対的に、射 $\iota\colon X \to E$ が**本質的単射** *(essential monomorphism)* または**本質拡大** *(essential extension)* であるとは、次が成り立つときを言う:

(1) ι は全射である。

(2) 任意の次の図式
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr, "\psi\iota"'] & E \arrow[d, "\psi"] \\ & W \end{tikzcd}$$
において $\psi\iota$ が単射ならば ψ は単射となる。

これらの 2 つの条件は束論的に言い換えることができる。ここで束論における必要な概念は定義 A.24 を参照。

命題 2.4. *Well-powered* なアーベル圏 $\mathcal{A}$ において次が成り立つ。

(1) $\pi\colon P \to X$ が本質的全射であることと、$\operatorname{Ker}\pi$ が P の余剰的部分対象であること *(*つまり $\operatorname{Ker}\pi \in \mathsf{L}(P)$ が余剰的であること*)* は同値。
(2) $\iota\colon X \to E$ が本質的単射であることと、X が E の本質的部分対象であること *(*つまり $X \in \mathsf{L}(E)$ が本質的であること*)* は同値。

証明. 双対的だが両方示そう。

(1) **まず π が本質的全射と仮定**する。このとき P の部分対象 P' について $\operatorname{Ker}\pi + P' = P$ ならば $P' = P$ を示せばよい。そのため包含 $i\colon P' \hookrightarrow P$ に対して、合成 $P' \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} X$ を考える。$\operatorname{Ker}\pi + P' = P$ よりこの合成は全射であることが分かる。なぜなら、元をとればすぐ示せるが、とれないので一応ちゃんとやると、

$$\operatorname{Ker}\pi \oplus P' \to P \xrightarrow{\pi} X$$

の合成を考える (最初の射は二つの包含を足してできる射)。最初の射は $\operatorname{Ker}\pi + P' = P$ の条件より全射、π も全射なので、上の射の合成 $\operatorname{Ker}\pi \oplus P' \to X$ は全射。一方この写像の $\operatorname{Ker}\pi \to X$ の成分は 0 なので、それに気をつけると $P' \to X$ の成分、つまり πi は全射なことが計算ですぐ分かる。よって本質的全射の定義より i は全射、つまり $P' = P$ が従う。

逆に $\operatorname{Ker}\pi$ が P の余剰的部分対象と仮定する。このとき $\varphi\colon W \to P$ について合成 $\pi\varphi$ が全射だと仮定する。このとき φ を $W \twoheadrightarrow \operatorname{Im}\varphi \hookrightarrow P$ と分けることで、初めから φ は単射だと仮定してよい。以下このように φ を $W \leq P$ という部分対象と思う。すると $W \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ の合成は全射である。

このとき $W + \operatorname{Ker}\pi = P$ を示したい。また加群の場合は元をとればできるが、できないのでちゃんとやる。次の図式を作る:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d, hook, "\varphi"] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\pi \arrow[r] & P \arrow[r, "\pi"'] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

このとき、左の四角を潰した図式は完全である:

$$0 \to K \to \operatorname{Ker}\pi \oplus W \to P \to 0$$

よってとくに $\operatorname{Ker}\pi \oplus W \to P$ は全射 (ここのところは直接示すこともできる) で、なので $\operatorname{Ker}\pi + W = P$ となる。

よって余剰的の定義より $W = P$、つまり φ は同型 (とくに全射) となる。

(2) 完全に双対だが暇なので (?) 書く。上の証明のコピペである。

まず ι が本質的単射と仮定する。このとき E の部分対象 Y について $X \cap Y = 0$ ならば $Y = 0$ を示したい。このため商 $p\colon E \to E/Y$ に対して、合成 $X \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{p} E/Y$ を考えると、$X \cap Y = 0$ よりこの合成は単射であることが分かる。なぜなら、元をとればすぐ示せるが、とれないので一応ちゃんとやると、

$$X \xrightarrow{\iota} E \to E/X \oplus E/Y$$

の合成を考える (最後の射は二つの射影を足してできる射)。最後の射は $X \cap Y = 0$ の条件より単射 ($X \cap Y$ は $E \to E/X \oplus E/Y$ の核だったので)。また ι も単射なので、上の射の合成 $X \to E/X \oplus E/Y$ は全射。一方この写像の $X \to E/X$ の成分は 0 なので、それに気をつけると $X \to E/Y$ の成分、つまり $p\iota$ は単射なことが計算ですぐ分かる。よって本質的単射の定義より p は単射、つまり $Y = 0$ が従う。

逆に X が E の本質的部分対象と仮定する。このとき $\psi\colon E \to W$ について合成 $\psi\iota$ が単射だと仮定する。このとき ψ を $E \twoheadrightarrow \operatorname{Im}\psi \hookrightarrow W$ と分けることで、初めから ψ は全射だと仮定してよい。以下このように ψ を部分対象 Y についての商 $\psi\colon E \twoheadrightarrow E/Y$ と思う。すると $X \xrightarrow{\iota} E \twoheadrightarrow E/Y$ の合成は単射である。

このとき $X \cap Y = 0$ を示したい。また加群の場合は元をとればできるが、できないのでちゃんとやる。次の図式を作る:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\psi"] & E/X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & E/Y \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

このとき、左の四角を潰した図式は完全である:

$$0 \to E \to E/Y \oplus E/X \to C \to 0$$

よってとくに $E \to E/Y \oplus E/X$ は単射 (ここのところは直接示すこともできる) で、なので $X \cap Y = 0$ となる。よって本質的の定義より $Y = 0$、つまり ψ は同型 (とくに単射) となる。 □

定義 2.5. アーベル圏 $\mathcal{A}$ における射 $\pi\colon P \to X$ が X の**射影被覆** *(projective cover)* であるとは、P が射影的であり π が本質的全射なときをいう。また射 $\iota\colon X \to E$ が X の**入射包絡** *(injective hull, injective envelope)* であるとは、E が入射的であり ι が本質的単射なときをいう。

X の射影被覆や (resp. 入射包絡) は、(存在すれば、) 全ての射影加群からの全射 (resp. 入射加群への単射) の中に含まれている:

命題 2.6. アーベル圏 $\mathcal{A}$ における X の射影被覆 $\pi\colon P \to X$ が存在すれば、任意の射影加群からの全射 $p\colon P' \twoheadrightarrow X$ に対して、同型 $\varphi\colon P' \xrightarrow{\simeq} P \oplus Q$ と次の可換図式が存在する*:*

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varphi"', "\wr"] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
P \oplus Q \arrow[r, "{[\pi,0]}"] \arrow[d, two heads, "{[\mathrm{id}_P,0]}"'] & X \arrow[d, equal] & 0 \\
P \arrow[r, "\pi"] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

証明. 次の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[r, "p"] \arrow[d, "r"] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
P \arrow[r, "\pi"] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ここで r は P' の射影性より誘導される射である。よって $p = \pi r$ が全射であるので、π が本質的全射であるということから r は全射である。しかし P は射影的であるので r は分裂全射である。ここから主張はすべて従う。 □

つまり、どんな射影加群からの全射も、必ず射影被覆 π を直和因子として持ち、しかも $[\pi, 0]$ という射と同型になる。

射についての極小性の条件として、本質的全射・本質的単射を用いたが、他にも**右極小** *(right minimal)* や**左極小** *(left minimal)* という概念も存在する。これについて射影被覆・入射包絡の場合の関連性を見る。

定義 2.7. 圏 $\mathcal{C}$ における射 $f\colon M \to X$ が**右極小** *(right minimal)* であるとは、次の可換図式

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & X \arrow[d, equal] \\
M \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

が与えられたとき (つまり $\varphi\colon M \to M$ が $f\varphi = f$ を満たすとき)、φ が同型射となるときをいう。

また双対的に、圏 $\mathcal{C}$ における射 $g\colon X \to W$ が**左極小** *(left minimal)* であるとは、次の可換図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & W \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

が与えられたとき、ψ が同型射となるときをいう。

命題 2.8. アーベル圏 $\mathcal{A}$ における射影的対象 P からの全射 $\pi\colon P \twoheadrightarrow X$ について次は同値*:*

(1) π は射影被覆である、つまり π は本質的全射である。
(2) π は右極小である。

双対的に、入射的対象 E への単射 $\iota\colon X \hookrightarrow E$ について次は同値*:*

(1) ι は入射包絡である、つまり ι は本質的単射である。
(2) ι は左極小である。

証明. 前半のみ示す。

(1) $\Rightarrow$ (2): 示すべきは、$\varphi\colon P \to P$ が $\pi\varphi = \pi$ を満たすとき φ が同型なことである。ここで $\pi\varphi = \pi$ は全射であり、π が本質的全射なことから φ は全射である。しかし P は射影的なので、φ は分裂全射であり、次の可換図式が得られる。

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\simeq"] \arrow[dr, "\varphi"'] \arrow[dd, "\pi"'] & P \oplus Q \arrow[d, two heads, "{[1,0]}"] \\ & P \arrow[d, two heads, "\pi"] \\ X \arrow[r, equal] & X \end{tikzcd}$$

ここで左の π と右の赤の合成は射として同型であり、π は本質的全射なので、赤の射の合成 $\pi \circ [1,0]$ は本質的全射。しかし、次の合成

$$P \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]} P \oplus Q \xrightarrow{[1,0]} P \xrightarrow{\pi} X$$

は π なので全射である。よって $\pi \circ [1,0]$ が本質的全射なので $P \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]} P \oplus Q$ は全射。これは $Q = 0$ を意味し、なので上の三角形

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\simeq"] \arrow[dr, "\varphi"'] & P \oplus Q \arrow[d, two heads, "{[1,0]}"] \\ & P \end{tikzcd}$$

を見ると、赤が同型より φ も同型である。

(2) $\Rightarrow$ (1): π が右極小だとして、π が本質的全射なことを見たい。そのため $\varphi\colon W \to P$ に対して $\pi\varphi$ が全射だと仮定する。すると次の図式ができる:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, dashed, "\psi"] & X \arrow[d, equal] \\ W \arrow[r, two heads, "\pi\varphi"] \arrow[d, "\varphi"] & X \arrow[d, equal] \\ P \arrow[r, two heads, "\pi"] & X \end{tikzcd}$$

ここで ψ は P の射影性から誘導される。上の可換図式を見ると、π が右極小なことから $P \xrightarrow{\psi} W \xrightarrow{\varphi} P$ の合成は同型射、よって特に φ が全射なことが従う。よって π は本質的全射である。 $\square$

3. Grothendieck 圏への準備

この節では、Grothendieck 圏の定義を述べるのに必要な事柄・関連する事柄を、主に束論を重視する視点から導入していきます。著者の好みから、アーベル圏におけるいろんな命題を示すのに束論を使うと見通しがよいです。

3.1. 部分対象の束はモジュラー束である.

一般に圏の対象の部分対象 (の同値類) はアーベル圏でなくても poset になり、アーベル圏だと束になることがすぐに分かります。しかし重要なのは、この束が**モジュラー束**になることで、いろいろな微妙な議論でこれが効いてきます。束論の事項については Appendix A を見てください。先にいうと、Grothendieck 圏では更に束が**完備で上連続**になることが非常に重要です。とりあえず集合論的な事情で一般に部分対象全体は集合だと言えない ($\mathcal{U}$ 集合や $\mathcal{U}$-small にならない)

定義 3.1. アーベル圏 $\mathcal{A}$ が *well-powered* であるとは、任意の対象 X の部分対象の同値類が $\mathcal{U}$-small になるときを言う。このとき、部分対象の同値類のなす poset を $\mathsf{L}(X)$ と書く。

念の為 $\mathcal{U}$ 集合であるより弱く、$\mathcal{U}$-small ($\mathcal{U}$ の元と全単射がある) ことを課します。

命題 3.2. *Well-powered* なアーベル圏 $\mathcal{A}$ において、任意の対象 X に対してその部分対象の同値類のなす *poset* $\mathsf{L}(X)$ は束になる *(*完備とは限らない*)*。

証明. $X_1, X_2 \leq X$ を 2 つの部分対象としたとき、包含と直和の普遍性から誘導される自然な射 $X_1 \oplus X_2 \to X$ の像を $X_1 + X_2$ と書くと、これは $\mathsf{L}(X)$ における join になっている。meet の構成は双対で、$X \to X/X_1 \oplus X/X_2$ の核を $X_1 \cap X_2$ と書けば meet になっている。または、meet は次の pullback でも構成できる。

$$\begin{tikzcd} X_1 \cap X_2 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X_2 \arrow[d, hook] \\ X_1 \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

□

同じような議論で次が分かる。

命題 3.3. 余完備かつ *well-powered* なアーベル圏 $\mathcal{A}$ に対して、X の部分対象の族 $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は上限を持ち、それは $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X$ の像として与えられる。よって $\mathsf{L}(X)$ は完備束となる。

双対的に、完備な well-powered なアーベル圏では部分対象の族の下限が必ず存在し、よって部分対象のなす束は完備束になる。

命題 3.4. *Well-powered* なアーベル圏 $\mathcal{A}$ の双対圏 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ も *well-powered* であり、$\mathcal{A}$ の対象 X に対して、束の反同型 $\mathsf{L}(A) \cong \mathsf{L}(A^{\mathrm{op}})$ が存在する。

証明. 部分対象と商対象はアーベル圏では一対一対応するので双対圏も well-powered。順序がひっくり返ることはすぐ分かる。 □

なので「アーベル圏のある対象の部分対象の束」として現れるものは双対で閉じている。ネタバレでは、これはモジュラー束になり、モジュラー性は対称的なのに対し、Grothendieck 圏では「上連続」という対称的でない条件を課す。

アーベル圏において、射があると部分対象の束の間の順序を保つ写像が両方の向きに誘導される。これはガロア接続になっているのを見ていくと後々便利である。

命題 3.5. *Well-powered* なアーベル圏 $\mathcal{A}$ における射 $f\colon X \to Y$ が与えられると、順序を保つ写像 $f(-)\colon \mathsf{L}(X) \to \mathsf{L}(Y)$ と $f^{-1}(-)\colon \mathsf{L}(Y) \to \mathsf{L}(X)$ が次で定まる。

- $f(A) := \mathrm{Im}(A \hookrightarrow X \xrightarrow{f} Y)$ の像を対応させる。

- Y の部分対象 B に対して、次の *pullback* で $f^{-1}(B)$ を定める:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B) \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & B \arrow[d, hook] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

さらにこの *2* つの順序写像は、$A \leq f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(A) \leq B$ を満たす、つまりガロア接続になっている。

証明. 写像の well-defined 性は明らか (pullback は mono を保つ)。順序を保つこともすぐ分かる。よって最後のガロア接続のことを考えるが、これは $f^{-1}(B)$ が pullback として定義されていたことと pullback の普遍性よりすぐ従うのでやってみるとよい。 □

系 3.6. *Well-powered* なアーベル圏 $\mathcal{A}$ における射 $f\colon X \to Y$ に対して次が成り立つ:

(1) $f(X_1 + X_2) = f(X_1) + f(X_2)$ *in* $\mathsf{L}(Y)$.
(2) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$ *in* $\mathsf{L}(X)$.

さらに $\mathcal{A}$ が完備または余完備なとき次が成り立つ:

(3) $f(\sum X_\lambda) = \sum f(X_\lambda)$ *in* $\mathsf{L}(Y)$.
(4) $f^{-1}(\bigcap Y_\lambda) = \bigcap f^{-1}(Y_\lambda)$ *in* $\mathsf{L}(X)$.

証明. 命題 A.23 より従う。 □

部分対象の束においては、その interval は自然に subfactor の部分対象束として実現できる:

命題 3.7. *Well-powered* なアーベル圏 $\mathcal{A}$ における短完全列

$$0 \to X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z \to 0$$

において次が成り立つ。

(1) ガロア接続 $i(-)\colon \mathsf{L}(X) \rightleftarrows \mathsf{L}(Y)\colon i^{-1}$ は、束の同型 $\mathsf{L}(X) \cong [0, X]$ を誘導する。またこの同一視のもと、i^{-1} はちょうど $X \cap (-)\colon \mathsf{L}(Y) \to [0, X]$ に対応する。
(2) ガロア接続 $p(-)\colon \mathsf{L}(Y) \rightleftarrows \mathsf{L}(Z)\colon p^{-1}$ は、束の同型 $[X, Y] \cong \mathsf{L}(Z)$ を誘導する。またこの同一視のもと、$p(-)$ はちょうど $X + (-)\colon \mathsf{L}(Y) \to [X, Y]$ に対応する。

証明. ガロア接続についての命題 A.23(3) を使いたい。

(1): 命題 A.23(3) を使うためには、次を確かめれば良い。

(a) $i(-)$ の像として出てくる Y の部分対象の集合はちょうど interval $[0, X]$ に等しい。
(b) $i^{-1}(-)$ の像として全ての X の部分対象が出てくる。

だが (a) は定義より明らか、(b) も X の部分対象 A に対して $A = i^{-1}i(A)$ なことがすぐ分かるのでおっけー (pullback のちょっとした練習問題から)。また後半の主張も meet が pullback で書けることから明らか。

(2): 双対性と (1) から従わせることもできるが (すなわち部分対象のかわりに商対象を考えて、そこでの構成が、部分対象での構成と対応していることを見る)、双対性をちゃんと厳密に示すのは面倒なため直接示す。

(a) $p(-)$ の像として全ての Z の部分対象が出てくる。
(b) $p^{-1}(-)$ の像として全てくる X の部分対象の集合はちょうど interval $[X, Y]$ に等しい。

(a) について。適当な Z の部分対象 $C \hookrightarrow Z$ をとると pullback とって次ができる。

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & p^{-1}(C) \arrow[r] \arrow[d, hook] & C \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

なので epi-mono 分解の一意性を使うと、$C = pp^{-1}(C)$ が従う。

(b) について。上のように $p^{-1}(C)$ を考えると $X \leq p^{-1}(C)$ が上の可換性より従う。逆は、$X \leq B$ なる Y の部分対象をとると、

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & W & = & W & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

という完全列ができ、右上の四角は pullback(かつ pushout) より、$\pi^{-1}(C) = B$ が従う。

後半の主張について。双対性使わないと少し面倒。$B \leq Y$ を適当にとると次ができる。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & B & \longrightarrow & p(B) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & p^{-1}p(B) & \longrightarrow & p(B) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

ここで左上の四角は pushout(かつ pullback) なので、自然な写像 $X \oplus B \to p^{-1}p(B)$ は全射、つまり $X + B = p^{-1}p(B)$ が従いおっけー。 □

上の証明で使った pullback や pushout と短完全列との絡みのいろんな性質はそのうち Appendix にでもまとめるかも。

系 3.8. *Well-powered* なアーベル圏 $\mathcal{A}$ において、対象 X の部分対象 $Y_1 \leq Y_2$ に対して、$\mathsf{L}(Y_2/Y_1) \simeq [Y_1, Y_2]$ という同型がある。

証明. さっきのより $Y_2/Y_1 \to X/Y_1$ は同型 $\mathsf{L}(Y_2/Y_1) \simeq [Y_1/Y_1, Y_2/Y_1]$ を与え、一方 $\mathsf{L}(X/Y_1) \simeq [Y_1, X]$ の束の同型より $[Y_1/Y_1, Y_2/Y_1] \simeq [Y_1, Y_2]$ が誘導され、合成して OK。 □

定理 3.9. *Well-powered* なアーベル圏 $\mathcal{A}$ において、任意の対象 X の部分対象の同値類のなす束 $\mathsf{L}(X)$ はモジュラー束となる。

証明. Appendix の命題 A.10 より、$\mathsf{L}(X)$ の任意の interval sublattice において、2 つの同一な補元を持つ比較可能な元が等しいことを示せば良い。しかし $\mathsf{L}(X)$ の interval は、Corollary 3.8 より必ず別の対象の L として実現できるので、初めから次を示せば良い:
Claim: X の *3* つの部分対象 $X_1 \leq X_2$ と Y が、$X_1 + Y = X_2 + Y = X$ と $X_1 \cap Y = X_2 \cap Y = 0$ を満たすならば $X_1 = X_2$ である。
条件より $X_i \oplus Y \to X$ が $i = 1, 2$ でともに同型である (これも示す必要はあるが)。次の可換図式

$$
\begin{array}{ccc}
X_1 \oplus Y & \xrightarrow{\sim} & X \\
{\scriptstyle \left[\begin{smallmatrix} \iota & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]} \downarrow & \nearrow_{\sim} & \\
X_2 \oplus Y & &
\end{array}
$$

があるが (ι は包含)、可換性から $\left[\begin{smallmatrix} \iota & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ が同型、ここから ι が同型が従う (一般に対角行列の同型性は各対角成分の同型性と同値なので)。 □

3.2. **生成子について.** Grothendieck 圏の定義の一つに、生成子がある or 生成集合がとれるという条件がある。生成子について見ていく。

定義 3.10. 圏 $\mathcal{A}$ において、対象の集合 $\mathcal{G}$ が**生成集合** *(generating set)* であるとは次を満たすときをいう。

- 任意の 2 つの射 $f_0, f_1 \colon X \to Y$ に対して、$f_0 \neq f_1$ なら、ある $G \in \mathcal{G}$ からの射 $g \colon G \to X$ であって $f_0 \circ g \neq f_1 \circ g$ となるようなものがある。

圏が前加法圏な場合、これは次と同値なことはすぐ分かる。

- 任意の射 $f \colon X \to Y$ が $f \neq 0$ なら、ある $G \in \mathcal{G}$ からの射 $g \colon G \to X$ であって $f \circ g \neq 0$ となるようなものがある。

また対象 G が**生成子** *(generator)* であるとは、集合 $\{G\}$ が生成集合のときをいう。

注意 3.11. 生成集合の存在については、**集合**であるということが重要な制約である。例えば skeletally small な圏は、骨格をとればそれが生成集合なことがわかり、集合論的事柄を無視してしまうと、任意の圏は対象全ての「集合」を考えれば明らかに生成集合となってしまう。

生成集合についての性質を見るため、著者の分野ではよく用いられる *trace* を定義する。

定義 3.12. Well-powered で (余) 完備なアーベル圏 $\mathcal{A}$ において、対象 X と $\mathcal{A}$ の対象からなる集合 $\mathcal{G}$ を考える。このとき $\mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(X)$ という X の部分対象を、

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(X) := \sum \{\mathrm{Im}\,\varphi \mid \varphi \colon G \to X,\, G \in \mathcal{G}\}$$

で定義する ($\mathsf{L}(X)$ は完備束なので定義できる)。

これはある種の次のような弱い普遍性を満たす。

補題 3.13. *Well-powered で (余) 完備なアーベル圏 $\mathcal{A}$ と、$\mathcal{A}$ の対象からなる集合 $\mathcal{G}$ に対して次が成り立つ。*

(1) 対象 X に対して、$\mathcal{G}$ の元 G から X への任意の射は必ず $\mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(X) \hookrightarrow X$ を経由する。
(2) 射 $f \colon X \to Y$ が与えられると、次を可換にする射 $\mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(f) \colon \mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(X) \to \mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(Y)$ が自然に誘導される*:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(X) \arrow[r, "\mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(f)"] \arrow[d, hook] & \mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(Y) \arrow[d, hook] \\
X \arrow[r, "f"] & Y.
\end{tikzcd}$$

証明. (1): あたりまえ。

(2): あたりまえっぽいがちょっと慎重な議論。確認すべきは $f(\mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(X)) \leq \mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(Y)$ という $\mathsf{L}(Y)$ での大小関係が成り立つことだが、$f(\mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(X)) = f(\sum_{\varphi} \mathrm{Im}\,\varphi) = \sum_{\varphi} f(\mathrm{Im}\,\varphi) = \sum_{\varphi} \mathrm{Im}(f \circ \varphi)$ が成り立つ、ここで φ は $\mathcal{G}$ の対象から X への射全て動く (ここで 3 番目の等式が少し怪しいが命題 3.6 より従う、というよりこの証明の途中にそれが必要になって命題 3.6 を準備した)。なのでこれが $\mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(Y)$ に入るのは定義より従う。 □

命題 3.14. *Well-powered で (余) 完備なアーベル圏 $\mathcal{A}$ と、$\mathcal{A}$ の対象の集合 $\mathcal{G}$ に対して次は同値。*

(1) $\mathcal{G}$ は生成集合。
(2) 任意の対象 X に対して $\mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(X) = X$ が成り立つ。

証明. (1) ⇒ (2): 次の完全列を考える:

$$0 \to \mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(X) \to X \to C \to 0$$

ここで、$C = 0$ を示したい。$C \neq 0$ なら $X \to C$ は 0 射でないので、$\mathcal{G}$ が生成集合であることから、ある $G \in \mathcal{G}$ からの射 $G \to X$ で C まで飛ばして non-zero なのが取れる。しかし G からの射は命題

3.13 よりかならず $\mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(X) \hookrightarrow X$ を経由するので、C まで飛ばすと 0 になり矛盾。よって $C = 0$ で $\mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(X) = X$ が成り立つ。

(2) $\Rightarrow$ (1): 射 $f\colon X \to Y$ が、もし任意の $\mathcal{G}$ の対象から X への射を合成したら 0 になるとする。このとき命題 3.13 で誘導される射を考えると $f\colon X = \mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(X) \to \mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(Y) = Y$ といまなっている。しかし $f(\mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(X)) = \sum_{\varphi} \mathrm{Im}(f \circ \varphi)$ と命題 3.13 の証明のように書けるが (φ は $\mathcal{G}$ の対象から X への射を走る)、仮定より $f \circ \varphi = 0$ が全ての φ で成り立つので、$\mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(f) = 0$ つまり $f = 0$ である。よって $\mathcal{G}$ は生成集合である。 □

アーベル圏の場合は、次のよく知られた定義のほうが馴染み深い。

命題 3.15. *$\mathcal{A}$ を余完備なアーベル圏とすると次が成り立つ (ここでの直和は有限とは限らない)。*

(1) 対象の集合 $\mathcal{G}$ が生成集合であることと、任意の対象 X へ $\mathcal{G}$ の元の直和からの全射があることは同値である。
(2) 対象 G が生成子であることと、任意の対象 X へ G の直和からの全射があることは同値である。
(3) 対象の集合 $\mathcal{G}$ が生成集合であることと、$\mathcal{G}$ の全ての元の直和が生成子であることは同値である。よって特に、$\mathcal{A}$ が生成集合を持つことと生成子を持つことは同値である。

証明. (1): 命題 3.14 と、余完備なことより join は無限直和からの全射で実現できることに注意するとすぐ。

(2): (1) から従う。

(3): やればすぐ分かる。 □

証明中、余完備なことを良いことにむりやり非常に大きいものからの全射を作っています、無限直和があるとこういうことができます。証明で構成した全射のような考えは、「任意の $\mathcal{G}$ の対象から X への射がかならずそこを経由する」という意味の (弱い) 普遍性を持つもので、部分圏の**反変有限性** *(contravariantly finiteness)* と非常に近い考えです。このように無限直和や直積をもつと、無限をフル活用してこのような射 (**近似**、*approximation* と呼ばれる) を作ることができるのが強いです。実際 $\mathcal{G}$ が無限直和と商で閉じているなら trace がちょうど右近似を与えます。

今まで well-powered という、チェックしにくそうな集合論的な制約をつけていましたが、実は生成集合があればおっけーです。

命題 3.16. *アーベル圏が生成子を持つなら well-powered である。よって余完備で生成集合を持つアーベル圏は well-powered である。*

証明. ちゃんとやると面倒。さらにいうとアーベル圏とか加法性とか落としても適切に設定すれば成り立つらしい。余完備を仮定すれば少し楽かな？

(余完備を仮定しない証明) アーベル圏 $\mathcal{A}$ が生成子 G を持つとする。対象 X に対して、$\mathcal{A}(G, X)$ は集合である。このとき X の部分対象 Y に対して、包含から誘導される単射 $\mathcal{A}(G, Y) \hookrightarrow \mathcal{A}(G, X)$ があり、その像は $\mathcal{G}_Y := \{f\colon G \to X \mid f \text{ は } Y \hookrightarrow X \text{ を経由する } \}$ になる。この「X の部分対象 Y に対して $\mathcal{A}(G, X)$ の部分集合 $\mathcal{G}_Y$ を与える」という対応において、2 つの部分対象が飛ばして等しいなら部分対象として同値なことを示せば、X の部分対象の同値類が集合になることが従う。

2 つの部分対象 $Y_1, Y_2 \hookrightarrow X$ をとり、$\mathcal{G}_{Y_1} \subset \mathcal{G}_{Y_2}$ ならば $Y_1 \leq Y_2$ なことを示せば、逆も合わせて主張が従う。アーベル圏なので pullback がとれ、

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & Y_1 \arrow[d, hook] \\ Y_2 \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

という pullback をとる。関手 $\mathcal{A}(G,-)$ は定義より pullback を保つので、

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(G,Y) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathcal{A}(G,Y_1) \arrow[d, hook] \\ \mathcal{A}(G,Y_2) \arrow[r, hook] & \mathcal{A}(G,X) \end{tikzcd}$$

が pullback。しかし今 $\mathcal{G}_{Y_1} \subset \mathcal{G}_{Y_2}$ より、$\mathcal{A}(G,Y_1) \hookrightarrow \mathcal{A}(G,X)$ は $\mathcal{A}(G,Y_2) \hookrightarrow \mathcal{A}(G,X)$ を経由する。ので pullback なことを考えると、$\mathcal{A}(G,Y) \hookrightarrow \mathcal{A}(G,Y_1)$ は同型。ここで、

$$0 \to Y \to Y_1 \to C \to 0$$

と余核をとる。もし $C \neq 0$ なら、射 $Y_1 \to C$ が 0 でないので、ある $G \to Y_1$ であって C まで送っても 0 でないものがある。しかし $\mathcal{A}(G,Y) \to \mathcal{A}(G,Y_1)$ の全射性から、$G \to Y_1$ は $Y \to Y_1$ を通り、C まで合成すると 0 になってしまい矛盾。よって $C = 0$、つまり $Y = Y_1$ なので $Y_1 \leq Y_2$ が従う。

(余完備性を仮定した証明) まず $\mathcal{A}(G,X)$ は集合なことに注意する。このとき、この集合の部分集合 $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(G,X)$ を指定するごとに、X の部分対象 $Y_\mathcal{F}$ が、$Y_\mathcal{F} := \mathrm{Im}(\bigoplus_{f \in \mathcal{F}} G \xrightarrow{\sum f} X)$ により定まる。よって全ての X の部分対象 Y がこのように $Y_\mathcal{F}$ として実現されるものと同値なことを示せば、X の部分対象の同値類が集合になるので、これを示す。部分対象 Y に対して、$\mathcal{F}$ を $\mathcal{A}(G,Y) \hookrightarrow \mathcal{A}(G,X)$ の像として定める。落ち着けば、$Y_\mathcal{F} = \mathrm{tr}_\mathcal{G}(Y)$ が分かり、これは命題 3.13 より Y に一致する。 □

4. Grothendieck 圏の定義

以上の準備のもと、Grothendieck 圏の定義が自然に導入される。

定義 4.1. アーベル圏 $\mathcal{A}$ が *Grothendieck* **圏**であるとは、次を満たすときをいう。

(1) $\mathcal{A}$ は余完備である、つまり無限直和を持つ。
(2) $\mathcal{A}$ は生成集合を持つ、あるいは生成子を持つ (余完備より同値)。
(3) 任意の $\mathcal{A}$ の対象 X に対して、部分対象の束 $\mathsf{L}(X)$ が**上連続**である (定義 A.18 参照)。

最後の条件は (Ab5) と呼ばれる。

しばらくは、この謎めいた (Ab5) の条件の言い換えを考えていきます。

例 4.2. 以下は Grothendieck 圏である。

(1) 環 Λ に対して ($\mathcal{U}$ 集合な) 右 Λ 加群のなす圏 $\mathsf{Mod}\,\Lambda$ が Grothendieck 圏である。
(2) より一般的に、skeletally small な前加法圏 $\mathcal{C}$ に対して、加法的反変関手 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}b$ のことを**右 $\mathcal{C}$ 加群**と呼び、右 $\mathcal{C}$ 加群のなす圏を $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ と書く ($\mathcal{C}$ の対象が一つの場合が環上の加群の場合である)。集合論的に圏になることは命題 1.1 より。

証明. 一般に余完備なアーベル圏への関手圏は余完備なアーベル圏となる。また $\mathcal{C}$ の同型類を $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ と書くと、$\{\mathcal{C}(-,c) \mid c \in \mathsf{ind}\,\mathcal{C}\}$ は $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ の生成集合である (集合なことに注意) (米田の補題とかより各自チェックされたい)。また (Ab 5) を満たすことは、また point-wise にチェックしてみればよい。ここでアーベル群の場合の命題 A.19 を用いればすぐ分かる。 □

命題 4.3. 余完備なアーベル圏 $\mathcal{A}$ において、余極限をとる操作は右完全。つまり小圏 I 上の図式の短完全列の図式 $0 \to X_i \to Y_i \to Z_i \to 0$ が与えられると、$\mathrm{colim}_{i \in I} X_i \to \mathrm{colim}_{i \in I} Y_i \to \mathrm{colim}_{i \in I} Z_i \to 0$ は完全。

証明. 余核の普遍性満たすのがすぐ分かる。 □

とくに順極限をとる操作は右完全。

部分対象の有向族について、まず何も条件がなしに次が成り立つことをまず観察する。

補題 4.4. 余完備なアーベル圏 $\mathcal{A}$ の対象 X の部分対象の有向族 X_i $(i \in I)$ が与えられたとき、誘導される写像 $\varinjlim_{i\in I} X_i \to X$ の像は $\sum_{i\in I} X_i$ と一致し、次が完全。

$$\sum_{i\in I} X_i \to X \to \varinjlim_{i\in I}(X/X_i) \to 0$$

とくに順極限が完全なら、$\varinjlim_{i\in I} X_i = \sum_{i\in I} X_i$ と同一視ができる。

証明. 構造射 $X_i \to \varinjlim X_i$ から誘導される $\bigoplus_{i\in I} X_i \to \varinjlim_{i\in I} X_i$ は定義から普遍性の定義から全射なことが分かり、よって次の図が可換。

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in I} X_i \arrow[r, two heads] \arrow[dr] & \varinjlim_{i\in I} X_i \arrow[d] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

ここで斜めの射は包含から誘導されるもの。この斜めの射の像が $\sum_{i\in I} X_i$ だったが、上の可換性から主張が従う。完全性は colimit は一般に右完全なのでおっけー。

順極限が完全なら、$X_i \hookrightarrow X$ の極限として $\varinjlim X_i \to X$ が得られるのでこれが単射よりおっけー。 □

定理 4.5 ([St, Proposition V.1.1], [Po, Theorem 2.8.6])**.** 余完備で *well-powered* なアーベル圏 $\mathcal{A}$ に対して次は同値。

(1) 任意の対象 X の部分対象の束 $\mathsf{L}(X)$ は上連続。
(2) 任意の射 $f\colon X \to Y$ に対して、命題 *3.5* で定義された順序写像 $f(-)^{-1}\colon \mathsf{L}(Y) \to \mathsf{L}(X)$ は有向和を保つ、つまり Y の部分対象の任意の有向族 $\{Y_i \mid i \in I\}$ に対して $f^{-1}(\sum Y_i) = \sum f^{-1}(Y_i)$ が成り立つ。
(3) フィルター余極限をとる操作が完全。
(4) 順極限をとる操作が完全。

証明. 大体の感じ: (3) なら (4) は当たり前、(1) と (2) は同値なのが束論的考察からすぐ。(4) から (1) や (2) は pullback が順極限と可換から考えればすぐ。一番面倒なのは (3) or (4) の成立。ここの証明は [St] や [Po] の証明を、フィルター圏の場合に拡張して、あと自分に読みやすいように書き換えたものです (さすがに自力で証明は無理ですこれ)。

(1) ⇒ (2): 命題 3.7 を有効活用するとすぐ。f を $p\colon X \twoheadrightarrow W$ と $i\colon W \hookrightarrow Y$ と epi-mono 分解をとる。このとき pullback の性質より、$f(-)^{-1}(-) = p^{-1}(i^{-1}(-))$ なことが分かるので、各 p^{-1} と i^{-1} が有向和を保てばよい。

まず i は単射より命題 3.7(1) より、この写像は $W \cap (-)\colon \mathsf{L}(Y) \to [0, W]$ と同一視でき、(1) の仮定よりこれは有向和を保つ。次に p は全射より命題 3.7(2) を使うと、この写像は $\mathsf{L}(W) \cong [\operatorname{Ker} f, X] \hookrightarrow \mathsf{L}(X)$ という合成でかけ、最初の射は同型はもちろん join を保ち、次の埋め込みも interval sublattice の埋め込みより join を保つ。なので特に有向和も保ち従う。

(2) ⇒ (1): 上連続を示したいが (2) の f として単射をとれば $f^{-1}(-)$ は命題 3.7 より meet をとる操作と思えてすぐ従う。

(3) ⇒ (4): あたりまえ。

(4) ⇒ (2): (2) の状況を考えると、次の図式をみる:

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(Y_i) \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & Y_i \arrow[d, hook] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

ここでこの図式を i について direct limit をとると、direct limit が核を保つので pullback も保つ。また mono 性も保つことに注意すると、補題 4.4 も踏まえれば

$$\begin{tikzcd}
\sum_i f^{-1}(Y_i) \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \sum_i Y_i \arrow[d, hook] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

が pullback 図式になる。よって $f^{-1}(\sum_i Y_i) = \sum_i f^{-1}(Y_i)$ が従う。

(1) ⇒ (3): 証明のため嫌だがいろいろ射に名前をつける。

まず予備的な考察をする。フィルター圏 I からの関手 $F : I \to \mathcal{A}$ を考え、I の対象を i, j とかで、射を $a : i \to j$ とかで書く。また $\bigoplus F := \bigoplus_{i \in I} F_i$ とする。このとき I の射 a に対して、次の完全図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \operatorname{Ker} F_a \arrow[r, equal] \arrow[d] & \operatorname{Ker} F_a \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_i \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & F_i \arrow[r] \arrow[d, "F_a"] & \operatorname{colim} F \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & K_j \arrow[r] & F_j \arrow[r] & \operatorname{colim} F
\end{tikzcd}$$

ここで $F_i \to \operatorname{colim} F$ は構造射で左下が pullback はチェックできる。よって $K_i \to K_j$ の核は $\operatorname{Ker} F_a$ と同一視できる。このとき次の補題が成り立つ

補題 4.6. この状況で、*(1)* を仮定すると、任意の $i \in I$ について

$$K_i = \sum_{c : i \to \cdot} \operatorname{Ker} F_c.$$

ここで c は I の中での i を始点とする全ての射を走る。

補題の証明. 全て $\bigoplus F$ の部分対象だと思って $\mathsf{L}(\bigoplus F)$ で議論をする。まず $\operatorname{colim} F$ の具体的な構成を思い出す。I の non-full (:= full と限らない) 部分圏 A が与えられるごとに、$M_A \le \bigoplus F$ という部分対象を、次の像で定義する:

$$\bigoplus_{a \in \mathsf{Mor}(A)} F_{s(a)} \to \bigoplus F$$

ここで $\mathsf{Mor}(A)$ は A の中の射の集合であり、上の射は各 $a \in \mathsf{Mor}(A)$ に対して ${}^t[1, -F_a] : F_{s(a)} \to F_{s(a)} \oplus F_{t(a)}$ と自然な写像 $F_{s(a)} \oplus F_{t(a)} \to \bigoplus F$ の合成を足し合わせて定義される。もちろん $s(a)$ と $t(a)$ は a の始点・終点である。このとき、次は完全:

$$0 \to M_I \to \bigoplus F \to \operatorname{colim} F \to 0$$

むしろこのようにして余極限を構成したのであったね。よって $i \in I$ を一つ固定すると、次が可換:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_i \arrow[r] \arrow[d] & F_i \arrow[r] \arrow[d, "\iota_i"] & \operatorname{colim} F \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_I \arrow[r] & \bigoplus F \arrow[r] & \operatorname{colim} F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ここで ι_i は直和の構造射。つまり左の四角は pullback より、$K_i = F_i \cap M_I = \iota_i^{-1} M_I$ が成り立つ。しかし、落ち着くと $M_I = \sum \{ M_A \mid A \text{ は } I \text{ の有限 non-full 部分圏} \}$ と有向和で書ける (有向集合にするために A を有限部分集合で動かしている)。すると *(1)* の仮定より (ここで仮定つかう)

$$K_i = \sum (F_i \cap M_A) = \sum \iota_i^{-1} M_A$$

ここで和は A は I の有限 non-full 部分圏を動く。ゆえに主張を示すためには各 A に対して $\iota_i^{-1}M_A \le \operatorname{Ker} F_c$ なる i を始点にもつ I の射 c が取れればよい。この A を以下固定する。

いま A に対象 i を (必要なら) 付け加えた有限 non-full 部分圏 A' を考えることで、命題 B.3 より次のような性質をもつ I の対象 k と、各 A の対象 $j \in A'$ について I の射 $b_j : j \to k$ が存在する:

- 任意の $a \colon j_1 \to j_2 \in A'$ に対して $b_{j_2} \circ a = b_{j_1} \colon j_1 \to k$ が成り立つ。

また $c := b_i$ と名付ける。ここで初めてフィルター性を使った。

次に射 $\beta \colon \bigoplus F \to F_k$ を次の足し合わせで定義する: A' に入っている対象 j については $F_{b_j} \colon F_j \to F_k$ で、A' に入っていない j については $F_j \to F_k$ は 0。このとき、合成 $M_A \hookrightarrow \bigoplus F \xrightarrow{\beta} F_k$ を考えると、0 になってるのが計算して分かる！厳密には各自やれ。一応かく。つまり A に入ってる射 $a \colon j_1 \to j_2$ について $F_{j_1} \to F_{j_1} \oplus F_{j_2} \to \bigoplus F \xrightarrow{\beta} F_k$ を考えればいいが、これは計算すれば $F_{b_{j_1}} - F_{b_{j_2}} \circ F_a = F_{b_{j_1}} - F_{b_{j_2} \circ a} = 0$ が上の k とかの条件より従う。

何がわかったかというと $M_A \le \operatorname{Ker} \beta$ がわかった。よって $\iota_i^{-1}M_A \le \iota_i^{-1} \operatorname{Ker} \beta = \operatorname{Ker}(\beta \circ \iota_i) = \operatorname{Ker} F_c$ なので従う。**主張の証明終わり。**

定理の証明, (1) $\Rightarrow$ (3) の続き。余極限をとる操作は右完全より、単射を保つことをみればよい。フィルター圏 I から $\mathcal{A}$ への関手の自然変換 $f \colon F \to G$ で各 $f_i : F_i \to G_i$ が単射であるようなものをとる。このときに誘導される $\operatorname{colim} F \to \operatorname{colim} G$ が単射を見れば (3) が従う。この核を N とする。嫌だけどいろいろ名前をつける。各 $i \in I$ について構造射 $F_i \to \operatorname{colim} F$ の像を $\overline{F_i}$、核を L_i、G についても同様 $\overline{G_i}$ と K_i を定める。この L_i と K_i が前の主張で考えていたもの。

まず $\{\overline{F_i} \mid i \in I\}$ は I がフィルターなことから $\operatorname{colim} F$ の部分対象のなかで有向であり、また自然な射 $\bigoplus F \to \operatorname{colim} F$ の全射性から $\operatorname{colim} F = \sum_i \overline{F_i}$ が分かる。よって**仮定 (1) より** $N = N \cap \sum_i \overline{F_i} = \sum_i (N \cap \overline{F_i})$ が成り立つ。よって以下 i を固定して $N \cap \overline{F_i} = 0$ を示せばよい。次の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & L_i \arrow[r, equal] \arrow[d] & L_i \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M_i \arrow[r] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & F_i \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \operatorname{colim} G \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & N \cap \overline{F_i} \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \overline{F_i} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \operatorname{colim} G \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & \operatorname{colim} F \arrow[r] & \operatorname{colim} G
\end{tikzcd}$$

この図式において $0 \to L_i \to M_i \to N \cap \overline{F_i} \to 0$ が完全なことに注意すると、F_i の部分対象として $M_i \le L_i$ を示せばよい。ここで pullback を使えば $M_i = \operatorname{Ker}(F_i \to \operatorname{colim} F \to \operatorname{colim} G) = \operatorname{Ker}(F_i \xrightarrow{f_i} G_i \to \operatorname{colim} G)$ と変形できる。下の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_i \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & F_i \arrow[r] \arrow[d, hook, "f_i"] & \operatorname{colim} G \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & K_i \arrow[r] & G_i \arrow[r] & \operatorname{colim} G
\end{tikzcd}$$

この左の四角は可換性より考えれば pullback になっている。よって $M_i = f_i^{-1}K_i$ が成り立つ。一方**主張より、**

$$K_i = \sum_{a \colon i \to \cdot} \operatorname{Ker} G_a$$

が成り立っており (ここで a は i を始点とする I の射すべて走る)、右辺が有向和なことは I がフィルター圏なことからすぐわかる。なのでまた **(1) の仮定**より、f_i^{-1} は共通部分をとる操作と同一視

できることに注意すると、

$$M_i = f_i^{-1} K_i = f_i^{-1}\Big(\sum_{a\colon i \to \cdot} \operatorname{Ker} G_a\Big) = \sum_{a\colon i \to \cdot} f_i^{-1} \operatorname{Ker} G_a$$

が成り立つ。ここで各 i からの射 $a\colon i \to j$ に対して、$f_i^{-1} \operatorname{Ker} G_a = \operatorname{Ker}(G_a \circ f_i) = \operatorname{Ker}(f_j \circ F_a)$ と変形できる。ここで下の図の可換性をつかった:

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[r, "F_a"] \arrow[d, hook, "f_i"] & F_j \arrow[d, hook, "f_j"] \\ G_i \arrow[r, "G_a"] & G_j \end{tikzcd}$$

よって $f_i^{-1} \operatorname{Ker} G_a = \operatorname{Ker}(f_j \circ F_a) = \operatorname{Ker} F_a \leq L_i$ が各 a について成り立つ (f_j が単射なことより核は取り除いても変わらない)。よって $M_i \leq L_i$ が従う。以上より全て示された。 □

5. アーベル圏の局所化・LOCALIZING SUBCATEGORY

アーベル圏の局所化に関する一般論をしばらく考察し、Grothendieck 圏では localizing subcategory が簡単な特徴付けを持つことを示す。後の Gabriel-Popescu の実現定理への準備という兼ね合いもあるが、十分ここだけでも知っておくべきことがいろいろあるという感じである。

アーベル圏の局所化とは、「アーベル圏をある部分圏で割る」という操作である。たとえば可換環の局所化・前層の層化はこの枠組みで考えられる。この節では、次を見ていく:

- アーベル圏の Serre 部分圏があれば universal に割れる。
- 都合がいい割り方ができる Serre 部分圏として *localizing subcategory* を導入し、商が自然ともとのアーベル圏の部分圏として実現できること (Giraud subcategory) を見て、Giraud subcategory と localizing subcategory の一対一対応を見る。
- Grothendieck 圏の場合は localizing subcategory が簡単な特徴付けを持つのでそれを見る。
- 具体的な例 (可換環の局所化、前層の層化、algebra の頂点の contraction?) を見れたら見る。

まず、一般にアーベル圏に限らずこのような「部分圏を universal に潰す」という操作は存在し、次のようなものがある:

- 群 G があったとき、その部分群 H で universal に割る (H が正規なら商群をとればよく、正規でないなら正規閉包をとって割る)。
- 起点付き位相空間の圏において、部分空間が与えられると、それを潰すことができる。
- 加法圏 $\mathcal{C}$ の部分加法圏 $\mathcal{D}$ があると、$\mathcal{D}$ で生成される両側イデアル $[\mathcal{D}]$ で割ることで新たな加法圏 $\mathcal{C}/[\mathcal{D}]$ ができる。ここで $[\mathcal{D}](X,Y)$ は $\mathcal{D}$ の対象を経由する射全体で、圏 $\mathcal{C}/[\mathcal{D}]$ の対象は $\mathcal{C}$ の対象、射集合は $(\mathcal{C}/[\mathcal{D}])(X,Y) := \mathcal{C}(X,Y)/[\mathcal{D}](X,Y)$ で定義される。
- アーベル圏 $\mathcal{A}$ の Serre 部分圏 $\mathcal{B}$ が与えられると、それの「商アーベル圏」$\mathcal{A}/\mathcal{B}$ が構成できる (これがこの節で見ること)。
- 三角圏の部分三角圏が与えられると、それの「商三角圏」が定義できる (*Verdier* 商、導来圏の構成で使うやつ)。

ここで、余り知られてないけど示唆的な、3 番目の例をより詳しく見ていく。

命題 5.1. *加法圏 $\mathcal{C}$ の加法部分圏 (つまり有限直和で閉じた部分圏) $\mathcal{D}$ に対して、商関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/[\mathcal{D}]$ を考えると次が成り立つ:*

(1) F は $F(\mathcal{D}) = 0$ を満たす加法的関手である。
(2) 任意の $\mathcal{C}$ からの加法的関手 G で $G(\mathcal{D}) = 0$ を満たすものがあれば、それは F を (自然変換を除いて) 一意的に経由する。
(3) $\operatorname{Ker} F := \{C \in \mathcal{C} \mid F(C) = 0\}$ は、$\mathcal{D}$ の直和因子から成り立つ部分圏である。

証明はやればできる。ここで (1) と (2) は商関手の普遍性を、(3) は、実は商として適切なものは単なる加法部分圏でなく「直和因子で閉じた加法部分圏」であることに対応している。これは、この pdf ではやらないが、三角圏の Verdier 商において、任意の三角部分圏で局所化することはできる

が、そこで消えるのは直和因子も消えるので、「直和因子で閉じた三角部分圏 = thick subcategory」が割るのに適切な部分圏であることに対応している。意外と、加法圏のイデアル商のほうが構成も何もかも簡単であるのにあまり知られていない。

つまりやりたいことは、「アーベル圏とそのアーベル圏の構造を保つ関手 (=完全関手) の中で (2-圏的に)、その充満部分圏による商を構成したい」ということである。するとまず考えるべきは、完全関手で消える部分圏は何かということであるが次がすぐに分かる:

命題 5.2. アーベル圏の間の完全関手 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対して、$\operatorname{Ker} F := \{A \in \mathcal{A} \mid F(A) = 0\}$ とすると、$\operatorname{Ker} F$ は $\mathcal{A}$ の *Serre* 部分圏になる。

証明. 定義からすぐ。 □

実は逆に、Serre 部分圏があれば割ることができる、というのが最初にやるべきことである。

注意 5.3. アーベル圏より三角圏のほうが対称性が高い関係上、逆に三角圏での Verdier 商のほうがいろいろ見通しがよかったりする (核と余核をいっぺんに扱えたりするので)。この pdf では三角圏はやらないが。

5.1. **局所化の定義.** また局所化と言ったら、部分圏を指定するのではなく射集合を指定して、それを無理やり同型射にする操作、とする見方もある。定式化のためいろいろ普遍性を定義する。

定義 5.4. 圏 $\mathcal{C}$ の射の集まり $\mathcal{W}$ が与えられたとき、**局所化** *(localization)* $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ を (存在すれば) 次の普遍性を満たす関手で定義する。

- T により $\mathcal{W}$ の射は同型射に飛ぶ。
- $\mathcal{C}$ からの別の関手 $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が、同じく $\mathcal{W}$ の射を同型射に飛ばすなら、G は T を一意的に経由する。

また、$\mathcal{C}$ が前加法圏である場合、$\mathcal{W}$ に対する**加法的局所化** *(additive localization)* とは、前加法圏 $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ への加法的関手 $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ であり、上の普遍性のところを前加法圏や加法的関手に置き換えたものが成り立つときをいう。

ここで、局所化の普遍性は少し強いものを仮定していることに注意。実際、この定義による局所化は存在すれば「圏同型」になる。圏論をやっている人は、この定義は少し強すぎて、存在すれば「圏同値」になるようなもののほうがよいと思うのが自然だろう。実は圏の局所化の普遍性は上よりも少し弱いバージョンを用いる (本稿では *2* **局所化**と呼ぶ) こともあり、それとの関連についてや、局所化周辺の general なことを Appendix にまとめた。普遍性については D.1 参照のこと。

注意 5.5. 集合論的な注意をしておく。

- まず大抵の場合、$\mathcal{W}$ は集合ではない (つまり universe 的には $\mathcal{U}$-small ではないただの集合である)。
- 集合論的事柄を無視すれば、無理やり $\mathcal{W}$ の射の形式的逆を付け加えて圏にすることで、大きい"圏" $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ は構成できる。以下の構成ではこのようなことはせず、少なくとも Serre 部分圏に関する場合は、きちんと圏になる (つまり各対象の間の射集合が small になる) ことを確認する。似たような注意は導来圏を考えるときにも必要。

また、加法的局所化と普通の局所化が一致しない例を著者はよく知らない。

これに対して、アーベル圏の場合は先に述べたように、考える関手に「完全関手である」という制約をつけた上で考える。

定義 5.6. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の部分圏 $\mathcal{B}$ が与えられたとき、次の普遍性で局所化 $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{B}$ を (存在すれば) 定義する:

(1) $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ はアーベル圏であり、T は完全関手で $T(\mathcal{B}) = 0$ を満たす。
(2) $\mathcal{A}$ からアーベル圏への完全関手 $\mathcal{G}$ が $\mathcal{G}(\mathcal{B}) = 0$ を満たすなら、$\mathcal{G}$ は一意的に T を経由する。

実はアーベル圏の上の局所化は、射の局所化の特殊な場合だと思えることが以下でわかっていく。

注意 5.7. 前のバージョンでは、アーベル圏の射の集まりが与えられたときの局所化を、完全関手に制限して考えていたが、これは射の集まりでの局所化の通常の定義と compatible になるかが危ういので、変更した。

アーベル圏の部分圏についての局所化は、実は Serre 部分圏に限定して考えてよいことがすぐ次から分かる。

命題 5.8. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の部分圏 $\mathcal{B}$ に対して次が成り立つ*:*

(1) $\mathcal{B}$ を含む最小の *Serre* 部分圏 $\mathcal{S}$ が存在する。
(2) $\mathcal{A}$ からアーベル圏への完全関手 T に対して、$T(\mathcal{S})=0$ と $T(\mathcal{B})=0$ は同値である。よって局所化 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ と $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ は *(*存在したら*)* 同じものである。

証明. (1) よく知られていると思う。集合論的な事柄を無視すれば、$\mathcal{C}$ を含む Serre 部分圏全ての中で (これは $\mathcal{A}$ があるので空でない) 共通部分を取れば良い。具体的な構成もできる、あとで書くかも。

(2) $T(\mathcal{B})=0$ なら $T(\mathcal{S})=0$ を言えばよいが、$\operatorname{Ker} T$ は $\mathcal{B}$ を含む Serre 部分圏より $\mathcal{S}\subset \operatorname{Ker} T$ が従い、よって $T(\mathcal{S})=0$ となる。 □

よって以下はアーベル圏の Serre 部分圏による局所化のみ考えれば良い。

5.2. **Serre 部分圏による局所化.** おそらく多分 Gabriel (か Serre か Grothendieck?) が構成した方法で、well-powered なアーベル圏 $\mathcal{A}$ の Serre 部分圏 $\mathcal{S}$ が与えられたとき、局所化 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ を構成できる。この部分は [Po] に従う。**以下、$\mathcal{A}$ を** *well-powered* **なアーベル圏、$\mathcal{S}$ をその** *Serre* **部分圏とする。** このときに商を具体的に構成していく。そのために、可逆にしたい射の集まりを考えて、それをまず局所化して、それが実はアーベル圏への完全関手になっている、という論理をとる。

まず局所化でよくあるのは、要請される普遍性から、関手 $\mathcal{A}\to\mathcal{A}/\mathcal{S}$ は本質的全射でなければならないと推測できる。よって商圏の対象は $\mathcal{A}$ の対象と変えずに、射集合を適切に変えればよいだろうという発想になる。

射集合を考えるときの予備考察として、局所化 $T\colon \mathcal{A}\to\mathcal{A}/\mathcal{S}$ がもしあったとして何が起こるか考える。このとき $X'\le X$ と $Y'\le Y$ という 2 つの部分対象で、X/X' と Y' が $\mathcal{S}$ に入るものを考える。重要なのは T が完全なので、$0\to X'\to X\to X/X'\to 0$ という完全列から $0\to TX'\to TX\to T(X/X')\to 0$ が完全で、しかし $X/X'\in\mathcal{S}$ なので $TX'\simeq TX$ が成り立つ (Y についても同様)。このとき $\mathcal{A}$ での射 $X'\to Y/Y'$ が与えられれば、次の図式が $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ でできるはずである。

$$\begin{tikzcd}
TX' \arrow[d, hook, "\simeq"] \arrow[dr] & TY \arrow[d, two heads, "\simeq"] \\
TX & T(Y/Y')
\end{tikzcd}$$

ここで先程の注意より、逆射を適切に合成することで、射 $TX\to TY$ が一つ定まる。実は、このような射 $X'\to Y/Y'$ のみを考えれば (Serre 部分圏の場合には) ある意味十分であるというのが後から分かる。よって次のように定義する。

構成 5.9. 圏 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ を次で定義する (圏になっていることなどは後で確認する)。

- $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ の対象は $\mathcal{A}$ の対象と同じ。
- $X,Y\in\mathcal{A}$ に対して、$(\mathcal{A}/\mathcal{S})(X,Y)$ を次の帰納極限で定義する:

$$(\mathcal{A}/\mathcal{B})(X,Y) := \varinjlim_{(X',Y')} \mathcal{A}(X', Y/Y').$$

ここで極限の添字集合は、$\{\,(X',Y')\mid X/X',\, Y'\in\mathcal{S}\}$ という集合であり、その上の半順序は $(X_1,Y_1)\le(X_2,Y_2)$ を $X_2\le X_1$ かつ $Y_1\le Y_2$ で定義し、このとき次の図式

$$\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[r, hook] \arrow[dr, dashed] & X_1 \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & \\
& Y/Y_1 \arrow[r, two heads] & Y/Y_2
\end{tikzcd}$$

で示される射 $\mathcal{A}(X_1, Y/Y_1) \to \mathcal{A}(X_2, Y/Y_2)$ に関する帰納極限である。仮定より $\mathcal{A}$ の対象の間の射集合は$\mathcal{U}$-small なので、$\mathcal{U}$-small なアーベル群の帰納極限として得られる $(\mathcal{A}/\mathcal{S})(X, Y)$ も $\mathcal{U}$-small である。

注意 5.10. 上の添字集合 $\{\,(X', Y') \mid X/X',\, Y' \in \mathcal{S}\}$ が有向集合なことは次のようにして分かる ($\mathcal{S}$ が Serre であることを用いるので要注意): 2 つの元 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ の上限は $(X_1 \cap X_2, Y_1 + Y_2)$ で与えられる。この元が先の集合に含まれることは、単射 $X/(X_1 \cap X_2) \hookrightarrow X/X_1 \oplus X/X_2$ と全射 $Y_1 \oplus Y_2 \twoheadrightarrow Y_1 + Y_2$ と、$\mathcal{S}$ が有限直和・部分対象・商対象で閉じることから従う。

以下次のことを順に示していく (ちゃんとやろうとするとめんどい、特に圏になるところ):

- $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 上では合成が定義でき、それに関して圏の公理を満たす (集合論的な事項はすでに確認した)。
- $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ は加法圏であり、自然な加法的関手 $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ が定義できる。
- 射の集まり $\mathcal{W}$ を、$\mathcal{W} := \{f \in \mathsf{Mor}(\mathcal{A}) \mid \operatorname{Ker} f, \operatorname{Coker} f \in \mathcal{S}\}$ とすると、T は実は局所化 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}[\mathcal{W}^{-1}]$ の普遍性 (定義 5.4 を満たす)。
- $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ はアーベル圏となり、自然な関手 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ は完全関手である。
- $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ は定義 5.6 の普遍性を満たす。実際は、定義 5.4 での普遍性を満たすことを確認し、そこから従わせる。

($\mathcal{A}/\mathcal{S}$ における合成の構成)
次のように合成する: まず $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ での対象 X から Y への射は、アーベル群の帰納極限の構成に注意すると、ある (X', Y') という先の条件を満たす組についての射 $X' \to Y/Y'$ から来ることに注意。$\mathcal{A}$ の対象 X, Y, Z と、$\mathcal{A}/\mathcal{S}$ の射を定義するような $\mathcal{A}$ 内の 2 つの射 $X_a \to Y/Y_b$, $Y_c \to Z/Z_d$ に対して (それぞれは X, Y, Z の部分対象で先の条件を満たすもの)、次の図式を考える:

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
 & & Y_b \cap Y_c \arrow[r, two heads] \arrow[d] & Z'_d/Z_d \arrow[d] \\
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & Y_c \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & Z/Z_d \arrow[d] \\
X'_a \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & (Y_b + Y_c)/Y_b \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & Y_c/(Y_b \cap Y_c) \arrow[r] \arrow[d] & Z/Z'_d \arrow[d] \\
X_a \arrow[r] \arrow[d] & Y/Y_b \arrow[d] & 0 & 0 \\
X_a/X'_a \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y/(Y_b + Y_c) \arrow[d] & & \\
0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

つまり pullback とか pushout をとって図をつくり、第なんとか同型定理より真ん中の同型射がつながる。ここで縦の列は完全である。Pullback や pushout は単射全射を保つので X'_a, Z'_d はそれぞれ X, Z の部分対象となってることに注意。このとき真ん中をつなげて $X'_a \to Z/Z'_d$ ができるが、これがきちんと $(\mathcal{A}/\mathcal{C})(X, Z)$ の元を定めているか見るには次を見ねばならない。

(主張). $X/X'_a, Z'_d \in \mathcal{S}$ が成り立つ。 実際、pullback と pushout の話から、上図における誘導される射 $X_a/X'_a \hookrightarrow Y/(Y_b + Y_c)$ は単射なことがチェックできる。$Y/Y_c \twoheadrightarrow Y/(Y_b + Y_c)$ という全射の存在と、$Y/Y_c \in \mathcal{S}$ なことから、$\mathcal{S}$ が商で閉じることより $Y/(Y_b + Y_c)$ は $\mathcal{S}$ に入り、$\mathcal{S}$ が部分対象で閉じることから $X_a/X'_a \in \mathcal{S}$ となる。一方 X/X'_a は X_a/X'_a と X/X_a の拡大より、$\mathcal{S}$ が拡大で閉じるので X/X'_a が $\mathcal{S}$ に入ることがわかる。Z'_d についても同様の議論でわかる。

よって射 $X'_a \to Z/Z'_d$ があらわす $(\mathcal{A}/\mathcal{S})(X,Z)$ の元がとれる。これについて次を確認せねば:

- この操作は well-defined、つまり帰納極限の元の代表元によらない。
- この合成は結合的であり、また恒等射 $X = X$ がきちんと恒等射として振る舞う。

めんどくさいがやらなければならないのでやっておこう。

(合成の操作が代表元のとり方によらないこと) 帰納極限なことに注意すると、先程のような $X_a \to Y/Y_b$ と $Y_c \to Z/Z_d$ に対して、結局次を示せばよい:

(1) X_a を取り替える。つまり $X_\alpha \hookrightarrow X_a$ で $X/X_\alpha \in \mathcal{S}$ なるものについて、$X_\alpha \hookrightarrow X_a \to Y/Y_b$ と $Y_c \to Z/Z_d$ について上の操作をした結果が、$X_a \to Y/Y_b$ と $Y_c \to Z/Z_d$ に対して上の操作をした結果と同値か見る。
(2) Z/Z_d を取り替える。
(3) Y/Y_b を取り替える。
(4) Y_c を取り替える。

証明. (1)

$$\begin{tikzcd}
 & & & Y_c \arrow[r] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & Z/Z_d \arrow[d, two heads] \\
X'_\alpha \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X'_a \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & (Y_b+Y_c)/Y_b \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, hook] & Y_c/(Y_b \cap Y_c) \arrow[r] & Z/Z'_d \\
X_\alpha \arrow[r, hook] & X_a \arrow[r] & Y/Y_b & &
\end{tikzcd}$$

上のように、$X_a \to Y/Y_b$ と $Y_c \to Z/Z_d$ を合成したときの図式に、ちょっとだけ X_α の部分を追加して pullback をとれば $X_\alpha \hookrightarrow X_a \to Y/Y_b$ と $Y_c \to Z/Z_d$ の合成ができる。よって真ん中みてみれば、出てきた結果は $X'_\alpha \hookrightarrow X'_a$ を前から合成しただけなので、同値なものが出てくる。

(2) は (1) の双対。

(3) $X_a \to Y/Y_b$ を $X_a \to Y/Y_b \twoheadrightarrow Y/Y_\beta$ で取り替えて合成を計算すると、下の図ができる。

$$\begin{tikzcd}
 & & & Y_c \arrow[r] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & Z/Z_d \arrow[d, two heads] \\
X'_a \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & (Y_b+Y_c)/Y_b \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[d, hook] & & Y_c/(Y_b \cap Y_c) \arrow[r] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & Z/Z'_d \arrow[d, two heads] \\
X'_\alpha \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & (Y_\beta+Y_c)/Y_b \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\text{b.c.}"] & (Y_\beta+Y_c)/Y_\beta \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, hook] & Y_c/(Y_\beta \cap Y_c) \arrow[r] & Z/Z'_\delta \\
X_a \arrow[r] & Y/Y_b \arrow[r, two heads] & Y/Y_\beta & &
\end{tikzcd}$$

(b.c. は pullback かつ pushout なこと。ここでは pullback なことのみ使う。) 上の図で、第 2 行目が取り替える前の合成の結果、第 3 行目が取り替えた後の合成の結果である。その二つが $(\mathcal{A}/\mathcal{S})(X,Z)$ の中で同値なことは、可換性よりすぐ分かる。

(4) これは (3) の双対だが、図を書くのが楽しいので一応図だけ書いて満足しておく。$Y_c \to Z/Z_d$ を $Y_\gamma \hookrightarrow Y_c \to Z/Z_c$ に置き換える。

$$\begin{tikzcd}
 & & Y_\gamma \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\text{b.c.}"] & Y_c \arrow[r] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & Z/Z_d \arrow[d, two heads] \\
X'_\alpha \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & (Y_b+Y_\gamma)/Y_b \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, hook] & Y_\gamma/(Y_b \cap Y_\gamma) \arrow[r, hook] & Y_c/(Y_b \cap Y_\gamma) \arrow[r] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & Z/Z'_\delta \arrow[d, two heads] \\
X'_a \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & (Y_b+Y_c)/Y_b \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[d, hook] & & Y_c/(Y_b \cap Y_c) \arrow[r] & Z/Z'_d \\
X_a \arrow[r] & Y/Y_b & & &
\end{tikzcd}$$

□

(恒等射が合成について恒等的に振る舞うこと)

$$\begin{tikzcd}
 & & Y_c \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & Z/Z_d \arrow[d, equal] \\
Y_c \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & Y_c \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & Y_c \arrow[r] & Z/Z_d \\
Y \arrow[r, equal] & Y & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & Y \arrow[r, equal] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & Y \arrow[d, equal] \\
X_a \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & Y/Y_b \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & Y/Y_b \arrow[r, equal] & Y/Y_b \\
X_a \arrow[r] & Y/Y_b & &
\end{tikzcd}$$

からわかる。

(合成が結合的である). これが一番死ぬほどめんどくさい。誰か簡単な証明を知っていたら教えてください。方針としては、真ん中の射を同値なものにうまく取り替えてやって、そのあと図式をおっかける形。同値なものに取り替えなくても単なる diagram chasing だけでできそうだけど、pullback や pushout に対するめっちゃ非自明な結果を示さなきゃいけないっぽい（そこから束のモジュラー性まで言えちゃうようなこと）なので、よく分からない。

証明. $X_a \xrightarrow{f} Y/Y_b$, $Y_c \xrightarrow{g} Z/Z_d$, $Z_e \xrightarrow{h} W/W_f$ という 3 つの、それぞれ X から Y、Y から Z、Z から W への $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ での射を取ってくる。

(Step 1): Z_d を取り替える。感じとしては、f と g を合成するときに Z/Z_d 側で pushout を取るが、予め pushout しておいたものを Z/Z_d と新たに置き直してやることで、pushout をとらず $=$ で結ぶことができるようにする。具体的には、f と g を合成したときを考えて、$g(Y_b \cap Y_c) + Z_d$ をあらたに Z_d と置いてやる。これは f と g を合成したときに pushout したときに出てくる Z'_d のことで、このように g を $Y_c \xrightarrow{g} Z/Z_d \twoheadrightarrow Z/Z'_d$ に置き換えることで $g(Y_b \cap Y_c) = 0$ とできる。以下 Z'_d のことを Z_d、合成した上の写像のことを g と呼ぶことにする。

(Step 2): Y_c を取り替える。今度は同様の操作を、g と h を合成することを念頭に置いてやってやる。注意としては、ここでの g は既に取り替えたあとの g である。これに対して、具体的には $g^{-1}((Z_d + Z_e)/Z_d)$ を新たに Y_c と置き直してやる。これは先程のように、g と h を素直に合成したときに pullback して出てくる Y'_c のことである。このように Y_c を小さくして再び g を取り替えることで、$g^{-1}((Z_d + Z_e)/Z_d) = Y_c$ とできる。

ここで再び注意。(Step 1) で $g(Y_b \cap Y_c) = 0$ となるよう Z_d を既に取り替えたが、その g に対して (Step 2) の操作をしても、Y_c が小さくなるだけなので、再び $g(Y_b \cap Y_c) = 0$ という等式は成り立つ！

(Step 3): 後は以下の図式を眺める。

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & Z_e \arrow[r, "h"] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & W/W_f \arrow[d, two heads] \\
 & & Y_c \arrow[r] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, "g"] & (Z_d+Z_e)/Z_d \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, hook] & Z_e/(Z_d \cap Z_e) \arrow[r] & W/W'_f \\
X'_a \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & (Y_b+Y_c)/Y_b \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, hook] & Y_c/(Y_b \cap Y_c) \arrow[r] & Z/Z_d & & \\
X_a \arrow[r, "f"'] & Y/Y_b & & & &
\end{tikzcd}
$$

ここで第 2 行目がちょうど g と h を合成した結果、第 3 行目がちょうど f と g を合成した結果になっていることに注意。次にこの真ん中の正方形に注目する:

$$
\begin{tikzcd}
Y_c \arrow[r] \arrow[d, two heads] & (Z_d+Z_e)/Z_d \arrow[d, hook] \\
Y_c/(Y_b \cap Y_c) \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\overline{g}"] & Z/Z_d
\end{tikzcd}
$$

ここで左上から右下へ合成したものが g である。単射性と可換性を使えば、$Y_c \to (Z_d+Z_e)/Z_d$ において $Y_b \cap Y_c$ が 0 に行くことがわかり、準同型定理 (余核の普遍性) より、左上の三角を可換にするような点線が存在する。また全射を前から合成することにより、右下の三角も可換なことがわかる。この射を $\overline{g}$ と名付け、もとの図に戻ろう:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & Z_e \arrow[r, "h"] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & W/W_f \arrow[d, two heads] \\
 & & Y_c \arrow[r] \arrow[d, two heads] & (Z_d+Z_e)/Z_d \arrow[r, red, "\simeq"] \arrow[d, hook] & Z_e/(Z_d \cap Z_e) \arrow[r, red] & W/W'_f \\
X'_a \arrow[r, red] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & (Y_b+Y_c)/Y_b \arrow[r, red, "\simeq"] \arrow[d, hook] & Y_c/(Y_b \cap Y_c) \arrow[r] \arrow[ur, red, "\overline{g}"] & Z/Z_d & & \\
X_a \arrow[r, "f"'] & Y/Y_b & & & &
\end{tikzcd}
$$

主張は、$(f \circ g) \circ h$ も $f \circ (g \circ h)$ も、ともに赤い矢印をつなげたものになるというものである。

$(f \circ g) \circ h$ について考えよう。まず $f \circ g$ を計算することで第 3 行目ができる。次にこの $X'_a \to Z/Z_d$ に h を合成するときに、この射を $(Z_d+Z_e)/Z_d \hookrightarrow Z/Z_d$ で pullback する。しかし、次の図式

$$
\begin{tikzcd}
Y_c/(Y_b \cap Y_c) \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, equal] & (Z_d+Z_e)/Z_d \arrow[d, hook] \\
Y_c/(Y_b \cap Y_c) \arrow[r] & Z/Z_d
\end{tikzcd}
$$

は pullback になっていることが (単射性を用いて) 容易に確認できる。よって、(pullback は合成射に対してうまく振る舞うことを思い出せば) $X'_a \to Z/Z_d$ を $(Z_d+Z_e)/Z_d \hookrightarrow Z/Z_d$ で pullback した結果は、赤い矢印を $\overline{g}$ まで合成したものになっている！よって、$f \circ g$ に h を合成したものは赤い矢印を全てつなげたものである。$f \circ (g \circ h)$ については完全に同様なので省略する。こちらでのキモ

は、双対的に、

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \cdot \arrow[d, equal] \\
\cdot \arrow[r] & \cdot
\end{tikzcd}$$

という図式が必ず pushout になることである。 □

以上のことと、少しの観察をすると次がわかる。

命題 5.11. $\mathcal{A}$ を *well-powered* なアーベル圏、$\mathcal{S}$ をその *Serre* 部分圏とすると、上述の構成により圏 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ ができる。またこの圏は加法圏であり、対象 X を X に移す自然な加法的関手 $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ が定義できる。

証明. 関手 T が定義できるのはすぐ分かる (対象に対して恒等的、射については $X \to Y$ をそのまま $X \to Y$ に移せばよい)。

次に加法圏になること。$\mathcal{A}/\mathcal{S}$ の射集合はアーベル群の帰納極限よりアーベル群である。合成が双線形なことを簡単に確認する。$\mathcal{A}/\mathcal{S}$ における射 $\overline{f_1}, \overline{f_2}\colon X \to Y$ と射 $\overline{g}\colon Y \to Z$ に対して、$\overline{g} \circ (\overline{f_1} + \overline{f_2}) = \overline{g} \circ \overline{f_1} + \overline{g} \circ \overline{f_2}$ を示せばよい。$\overline{f_1}, \overline{f_2}$ は帰納極限の元なので、必要なら代表元をとりかえることで、ともに同じ定義域と値域をもつ $\mathcal{A}$ における射 $f_1, f_2\colon X_a \to Y/Y_b$ から来ているようにできる。また $\overline{g}$ の代表元を $\mathcal{A}$ での射 $Y_c \to Z/Z_d$ とする。$g \circ f_i$ の合成の操作を念頭に置くと、$f_i^{-1}((Y_b + Y_c)/Y_b)$ を $i = 1, 2$ 考える (pullback をとる) が、結合性の証明でやったように、はじめから X_a を小さく取り直してやることにより、$g \circ f_i$ の合成の図式は次のようになる:

$$\begin{tikzcd}
 & & Y_c \arrow[r, "g"] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & Z/Z_d \arrow[d, two heads] \\
X_a \arrow[r, "f_i'"] \arrow[d, equal] & (Y_b + Y_c)/Y_b \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, hook] & Y_c/(Y_b \cap Y_c) \arrow[r] & Z/Z_d' \\
X_a \arrow[r, "f_i"] & Y/Y_b & &
\end{tikzcd}$$

ここで f_i' は f_i の値域を制限したものと考えられる。このとき次の図式を見る:

$$\begin{tikzcd}
 & & Y_c \arrow[r, "g"] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & Z/Z_d \arrow[d, two heads] \\
X_a \arrow[r, "f_1'+f_2'"] \arrow[d, equal] & (Y_b + Y_c)/Y_b \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, hook] & Y_c/(Y_b \cap Y_c) \arrow[r] & Z/Z_d' \\
X_a \arrow[r, "f_1+f_2"] & Y/Y_b & &
\end{tikzcd}$$

この図式は先程から左下の四角のみを取り替えたものであるが、可換である (もちろん $\mathcal{A}$ における合成が双線形なことを使う)。しかし、結合性の証明で見たように、この左下の形の可換図式は必ず pullback になる！よって、この図式は $\overline{g} \circ (\overline{f_1 + f_2}) = \overline{g} \circ (\overline{f_1} + \overline{f_2})$ を計算するものになっており、先程の $\overline{g} \circ \overline{f_i}$ の計算図式と比較することで、違う部分は赤い部分のみである。よって (もちろん $\mathcal{A}$ の合成が双線形なことを使えば) 二つの図式の真ん中の段の射は和の関係にあり、$\overline{g} \circ (\overline{f_1} + \overline{f_2}) = \overline{g} \circ \overline{f_1} + \overline{g} \circ \overline{f_2}$ が成り立つ。

以上により $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ は前加法圏であり、構成より T は加法的関手である。$\mathcal{A}/\mathcal{S}$ が有限直和を持つことは、$T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{A}/\mathcal{S}$ が加法的関手なことと対象について全射であることから直ちに従うことが確認できる (加法圏における有限直和は完全に射についての等式で特徴づけられたので)。 □

次に示すのは、射の集まり $\mathcal{W}$ を、$\mathcal{W} := \{f \in \mathsf{Mor}(\mathcal{A}) \mid \operatorname{Ker} f, \operatorname{Coker} f \in \mathcal{S}\}$ とすると、T は局所化 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}[\mathcal{W}^{-1}]$ の普遍性 (定義 5.4) を満たすこと。そのためにまず T により $\mathcal{W}$ の射が同型射に移ることを見たい。

補題 5.12. $\mathcal{A}$ の対象 X の部分対象 X' が $X' \in \mathcal{S}$ を満たすなら、自然な全射 $X \twoheadrightarrow X/X'$ の $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ での像は同型射。同様に $\mathcal{A}$ の対象 Y の部分対象 Y' が $Y/Y' \in \mathcal{S}$ なら、自然な単射 $Y' \hookrightarrow Y$ の $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ での像は同型射。

証明. $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ での射 $X/X' \to X$ を、$X/X' \xrightarrow{=} X/X'$ という射が代表する $(\mathcal{A}/\mathcal{S})(X/X', X)$ の元で定めると、これが $X \to X/X'$ の逆射となることを確かめる。まず $X \to X/X' \to X$ を計算しよう:

$$\begin{tikzcd}
 & & X/X' \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & X/X' \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X/X' \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & X/X' \arrow[r, equal] & X/X' \\
X \arrow[r, two heads] & X/X' & &
\end{tikzcd}$$

いろいろこんがらがりそうだが、これが $X \to X/X' \to X$ の合成の結果で、つまり自然な全射 $X \twoheadrightarrow X/X'$ が代表する $(\mathcal{A}/\mathcal{S})(X, X)$ の元が出てくる。これは恒等射 $X = X$ と同値なことは定義よりすぐ。

次に $X/X' \to X \to X/X'$ を計算しよう:

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & X/X' \arrow[d, equal] \\
X/X' \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X/X' \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & X/X' \arrow[r, equal] & X/X' \\
X/X' \arrow[r, equal] & X/X' & &
\end{tikzcd}$$

こんがらがらなければ上の図式ができて、よって合成は恒等射 $X/X' = X/X'$ になることが分かる。

$Y' \hookrightarrow Y$ の方も同様だが、せっかくなので関連する図だけ乗せる。逆射は $Y' \xrightarrow{=} Y'$ が代表する $(\mathcal{A}/\mathcal{S})(Y, Y')$ の元である。まず $Y' \to Y \to Y'$ のほう。

$$\begin{tikzcd}
 & & Y' \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & Y' \arrow[d, equal] \\
Y' \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & Y' \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & Y' \arrow[r, equal] & Y' \\
Y' \arrow[r, hook] & Y & &
\end{tikzcd}$$

次に $Y \to Y' \to Y$ のほう。

$$\begin{tikzcd}
 & & Y' \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & Y \arrow[d, equal] \\
Y' \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & Y' \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r, hook] & Y \\
Y' \arrow[r, equal] & Y' & &
\end{tikzcd}$$

□

この補題を使って次が分かる:

命題 5.13. $\mathcal{A}$ を *well-powered* なアーベル圏、$\mathcal{S}$ をその *Serre* 部分圏、$T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ を自然な関手とする。$\mathcal{A}$ の射の集まり $\mathcal{W}$ を、$\mathcal{W} := \{f \in \mathsf{Mor}(\mathcal{A}) \mid \operatorname{Ker} f, \operatorname{Coker} f \in \mathcal{S}\}$ とすると、T は局所化・加法的局所化の普遍性 *(*定義 *5.4)* を満たし、

証明. まず $\mathcal{W}$ の射が T により同型射に飛ぶことを見る。そのため $f\colon X \to Y$ で $\operatorname{Ker} f, \operatorname{Coker} f \in \mathcal{S}$ なるものをとると、次の $\mathcal{A}$ における可換図式

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, two heads] & Y \\
X/\operatorname{Ker} f \arrow[r, "\simeq"] & \operatorname{Im} f \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

を $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ に送ると、先程の補題 5.12 により左と右の縦の射はともに同型射。よって f の像も同型射である。

関手 $G\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が $\mathcal{W}$ の射を可逆にするとき、関手 $\overline{G}\colon \mathcal{A}/\mathcal{S} \to \mathcal{B}$ を次で定める:

- 対象については、$\mathcal{A}/\mathcal{S}$ の対象は $\mathcal{A}$ の対象と同じなので、$\overline{G}(A) := G(A)$ で定義する。
- 射について。$X \xrightarrow{\overline{f}} Y$ in $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ をとってくると、これは $X_a \xrightarrow{f} Y/Y_b$ という $\mathcal{A}$ での射 f で代表される。次の $\mathcal{A}$ での図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
X_a \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr, "f"] & X \\
Y \arrow[r, two heads, "\pi"] & Y/Y_b
\end{tikzcd}$$

  これを自然な関手 T で $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ に送ると、次が得られる:

$$\begin{tikzcd}
X_a \arrow[r, "T\iota", "\simeq"'] \arrow[dr, "Tf"] & X \\
Y \arrow[r, "T\pi", "\simeq"'] & Y/Y_b
\end{tikzcd}$$

  ここで補題 5.12 より $T\iota$ と $T\pi$ は同型である。このとき $\overline{f} = (T\pi)^{-1} \circ Tf \circ (T\iota)^{-1}$ であることが、$T\pi$ や $T\iota$ の逆射を落ち着いて合成してやることで、容易に確認できる。

  一方、先程の $\mathcal{A}$ での図式を G で飛ばす:

$$\begin{tikzcd}
GX_a \arrow[r, "G\iota", "\simeq"'] \arrow[dr, "Gf"] & GX \\
GY \arrow[r, "G\pi", "\simeq"'] & G(Y/Y_b)
\end{tikzcd}$$

  ここで $G\iota$ と $G\pi$ は、ι と π が $\mathcal{W}$ に入っているので、仮定より可逆である。このような $\mathcal{B}$ での図式ができるので、$\overline{G}f := (G\pi)^{-1} \circ Gf \circ (G\iota)^{-1}$ と定義する。この定義が $\overline{f}$ の代表系によらないこと、つまり X_a や Y_b を取り替えても変わらないことは、次を眺めればわかる:

$$\begin{tikzcd}
GX'_a \arrow[r, "\simeq"] & GX_a \arrow[r, "G\iota", "\simeq"'] \arrow[dr, "Gf"] & GX & \\
& GY \arrow[r, "G\pi", "\simeq"'] & G(Y/Y_b) \arrow[r, "\simeq"] & G(Y/Y'_b)
\end{tikzcd}$$

  よって射を射にうつすことができた。この操作が恒等射を保つことは明らか。合成を示そう。$X \xrightarrow{\overline{f}} Y$ と $Y \xrightarrow{\overline{g}}$ という $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ での射があったとする。それぞれの代表系を $X_a \xrightarrow{f} Y/Y_b$ と $Y_c \xrightarrow{g} Z/Z_d$ として、何回かやった操作により代表系を適切に取り替えることで、次の図

式ができる。

$$
\begin{tikzcd}
 & & Y \arrow[d, hook, blue] & Z \arrow[d, two heads, blue] \\
 & & Y_c \arrow[r] \arrow[d, two heads] & Z/Z_d \arrow[d, equal] \\
X_a \arrow[r] \arrow[d, equal] & (Y_b+Y_c)/Y_b \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, hook] & Y_c/(Y_b\cap Y_c) \arrow[r] & Z/Z_d \\
X_a \arrow[r] \arrow[d, hook, blue] & Y/Y_b & & \\
X & Y \arrow[u, two heads, blue] & &
\end{tikzcd}
$$

これを G で飛ばすと次のようになる:

$$
\begin{tikzcd}
 & & GY \arrow[d, blue, "\simeq"] & Z \arrow[d, blue, "\simeq"] \\
 & & GY_c \arrow[r] \arrow[d, two heads] & G(Z/Z_d) \arrow[d, equal, red] \\
GX_a \arrow[r, red] \arrow[d, equal, red] & G((Y_b+Y_c)/Y_b) \arrow[r, red, "\simeq"] \arrow[d] & G(Y_c/(Y_b\cap Y_c)) \arrow[r, red] & G(Z/Z_d) \\
GX_a \arrow[r] \arrow[d, blue, "\simeq"] & G(Y/Y_b) & & \\
GX & GY \arrow[u, blue, "\simeq"] & &
\end{tikzcd}
$$

まず合成してから $\overline{G}$ で飛ばすと、赤い射の合成に、前と後ろから、青い同型射をつなげることで $\overline{G}(\overline{g}\circ\overline{f})\colon GX\to GZ$ ができる。

一方 $\overline{G}$ で飛ばしてから合成することを考えると、

$$
\begin{tikzcd}
X_a \arrow[r, red] \arrow[d, hook, red] & Y/Y_b & Y \arrow[l, two heads, red] & Y_c \arrow[l, hook', red] \arrow[r, red] \arrow[d, two heads, blue] & Z/Z_d \\
X & (Y_b+Y_c)/Y_b \arrow[u, hook, blue] \arrow[rr, dash, blue, "\simeq"] & & Y_c/(Y_b\cap Y_c) & Z \arrow[u, two heads, red]
\end{tikzcd}
$$

上の赤い射を、G で移して左下から右下までつなげたものが合成射 $\overline{G}\overline{g}\circ\overline{G}\overline{f}$ である。一方上の図式に出てくる四角形は可換なことが確認できる。なので、途中で青い経路を迂回しても結果は変わらない (青い射はすべて $\mathcal{W}$ に入っていて、よって $\mathcal{B}$ に G で飛ばすと同型なことに注意しよう)。しかしこの迂回路をよく見ると、これは $\overline{G}(\overline{g}\circ\overline{f})$ と一致している。よって $\overline{G}\overline{g}\circ\overline{G}\overline{f}=\overline{G}(\overline{g}\circ\overline{f})$ が成り立つ。

以上により関手 $\overline{G}\colon\mathcal{A}/\mathcal{S}\to\mathcal{B}$ が構成でき、構成の仕方より $\overline{G}\circ T=G$ が成り立つ。一意性は明らかである。また $\mathcal{B}$ が前加法圏で $G\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ が加法的関手のとき、構成の仕方より $\overline{G}$ は加法的関手であることが従うので、加法的局所化の普遍性も満たされる。

□

次に $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ がアーベル圏であり $\mathcal{A}\to\mathcal{A}/\mathcal{S}$ が完全関手なことをみていく。それに向かい関連する (それ自身自然な) 補題をみてく。

補題 5.14. $\mathcal{A}$ を *well-powered* なアーベル圏、$\mathcal{S}$ をその *Serre* 部分圏、$T\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}/\mathcal{S}$ を自然な関手とする。このとき、$f\colon X\to Y$ *in* $\mathcal{A}$ に対して、$Tf=0$ であることと $\operatorname{Im} f\in\mathcal{S}$ が成り立つことは同値。

証明. $\mathcal{S}$ の元が T によって 0 対象に飛ぶのはすぐ分かる (たとえば補題 5.12)。なので $Tf = 0$ だとする。まず $(\mathcal{A}/\mathcal{S})(X, Y)$ がアーベル群の direct limit によって定義されていたことに注意する。Direct limit において 0 になることはどこかまで飛ばして 0 になることなので、$X_a \hookrightarrow X \xrightarrow{f} Y \twoheadrightarrow Y/Y_b$ の合成が 0 となるような $X/X_a, Y_b \in \mathcal{S}$ が存在する。これは $\mathcal{A}$ における完全図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_a \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X/X_a \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y_b \arrow[r] & Y \arrow[r] & Y/Y_b \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

を誘導する。ここで $\operatorname{Im} f$ を考えたいので、この図式を $\operatorname{Im} f$ のところで制限して考えて次を得る:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_a \arrow[r] \arrow[d, two heads] & X \arrow[r] \arrow[d, two heads] & X/X_a \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, hook] & \operatorname{Im} f \arrow[r] \arrow[d, hook] & B \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y_b \arrow[r] & Y \arrow[r] & Y/Y_b \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

慣れてない方は、$X \to Y \to Y/Y_b$ を $X \twoheadrightarrow B \hookrightarrow Y/Y_b$ したりすると上が構成できる。ここで今 $X/X_a, Y_b \in \mathcal{S}$ であり、$\mathcal{S}$ は商と部分対象で閉じるので、$A, B \in \mathcal{S}$ が従い、$\mathcal{S}$ は拡大で閉じるので、$\operatorname{Im} f \in \mathcal{S}$ となる。 □

補題 5.15. $\mathcal{A}$ を *well-powered* なアーベル圏、$\mathcal{S}$ をその *Serre* 部分圏、$T \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ を自然な関手とする。このとき $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ は前アーベル圏であり、T は核と余核を保つ。

証明. まず補題 5.12 により、$\mathcal{A}/\mathcal{S}$ の射は必ずある $\mathcal{A}$ の射 f を用いた Tf というものと射として同型であるので、T が核を保つことのみ見ればよい (余核については双対的)。

$0 \to K \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y$ を $\mathcal{A}$ での完全列とする。このとき Ti が Tf の核なことを見る。ここで、補題 5.12 により、$\mathcal{A}/\mathcal{S}$ での射は必ずある $\mathcal{A}$ の射 g を用いた Tg というものと射として同型である。ので、$\mathcal{A}$ の射 $W \xrightarrow{g} X$ が $Tf \circ Tg = 0$ のときに一意的に Tf を経由することを示せばよい。

$Tf \circ Tg = T(f \circ g) = 0$ と補題 5.14 から、$\operatorname{Im}(f \circ g) \in \mathcal{S}$ が成り立つ。次の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}(f \circ g) \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \operatorname{Im}(f \circ g) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "f"] & Y &
\end{tikzcd}$$

この図式を T で飛ばすと、$\operatorname{Ker}(f \circ g) \hookrightarrow W$ は補題 5.12 により $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ で同型になるので、赤い矢印をたどることで、Tg が Ti を経由することが分かる。このような射の一意性については、f として i をとって同じ議論をすることで Ti が単射である (T が単射性を保つ) ことが分かるので、そこから従う。 □

補題 5.16. $\mathcal{A}$ を *well-powered* なアーベル圏、$\mathcal{S}$ をその *Serre* 部分圏、$T \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ を自然な関手、$f \colon X \to Y$ を $\mathcal{A}$ での射とする。このとき Tf が同型であることと、$\operatorname{Ker} f, \operatorname{Coker} f \in \mathcal{S}$ であることは同値。

証明. もし $\operatorname{Ker} f, \operatorname{Coker} f \in \mathcal{S}$ であるなら、命題 5.13 により Tf は同型である。逆に Tf が同型だとすると、Tf は単射かつ全射となり、よって核と余核は 0。しかし T が核と余核を保つので、これは $\operatorname{Ker} f, \operatorname{Coker} f$ が T で 0 に飛ぶことと同値。よって補題 5.14 により $\operatorname{Ker} f, \operatorname{Coker} f \in \mathcal{S}$ が従う。 □

ようやく $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ がアーベル圏なことが分かる。より一般に次が言える。

補題 5.17. アーベル圏 $\mathcal{A}$ と加法的関手 $T \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ があり、T が対象についても射についても本質的全射であり、T は核と余核を保つとする。このとき $\mathcal{B}$ はアーベル圏となる。

証明. まず**射について本質的全射**とは、$\mathcal{B}$ の射が全てある $\mathcal{A}$ の射の T による像と同型になっているときをいう。仮定より明らかに前アーベル圏であり、また任意の射 Tf があったとき (同型を除いてそうかけるのでそう仮定して良い)、これの像・余像分解は $\mathcal{A}$ における f の像・余像分解を T で飛ばしたものになっている。よって像・余像は同型であり、$\mathcal{B}$ はアーベル圏となる。

または同様に任意の射 Tf が必ず核射と余核射の合成に分解されることが、$\mathcal{A}$ において分解して T で飛ばしても保たれることからも $\mathcal{B}$ はアーベル圏となる (アーベル圏の定義をどれ採用するかによる)。 □

系 5.18. *$\mathcal{A}$ を well-powered なアーベル圏、$\mathcal{S}$ をその Serre 部分圏としたとき、関手 $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ はアーベル圏の局所化 (定義 5.6) を満たす。*

証明. まず補題 5.14 により $\mathcal{S}$ の元は T で消える。次に、$F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ というアーベル圏の間の「完全関手」について、$\mathcal{S}$ の元が消えることと $\mathcal{W} := \{f \in \mathsf{Mor}(\mathcal{A}) \mid \operatorname{Ker} f, \operatorname{Coker} f \in \mathcal{S}\}$ が同型射にうつることが同値なことがすぐ分かる (関手の完全性に注意されたい)。よって命題 5.13 を使えばすぐ従う。 □

5.3. 局所化部分圏 (localizing subcategory).

アーベル圏の局所化部分圏とは、一言で言えば局所化関手が右随伴を持つような Serre 部分圏である。なぜそのようなものが重要かといえば、「局所化した結果が内部に部分圏として実現される」からである。**この節は Appendix D.2 の内容を多く使うので先にそちらを読むことをおすすめする。**

定義 5.19. Well-powered なアーベル圏 $\mathcal{A}$ の Serre 部分圏 $\mathcal{S}$ が**局所化部分圏** *(localizing subcategory)* であるとは、局所化関手 $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ が右随伴を持つときをいう。このとき T の右随伴 $S\colon \mathcal{A}/\mathcal{S} \to \mathcal{A}$ のことを**切断関手** *(section functor)* と呼ぶ。

まず Appendix D.2 から形式的に従ういくつかのことを述べておこう。

命題 5.20. *Well-powered なアーベル圏 $\mathcal{A}$ の局所化部分圏 $\mathcal{S}$ を考え、$T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ を局所化関手、$S\colon \mathcal{A}/\mathcal{S}$ をその右随伴 (切断関手) とすると、次が成り立つ:*

(1) S は忠実充満である。
(2) 随伴の余単位射 $\varepsilon\colon TS \to \mathsf{id}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}$ は同型である。

証明. 定理 D.8 より従う。 □

また命題 D.12 により、S は局所化 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ を、$\mathcal{W}$-local な対象のなす $\mathcal{A}$ の部分圏として実現する。アーベル圏の場合はより明確な local objects の特徴付けが存在し、実は切断関手の存在を仮定しなくてもいくつかの条件が同値になる。

命題 5.21. *Well-powered なアーベル圏 $\mathcal{A}$ の局所化部分圏 $\mathcal{S}$ についての局所化関手 $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ を考え、$\mathcal{W}$ を $\operatorname{Ker} f, \operatorname{Coker} f \in \mathcal{S}$ なる射の集まりとする。このとき対象 $M \in \mathcal{A}$ について次は同値である:*

(1) 任意の対象 $X \in \mathcal{A}$ に対して、F が誘導する写像 $\mathcal{A}(X, M) \to (\mathcal{A}/\mathcal{S})(TX, TM)$ は同型。
(2) 任意の $\mathcal{W}$ の射 $\varphi\colon X \to Y$ について $\mathcal{A}(Y, M) \xrightarrow{(-)\circ\varphi} \mathcal{A}(X, M)$ は同型。
(3) $\mathcal{A}(\mathcal{S}, M) = 0 = \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}, M)$ が成り立つ、つまり任意の対象 $S \in \mathcal{S}$ に対して、$\mathcal{A}(S, M) = 0$ かつ $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(S, M) = 0$ が成り立つ。

これらの同値な条件が成り立つ対象 M のことを **$\mathcal{S}$-closed** と呼ぶ。

証明. (1) ⇒ (2): $\mathcal{W}$ の射 $\varphi\colon X \to Y$ について次の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(Y, M) \arrow[r, "(-)\circ\varphi"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathcal{A}(X, M) \arrow[d, "\simeq"] \\
(\mathcal{A}/\mathcal{S})(TY, TM) \arrow[r, "\simeq", "(-)\circ T\varphi"'] & (\mathcal{A}/\mathcal{S})(TX, TM)
\end{tikzcd}$$

ここで仮定より縦の射は同型で、$T\varphi$ は同型なことから下も同型。よって上も同型。

(2) ⇒ (1): (1) と (2) が同値なことは反映的局所化の場合に命題 D.12 で示したが、ここでは反映的局所化を仮定しない。代わりにアーベル圏的なこと、とくに $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ の構成の仕方を使う。この (1) と (2) は、より一般に calculus of fraction を持つ場合に一般化できるはずだがそのうち書くかも。

まず $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ の構成を思い出すと、$\mathcal{A}/\mathcal{S}$ における射 $X \to M$ は、$X/X_a, M_b \in \mathcal{S}$ なる X と M の部分対象を用いて、$\mathcal{A}$ における射 $X_a \to M/M_b$ として代表された。しかし、$M_b \in \mathcal{S}$ という条件から射影 $\pi\colon M \to M/M_b$ は $\mathcal{W}$ に入り、一方

$$\mathcal{A}(M/M_b, M) \xrightarrow{(-)\circ\pi} \mathcal{A}(M,M)$$

が仮定 (2) より全単射、つまり恒等写像 id_M が π を経由し、これは $M_b = 0$ を意味する。

以上の観察から、$(\mathcal{A}/\mathcal{S})(X,M)$ は、$X/X_a \in \mathcal{S}$ なる X_a について $\mathcal{A}(X_a, M)$ を考えその順極限として得られる。以下で T が誘導する写像 $\mathcal{A}(X,M) \to (\mathcal{A}/\mathcal{S})(TX,TM)$ が全単射なことをみていく。

(単射性): $f\colon X \to M$ という $\mathcal{A}$ での射をとり、これが $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ においてゼロになったとする。このとき $(\mathcal{A}/\mathcal{S})(TX,TM)$ の極限としての構成より、ある X の部分対象 X_a で $X/X_a \in \mathcal{S}$ なるものに対して、$X_a \hookrightarrow X \xrightarrow{f} M$ の合成が 0 となる。ここで包含 $X_a \hookrightarrow X$ が $\mathcal{W}$ に入ることから、仮定 (2) より $\mathcal{A}(X,M) \to \mathcal{A}(X_a,M)$ が全単射とくに単射。よって $f = 0$ が従う。

(全射性): $(\mathcal{A}/\mathcal{S})(TX,TM)$ の射は必ず $X/X_a \in \mathcal{S}$ なる部分対象 X_a を用いて $X_a \to M$ で代表される。このとき包含 $X_a \hookrightarrow X$ は $\mathcal{W}$ に入るので、(2) より $\mathcal{A}(X,M) \to \mathcal{A}(X_a,M)$ が全単射とくに全射。よってある $X \to M$ があり次が可換:

$$\begin{tikzcd} X_a \arrow[r, hook] \arrow[dr] & X \arrow[d] \\ & M \end{tikzcd}$$

この可換性から、順極限のことを考えると、$(\mathcal{A}/\mathcal{S})(X,M)$ においてこの射 $X_a \to M$ は予め $X \to M$ と同じ同値類にいる。なので $\mathcal{A}$ における射からこの射は飛んできている。

(2) ⇒ (3): まず $\mathcal{A}(\mathcal{S},M) = 0$ を示す。$\varphi\colon S \to M$ を $S \in \mathcal{S}$ からの射とすると、$S \twoheadrightarrow \operatorname{Im}\varphi \hookrightarrow M$ と分解できる。$\operatorname{Im}\varphi$ は S の商であるが、$\mathcal{S}$ は商で閉じたので、はじめから φ は単射だと仮定して良い。次の完全列を考える:

$$0 \to S \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\pi} M/S \to 0.$$

このとき π は $\operatorname{Coker}\pi, \operatorname{Ker}\pi \in \mathcal{S}$ を満たすので、仮定 (2) より、$\mathcal{A}(M/S,M) \xrightarrow{(-)\circ\pi} \mathcal{A}(M,M)$ は同型。よって恒等写像 id_M は π を経由することが従い、$\varphi = \mathsf{id}_M \circ\varphi = 0$ が成り立つ。

次に $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{S},M) = 0$ を示す。つまり $S \in \mathcal{S}$ と、短完全列

$$0 \to M \xrightarrow{f} E \to S \to 0$$

があれば必ず分裂すればよい (一般のアーベル圏では $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}$ は短完全列の同値類として定義した)。しかし $f \in \mathcal{W}$ が成り立つので、仮定 (2) より $\mathcal{A}(E,M) \xrightarrow{(-)\circ f} \mathcal{A}(M,M)$ は同型。よって id_M に注目すれば、上の完全列は分裂することが従う。

(3) ⇒ (2): $\mathcal{A}$ における完全列

$$0 \to S_1 \to X \xrightarrow{f} Y \to S_2 \to 0$$

で、$S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ のようなものを考える。このとき $\mathcal{A}(Y,M) \xrightarrow{(-)\circ f} \mathcal{A}(X,M)$ が同型なことを示せばよい。

(単射性): $Y \to M$ が $X \to Y \to M$ と合成して 0 とすると、次を見る:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "0"'] & Y \arrow[r] \arrow[d] & S_2 \arrow[r] \arrow[dl, dashed] & 0 \\ & M & & \end{tikzcd}$$

余核の普遍性より $Y \to M$ は S_2 を通り、仮定より $\mathcal{A}(S_2,M) = 0$ であるから $Y \to M$ はゼロである。

(全射性): 任意に射 $\varphi\colon X\to M$ を与えると、これが f を通ることを見ればよい。まず完全列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_1 \arrow[r] \arrow[dr, "0"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \operatorname{Im} f \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\psi"] & 0 \\
& & M & &
\end{tikzcd}$$

を見る。$\mathcal{A}(S_1,M)=0$ より、上のように φ は $X\twoheadrightarrow \operatorname{Im} f$ を通る。次に下の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Im} f \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, bend left] & S_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, hook] & E \arrow[r] & S_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

つまり pushout をとった。しかし $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(S_2,M)=0$ より下の短完全列は分裂し、よって ψ は $\operatorname{Im} f\hookrightarrow Y$ を経由する。以上から φ は $f\colon X\to Y$ を経由することが従い、全射となる。 $\square$

この条件 (1) と (2) は反映的局所化などで見た条件だが、(3) はアーベル圏特有のホモロジー的な特徴付になっており、非自明である。次の記号を導入しよう。

定義 5.22. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の部分圏 $\mathcal{S}$ に対して、$\mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ という $\mathcal{A}$ の充満部分圏を次で定める: 対象 M が $\mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ に入るのは、$\mathcal{A}(\mathcal{S},M)=0=\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{S},M)$ が成り立つ、つまり任意の対象 $S\in\mathcal{S}$ に対して、$\mathcal{A}(S,M)=0$ かつ $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(S,M)=0$ が成り立つとき。この圏のことを $\mathcal{S}$ の *perpendicular category* と呼ぶこともある (Crawley-Boevey のやつとか)

次に、局所化が反映的であることを仮定する (localizing subcategory を考える) と、Appendix D.2 を用いていろいろな特徴付けが得られる:

命題 5.23. *Well-powered* なアーベル圏 $\mathcal{A}$ の局所化部分圏 $\mathcal{S}$ を考え、$T\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}/\mathcal{S}$ を局所化関手、$S\colon\mathcal{A}/\mathcal{S}\to\mathcal{A}$ を切断関手とする。また $\mathcal{W}$ を $\operatorname{Ker}\varphi,\operatorname{Coker}\varphi\in\mathcal{S}$ なる $\mathcal{A}$ の射の集まりとする。このとき $\mathcal{A}$ の対象 M に対して次は同値。

(1) M は切断関手 S の本質的像に含まれる、つまり S で来る対象と同型である。
(2) 随伴の単位射 $\eta_M\colon M\to STM$ は同型。
(3) 任意の $\mathcal{W}$ の射 φ について $\mathcal{A}(Y,M)\xrightarrow{(-)\circ\varphi}\mathcal{A}(X,M)$ は同型。
(4) 任意の対象 $X\in\mathcal{A}$ に対して T が誘導する写像 $\mathcal{A}(X,M)\to(\mathcal{A}/\mathcal{S})(TX,TM)$ は同型。
(5) $M\in\mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ が成り立つ。

またこのとき S は圏同値 $\mathcal{A}/\mathcal{S}\simeq\mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ を誘導する。

証明. (1) から (4) が同型なのは命題 D.12 で見た、また (5) が (3), (4) と同値なのを命題 5.21 で見た。 $\square$

次に局所化部分圏の特徴付けを与えていきたい。このため次の補題は有効である:

補題 5.24. *Well-powered* なアーベル圏 $\mathcal{A}$ とその *Serre* 部分圏 $\mathcal{S}$ について次は同値である*:*

(1) $\mathcal{S}$ は局所化部分圏である、つまり局所化 $T\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}/\mathcal{S}$ は右随伴を持つ。
(2) 任意の対象 $X\in\mathcal{A}$ に対して、$\mathcal{A}$ における完全列

$$0\to X_1\to X\to\overline{X}\to X_2\to 0$$

であって、$X_1,X_2\in\mathcal{S}$、$\overline{X}\in\mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ なるようなものが存在する。
(3) 局所化関手 $T\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}/\mathcal{S}$ は圏同値 $\mathcal{S}^{\perp_{0,1}}\xrightarrow{\simeq}\mathcal{A}/\mathcal{S}$ を誘導する。

これらが成り立つとき、次が成り立つ*:*

(a) 包含関手 $\mathcal{S}\hookrightarrow\mathcal{A}$ の右随伴が $X\mapsto X_1$ で与えられる。
(b) 包含関手 $\mathcal{S}^{\perp_{0,1}}\hookrightarrow\mathcal{A}$ の左随伴、もしくは切断関手 S に対して $\mathcal{A}\xrightarrow{T}\mathcal{A}/\mathcal{S}\xrightarrow{S}\mathcal{A}$ の合成は、$X\mapsto\overline{X}$ で与えられる。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): 仮定より T は右随伴 $S\colon \mathcal{A}/\mathcal{S} \to \mathcal{A}$ を持つ。このとき対象 $X \in \mathcal{A}$ に対して、随伴の単位射 $\eta_X\colon X \to STX$ を考える。命題 5.23 より $STX \in \mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ である。また命題 D.8 の (2) $\Rightarrow$ (3) の証明 (三角恒等図式使うやつ) より、η_X は T で送って同型になり、補題 5.16 により $\operatorname{Ker}\eta_X, \operatorname{Coker}\eta_X \in \mathcal{S}$ が成り立つ。よって

$$0 \to \operatorname{Ker}\eta_X \to X \xrightarrow{\eta_X} STX \to \operatorname{Coker}\eta_X \to 0$$

が求める完全列である。

(2) $\Rightarrow$ (3): まず命題 5.21 または命題 5.23 より、T を $\mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ に制限すると常に忠実充満となる。よって $\mathcal{S}^{\perp_{0,1}} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ が本質的全射なことを示す。しかし、(2) の列を T で飛ばすと、T は完全関手であり $T(\mathcal{S}) = 0$ を思い出せば、$TX \cong T\overline{X}$ が $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ において成り立つので、示された。

(3) $\Rightarrow$ (1): 形式的に従わせる。包含 $\iota\colon \mathcal{S}^{\perp_{0,1}} \hookrightarrow \mathcal{A}$ に対して、(3) より合成 $\mathcal{S}^{\perp_{0,1}} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{T} \mathcal{A}/\mathcal{S}$ は圏同値。それの quasi-inverse を $F\colon \mathcal{A}/\mathcal{S} \to \mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ とする。このとき ιF が T の右随伴なことを示す。

$X \in \mathcal{A}$ と $M \in \mathcal{A}/\mathcal{S}$ を任意にとると、

$$\mathcal{A}(X, \iota FM) \xrightarrow{\simeq} (\mathcal{A}/\mathcal{S})(TX, T\iota FM) \xrightarrow{\simeq} (\mathcal{A}/\mathcal{S})(TX, M)$$

と変形できる。ここで最初の同型は、$\iota FM \in \mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ より ιFM が $\mathcal{S}$-closed なことから従い、二番目の同型は F が $T\iota$ の quasi-inverse なことから従う。この同型は自然なので ιF が T の右随伴であり、よって $\mathcal{S}$ は局所化部分圏である。

次に後半の 2 つについて。(a): まず (2) のもと、包含 $X_1 \hookrightarrow X$ は右 $\mathcal{S}$ 近似を与えることを示す (定義 D.13 を参照)。(2) の条件より $X_1 \in \mathcal{S}$ であり、任意の $S \in \mathcal{S}$ に対して次の完全列を考える:

$$0 \to \mathcal{A}(S, S_1) \to \mathcal{A}(S, X) \to \mathcal{A}(S, \overline{X}).$$

ここで (2) の条件より $\overline{X} \in \mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ とくに $\mathcal{A}(S, \overline{X}) = 0$。よって $\mathcal{A}(S, S_1) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{A}(S, X)$ が同型となり、任意の S から X の射は必ず X_1 を経由する。なので右 $\mathcal{S}$ 近似を与える。あとは系 D.15 より、対応 $X \mapsto X_1$ は関手 $\mathcal{A} \to \mathcal{S}$ を与え、これは包含 $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{A}$ の右随伴である。

(b): これは形式的に従うはず。まず合成 $\mathcal{A} \xrightarrow{T} \mathcal{A}/\mathcal{S} \xrightarrow{S} \mathcal{A}$ を計算しよう。(3) $\Rightarrow$ (1) の証明によると、これは $\mathcal{A} \xrightarrow{T} \mathcal{A}/\mathcal{S} \xrightarrow{G} \mathcal{S}^{\perp_{0,1}} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A}$ の合成で得られる。ここで G は T が誘導する圏同値 $\mathcal{S}^{\perp_{0,1}} \simeq \mathcal{A}/\mathcal{S}$ の quasi-inverse である。一方 (2) $\Rightarrow$ (3) の証明を思い出すと、G は $TX = X \in \mathcal{A}/\mathcal{S}$ に対して $\overline{X}$ を対応させることで得られる。なので $STX = \overline{X}$ であることが従う。

次に、$\mathcal{S}^{\perp_{0,1}} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A}$ の左随伴が $\mathcal{A} \xrightarrow{T} \mathcal{A}/\mathcal{S} \xrightarrow{G} \mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ で与えられることを見るが、これは形式的に従う: 対象 $X \in \mathcal{A}$ と $M \in \mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ に対して、

$$\mathcal{A}(X, \iota M) \xrightarrow{\simeq} (\mathcal{A}/\mathcal{S})(TX, T\iota M) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{S}^{\perp_{0,1}}(GTX, GT\iota M) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{S}^{\perp_{0,1}}(GTX, M)$$

ここで一番目は ι の像が $\mathcal{S}$-closed なことから、二番目は G が圏同値なことから、三番目は G が $T\iota$ の quasi-inverse なことから従う。 $\square$

この便利な特徴付けを用いて、アーベル圏の局所化部分圏と、対応する反映的部分圏との間での一対一対応が付けられる。これは有名だと思うがあまり知られていなさそう。まず、反映的局所化と反映的部分圏が対応したように、アーベル圏の局所化部分圏 $\mathcal{S}$ に対応する $\mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ に相当するような圏を与えよう:

定義 5.25. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の (同型で閉じた充満) 部分圏 $\mathcal{D}$ が *Giraud* **部分圏**であるとは、包含 $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{A}$ が左随伴を持ち (つまり反映部分圏であり)、その左随伴が核を保つときをいう。

この定義だけからは $\mathcal{D}$ がどのような圏かはわからないが、実は自動的にアーベル圏になる:

命題 5.26. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の *Giraud* 部分圏 $\mathcal{D}$ に対して、包含 $\iota\colon \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ の左随伴を $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ とすると、$\mathcal{D}$ はアーベル圏であり T は完全関手である。

証明. まず定理 D.8 などを思い出すと ι は忠実充満なので反映的局所化の状況であり、とくに $T\iota \cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ などに注意。このとことから T は対象についても「射についても」本質的全射である。

($\mathcal{D}$ は有限直和を持ち、よって加法圏である): T は左随伴なので余極限を保ち、とくに有限直和も保つ。このことと T が本質的全射なことから $\mathcal{D}$ は有限直和を持つことが従う。

(T は加法的関手である): これは一般に、加法圏の間の関手は二項直和を保てば自動的に加法的関手となることから従う。

($\mathcal{D}$ はアーベル圏であり T は完全関手である): これは以上のことと、T は左随伴なので余極限とくに余核を保ち、Giraud の仮定より核も保つことに注意すると、補題 5.17 より従う。 □

以上の準備のもと、一般のアーベル圏に対して、Giraud 部分圏と局所化部分圏の一対一対応を与えることができる:

定理 5.27. *Well-powered* なアーベル圏 $\mathcal{A}$ に対して、次の *2* つの集まりの間に全単射が存在する*:*

(1) $\mathcal{A}$ の局所化部分圏

(2) $\mathcal{A}$ の *Giraud* 部分圏

対応は以下で与えられる*:*

- *(1)→(2):* 局所化部分圏 $\mathcal{S}$ に対して $\mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$。
- *(2)→(1): Giraud* 部分圏 $\mathcal{D}$ に対して、包含 $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{A}$ の左随伴を $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ としたとき、$\operatorname{Ker} F := \{M \in \mathcal{A} \mid FM = 0\}$。

また次が成り立つ*:*

(a) Giraud 部分圏 $\mathcal{D}$ に対して、$\operatorname{Ker} F = {}^{\perp_0}\mathcal{D} := \{M \in \mathcal{A} \mid \mathcal{A}(M, \mathcal{D}) = 0\}$ が成り立つ。

(b) 局所化部分圏 $\mathcal{S}$ と *Giraud* 部分圏 $\mathcal{D}$ が対応するとき、自然に圏同値 $\mathcal{A}/\mathcal{S} \simeq \mathcal{D}$ が誘導される。

証明. (1) → (2): 局所化部分圏 $\mathcal{S}$ が与えられたとき、その局所化はちょうど $\mathcal{S}^{\perp_{0,1}} \simeq \mathcal{A}/\mathcal{S}$ の圏同値を誘導するので、包含 $\mathcal{S}^{\perp_{0,1}} \hookrightarrow \mathcal{A}$ は左随伴を持つ反映的関手である。しかもその左随伴は $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ の合成より完全関手であり特に左完全。なので $\mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ は Giraud 部分圏である。またこのとき局所化 $\mathcal{A}/ \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ は包含 $\mathcal{S}^{\perp_{0,1}} \hookrightarrow \mathcal{A}$ の左随伴 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ と同一視ができるので、これについて $\operatorname{Ker} F = \mathcal{S}$ が成り立つことに注意。

(2) → (1): Giraud 部分圏 $\mathcal{D}$ が与えられたとき、包含 $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{A}$ の左随伴を $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ とする。このとき命題 5.26 により $\mathcal{D}$ はアーベル圏である F は完全関手。よって $\operatorname{Ker} F$ は Serre 部分圏となる。

次に定理 D.8 により、F は F で送って同型射になる射の集まりについての 2 局所化である。一方、F がアーベル圏の間の完全関手ということに注意すると、$\mathcal{A}$ の射 φ に対して $F\varphi$ が同型である必要十分条件は $\operatorname{Ker} \varphi, \operatorname{Coker} \varphi$ を F で送って 0 になること、つまり $\operatorname{Ker} \varphi, \operatorname{Coker} \varphi \in \operatorname{Ker} F$ である。これと命題 5.13 を比べると、F は圏同値を除いて $\operatorname{Ker} F$ という Serre 部分圏での局所化 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\operatorname{Ker} F$ になっている。なので局所化関手は右随伴 (同一視のもとで $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{A}$ という包含) を持ち、$\operatorname{Ker} F$ は局所化部分圏である。

以上の構成により (1) と (2) の全単射が与えられることはすぐに分かる (ここで部分圏は常に同型で閉じていたことに注意せよ)。また (b) も分かる。

(a): これは少し非自明。局所化部分圏 $\mathcal{S}$ に対して、$\mathcal{D} := \mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ とする。このとき $\mathcal{S} = {}^{\perp_0}\mathcal{D}$ を示せばよい。まず $\mathcal{D}$ の定義から $\mathcal{A}(\mathcal{S}, \mathcal{D}) = 0$ は従い、よって $\mathcal{S} \subset {}^{\perp_0}\mathcal{D}$ は分かる。

逆の包含を示すために補題 5.24 を用いる。対象 $X \in \mathcal{A}$ が $\mathcal{A}(X, \mathcal{D}) = 0$ を満たすとする。このとき補題 5.24(2) の完全列

$$0 \to X_1 \to X \to \overline{X} \to X_2 \to 0$$

をとると、$\overline{X} \in \mathcal{D}$ なことから $X \to \overline{X}$ は 0 射。よって $X_1 \to X$ は同型となり $X \cong X_1 \in \mathcal{S}$ が従う。 □

次に、アーベル圏の反映的部分圏 や Giraud 部分圏 についての便利な性質をあげておこう。これは反映的部分圏についての抽象論 (命題 D.16 と命題 D.17) と、随伴の一般論 (左随伴は余極限を保つこと) により直ちに従う。

命題 5.28. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の反映的部分圏 $\mathcal{D}$ について次が成り立つ*:*

(1) $\mathcal{D}$ は核で閉じている。つまり D の対象の間の射 $f\colon D_1 \to D_2$ に対して $\operatorname{Ker} f \in \mathcal{D}$ が成り立つ *(*特に圏 $\mathcal{D}$ は核を持ち、それは $\mathcal{A}$ における核として計算できる*)*。

(2) $\mathcal{D}$ は *(*存在すれば*)*$\mathcal{A}$ における無限直積で閉じている。つまり $D_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ という D の対象の族について、もし $\prod_\lambda D_\lambda$ が $\mathcal{A}$ において存在するならば、それは $\mathcal{D}$ に入る *(*そして $\mathcal{D}$ における直積対象となる*)*。
(3) より一般に、$\mathcal{D}$ における図式の極限が $\mathcal{A}$ 内に存在すれば、それは $\mathcal{D}$ にすでに入っている *(*$\mathcal{D}$ は極限で閉じている*)*、とくにその極限は $\mathcal{D}$ において存在し、それは $\mathcal{A}$ における極限として計算できる。
(4) $\mathcal{D}$ における射が $\mathcal{D}$ において単射なことと $\mathcal{A}$ において単射なことは同値である。

さらに $\mathcal{D}$ が *Giraud* なとき、包含の左随伴を $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ とすると次が成り立つ*:*

(5) $\mathcal{D}$ は余核で閉じるとは限らないが、$\mathcal{D}$ における射の $\mathcal{A}$ における余核を F で飛ばすと $\mathcal{D}$ における余核が得られる。
(6) $\mathcal{D}$ は無限直和で閉じるとは限らないが、$\mathcal{D}$ における対象の $\mathcal{A}$ における直和を F で飛ばすと $\mathcal{D}$ における直和が得られる。
(7) より一般に、$\mathcal{D}$ における図式の余極限が $\mathcal{A}$ において存在する場合、それを F で飛ばすと $\mathcal{D}$ における余極限が得られる。
(8) $\mathcal{D}$ における射が $\mathcal{D}$ においてエピであることは、その $\mathcal{A}$ での余核が F で 0 になる *(*つまり対応する局所化部分圏に属する*)* ことと同値である。

5.4. **Grothendieck 圏の局所化.** 次に Grothendieck 圏の場合の局所化部分圏による局所化について詳しく見ていく。

命題 5.29. $\mathcal{A}$ をアーベル圏、$\mathcal{D}$ を $\mathcal{A}$ の *Giraud* 部分圏として、包含 $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{A}$ の左随伴を $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ とすると次が成り立つ*:*

(1) $\mathcal{A}$ の対象の直和 $\bigoplus_\lambda X_\lambda$ に対して $F(\bigoplus_\lambda X_\lambda)$ は FX_λ の直和になっている *(*F は直和を保存する*)*。とくに $\mathcal{A}$ が余完備 *(small coproduct* を持つ*)* ならば $\mathcal{D}$ も余完備である。
(2) $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ が $\mathcal{A}$ の生成集合ならば $F(\mathcal{G})$ は $\mathcal{D}$ の生成集合である。
(3) $\mathcal{A}$ が余完備かつ *well-powered* なとき、$\mathcal{A}$ が *(Ab 5)* を満たすならば $\mathcal{D}$ も *(Ab 5)* を満たす。

とくに $\mathcal{A}$ が *Grothendieck* 圏ならば $\mathcal{D}$ も *Grothendieck* 圏であり、また $\mathcal{S}$ を $\mathcal{A}$ の局所化部分圏とすれば $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ も *Grothendieck* 圏となる。

証明. (1): 一般に左随伴関手は余極限を保つので従う。とくに以降は、F が対象について本質的全射なことから従う。

(2): 定義 3.10 を思い出す。$\mathcal{D}$ における射 $f\colon X \to Y$ が 0 でないとすると、$\mathcal{A}$ において $\mathcal{G}$ が生成集合なことから、ある $g\colon G \to X$ という $G \in \mathcal{G}$ からの射であって $fg \neq 0$ なるものが存在する。ここで例えば命題 D.14 を使うと、

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[dr, "g"'] & F(G) \arrow[d, dashed, "\overline{g}"] & \\ & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

上の図を可換にする $\overline{g}$ が (一意的に) 存在する。よって $f\overline{g} \neq 0$ より、$F(\mathcal{G})$ が $\mathcal{D}$ の生成集合であることが従う。

または余完備を仮定すると、生成集合の特徴づけ (命題 3.15) を使って簡単に証明できる。$\mathcal{D}$ の任意の対象を取ると $\mathcal{G}$ の対象の直和からの全射がある。これを F で送ると、F は完全関手であるので全射を保ち、(1) より無限直和も保つので、$F(\mathcal{G})$ の対象からの無限直和が得られる。

(3): $\mathcal{A}$ を余完備で (Ab5) を満たすとする。まず $\mathcal{D}$ は余完備であり、$\mathcal{D}$ における余極限は $\mathcal{A}$ における余極限を F で飛ばしたものだったことに注意 (命題 5.28(7))。

フィルター圏 I について、2 つの関手 $X, Y\colon I \to \mathcal{D}$ が各 $i \in I$ について $X_i \to Y_i$ が $\mathcal{D}$ において単射だとする。命題 5.28(4) により、$X_i \to Y_i$ は $\mathcal{A}$ においても単射である。よって $\mathcal{A}$ において余極限をとると、包含関手 $\iota\colon \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ に対して、$\mathcal{A}$ が (Ab5) みたすことより $\operatorname{colim}(\iota X) \to \operatorname{colim}(\iota Y)$ は単射。これを F で飛ばすと、命題 5.28(7) によりそれはもとの関手の $\mathcal{D}$ での余極限を与え、また F

は単射を単射にうつす (F は仮定より左完全) ので、$\operatorname{colim} X \to \operatorname{colim} Y$ は単射。よって $\mathcal{D}$ も (Ab5) を満たす。 □

次に局所化部分圏の、よりチェックしやすい特徴付けを与える。

命題 5.30. *Well-powered* なアーベル圏 $\mathcal{A}$ の *Serre* 部分圏 $\mathcal{S}$ について次は同値。

(1) $\mathcal{S}$ は局所化部分圏である (つまり局所化関手 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ が右随伴を持つ)。

(2) 任意の対象 $X \in \mathcal{A}$ に対して、$\mathcal{A}$ における完全列

$$0 \to X_1 \to X \to \overline{X} \to X_2 \to 0$$

であって、$X_1, X_2 \in \mathcal{S}$、$\overline{X} \in \mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ なるようなものが存在する。

(3) 次の *2* つが成り立つ:

(a) 任意の対象 $X \in \mathcal{A}$ が $\mathcal{S}$ に入る最大の部分対象を持つ。これは、任意の対象 $X \in \mathcal{A}$ が単射な右 $\mathcal{S}$ 近似を持つことと同値。

(b) 対象 $X \in \mathcal{A}$ が $\mathcal{A}(\mathcal{S}, X) = 0$ を満たす場合、ある単射

$$0 \to X \hookrightarrow \overline{X}$$

であり $\overline{X} \in \mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ なるものが存在する (つまり $\mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ の対象に埋め込める)。

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2): すでに命題 5.24 で見た。

(2) $\Rightarrow$ (3): まず (a) の 2 つの条件の同値性について軽く説明する。対象 $X \in \mathcal{A}$ が、$\mathcal{S}$ に入る最大の部分対象 $S_X \hookrightarrow X$ をもつ場合、これは右 $\mathcal{S}$ 近似であることがすぐ分かる ($\mathcal{S}$ が商で閉じていることを使う)。逆は、単射な右 $\mathcal{S}$ 近似 $S_X \hookrightarrow X$ を与えると、それが $\mathcal{S}$ に入る最大の部分対象なことがすぐ分かる。

(a) が成り立つこと: (2) の完全列の $0 \to X_1 \to X \to \overline{X}$ のところを見ると、$X_1 \in \mathcal{S}$ であり、任意の対象 $S \in \mathcal{S}$ に対して

$$0 \to \mathcal{A}(S, X_1) \to \mathcal{A}(S, X) \to \mathcal{A}(S, \overline{X})$$

は完全であるが、$\overline{X} \in \mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ より $\mathcal{A}(S, \overline{X}) = 0$、よって $\mathcal{A}(S, X_1) \to \mathcal{A}(S, X)$ は同型。よって $X_1 \hookrightarrow X$ が X の単射な右 $\mathcal{S}$ 近似を与える。

(b) が成り立つこと: X が $\mathcal{A}(\mathcal{S}, X) = 0$ を満たすとすると、(2) の完全列の $X_1 \hookrightarrow X$ は 0 射となり、つまり $X_1 = 0$。なので $0 \to X \to \overline{X}$ が完全で、(b) が満たされる。

(3) $\Rightarrow$ (2): 対象 $X \in \mathcal{A}$ を固定し、これについて (2) のような完全列を作りたい。

(Step 1):次のような完全列

$$0 \to X_1 \to X \to A \to 0$$

であり $\mathcal{A}(\mathcal{S}, A) = 0$ なるものを構成する。

具体的には、条件 (a) より X は $\mathcal{S}$ に入る最大の部分対象を持つので、それを $X_1 \hookrightarrow X$ として、その余核を A とする。これが $\mathcal{A}(\mathcal{S}, A) = 0$ を満たすことを示すために、$\mathcal{S}$ の対象 $S \in \mathcal{S}$ と射 $S \to A$ を取ると、次の引き戻し

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & S \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & X \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

を考える。このとき $S, X_1 \in \mathcal{S}$ と、$\mathcal{S}$ が拡大で閉じたことから、$E \in \mathcal{S}$ が従い、縦の $E \to X$ は $X_1 \hookrightarrow X$ を経由する。なので $E \to X \to A$ の合成は $E \to X_1 \to X \to A$ となりゼロとなり、よって $E \to S \to A$ がゼロ、なので $S \to A$ はゼロが従う。

(Step 2): この A に対して、条件 (b) より完全列

$$0 \to A \to \overline{\overline{X}} \to A_2 \to 0$$

であって $\overline{\overline{X}} \in \mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ なるものが取れる。このとき A_2 に (a) を使い、単射な右 $\mathcal{S}$ 近似 $X_2 \hookrightarrow A_2$ をとり、次の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & \overline{X} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & \overline{\overline{X}} \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & M \arrow[r, equal] \arrow[d] & M \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

このとき $\overline{X} \in \mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ を示すことができれば、(Step 1) の短完全列と合わせて (2) の形の短完全列ができる。よってこれを示す。

まず (Step 1) のときの論法から、上の M は $\mathcal{A}(\mathcal{S}, M) = 0$ を満たす。次に、真ん中の完全列

$$0 \to \overline{X} \to \overline{\overline{X}} \to M \to 0$$

において、任意の対象 $S \in \mathcal{S}$ に対して、次の長完全列

$$0 \to \mathcal{A}(S, \overline{X}) \to \mathcal{A}(S, \overline{\overline{X}}) \to \mathcal{A}(S, M) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(S, \overline{X}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(S, \overline{\overline{X}})$$

ができる (enough projective とかなくても一般のアーベル圏でこれはできることを各自確かめられたい、一応今回の証明で使う必要な部分だけを下の注に書いた)。一方 $\overline{\overline{X}} \in \mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ なことから $\mathcal{A}(S, \overline{\overline{X}}) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(S, \overline{\overline{X}})$ が成り立ち、また $\mathcal{A}(S, M) = 0$ も確かめたので、

$$0 \to \mathcal{A}(S, \overline{X}) \to 0 \to 0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(S, \overline{X}) \to 0$$

が完全となり、$\mathcal{A}(S, \overline{X}) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(S, \overline{X})$ が従う。よって $\overline{X} \in \mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ となる。 □

注意 5.31. 上の証明の最後で長完全列を使うところについて。一般のアーベル圏なので怖いが、一応ちゃんとやっておこう。$\mathcal{A}$ の短完全列

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

と対象 $S \in \mathcal{A}$ を固定したとき、

$$0 \to \mathcal{A}(S, X) \to \mathcal{A}(S, Y) \to \mathcal{A}(S, Z)$$

が完全なことは核の普遍性より従う。よって上の証明において $\mathcal{A}(S, \overline{X}) = 0$ なことはよい。

次に $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}$ については少し慎重になる。上の証明に必要なことは、$\mathcal{A}(S, Z) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(S, Y)$ のときに $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(S, X) = 0$ となることである。そのために直接証明しよう。

示すべきは、短完全列

$$0 \to X \to E \to S \to 0$$

が必ず分裂することである。このとき次の完全図式が作れる:

$$
\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d, shift left] & Z \arrow[r] & 0 \\
& S \arrow[r, equal] \arrow[d] & S \arrow[d] \arrow[u, shift left, red] \arrow[ul, dashed, red] \arrow[ur, red, "0"'] & & \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

ここで $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(S, Y) = 0$ なことから真ん中縦の完全列は分裂するので、$F \twoheadrightarrow S$ の切断 $S \hookrightarrow F$ (赤いやつ) が取れる。これを右に Z まで飛ばすと、$\mathcal{A}(S, Z) = 0$ なことから 0 になるので、下段の横の核の普遍性より $S \hookrightarrow F$ は E にまでリフトする。こうしてできた $S \to E$ が $S \to E \to S$ と合成して id_S になることは、図式を追ってすぐ分かる。

これといくつかの事実 (あとで Gabriel-Popescu を使って示す) を用いると、Grothendieck 圏における局所化部分圏の特徴づけが得られる。

事実 5.32. *Grothendieck* 圏の任意の対象は入射包絡 *(*定義 *2.5)* を持つ *(*とくに *enough injectives* である*)*。

まず局所化部分圏になるためのいくつかの必要条件を観察しよう。

命題 5.33. *Well-powered* なアーベル圏 $\mathcal{A}$ と、その局所化部分圏 $\mathcal{S}$ を考える。このとき $\mathcal{S}$ は無限直和で閉じている。つまり $\mathcal{S}$ の対象の族 $X_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ の直和が $\mathcal{A}$ において存在するならば、その直和は $\mathcal{S}$ に入る。

証明. 局所化関手 $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ は、局所化部分圏の定義により左随伴関手である。よって無限直和を保存する。また $\mathcal{S} = \operatorname{Ker} T$ だったことを思い出すと、上のような $X_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ に対して、

$$T\Big(\bigoplus_\lambda X_\lambda\Big) \cong \bigoplus_\lambda T(X_\lambda) = \bigoplus_\lambda 0 = 0$$

となるので $\bigoplus_\lambda X_\lambda \in \mathcal{S}$ が従う。 □

次に、命題 5.30 の (3)(a) と (3)(b) が成立するような場合を考えていきたい。

命題 5.34. *Well-powered* で余完備なアーベル圏 $\mathcal{A}$ に対して、$\mathcal{S}$ を $\mathcal{A}$ の中で *(*無限*)* 直和と商で閉じた部分圏とする。このとき任意の対象 X は、$\mathcal{S}$ に入る最大の部分対象を持つ、または同値な条件として、単射な右 $\mathcal{S}$ 近似を持つ。

証明. 一般に後半の同値性については、$\mathcal{A}$ がアーベル圏であるということと $\mathcal{S}$ が商で閉じていることのみから従うのでチェックされたい。以下対象 X が $\mathcal{S}$ に入る最大の部分対象を持つことを示す。

部分対象の束 $\mathsf{L}(X)$ の中で次のような部分集合を考える:

$$\mathsf{L}_{\mathcal{S}}(X) := \{Y \in \mathsf{L}(X) \mid Y \in \mathcal{S}\}$$

今 $\mathcal{A}$ は余完備なので $\mathsf{L}(X)$ は完備束、よって $\mathsf{L}_{\mathcal{S}}(X)$ についての join をとることができる (join をとる添字集合のサイズは $\mathcal{U}$-small なことにも注意されたい)。しかし $\mathsf{L}_{\mathcal{S}}(X)$ は最大元を持ち、join をとるとそれになる。それを示すために、$S_X := \sum \mathsf{L}_{\mathcal{S}}(X)$ としたとき、$S_X \in \mathsf{L}_{\mathcal{S}}(X)$ を示す。

各 $Y \in \mathsf{L}_{\mathcal{S}}(X)$ に対して、添字集合のサイズは $\mathcal{U}$-small なので、$Y \in \mathsf{L}_{\mathcal{S}}(X)$ をすべて動かして直和を取ることができ、よって包含から誘導される $\mathcal{A}$ の射

$$f\colon \bigoplus_{Y \in \mathsf{L}_{\mathcal{S}}(X)} Y \to X$$

が作れる。$\mathsf{L}(X)$ における join の構成より、$S_X = \operatorname{Im} f$ である。一方 $\mathcal{S}$ は無限直和と商で閉じていたので、$Y \in \mathcal{S}$ なことから $\bigoplus Y$ も $\mathcal{S}$ に入り、その商として $\operatorname{Im} f$ も $\mathcal{S}$ に入る。よって $S_X \in \mathcal{S}$ である。

S_X の構成よりこれは $\mathcal{S}$ に入る最大の X の部分対象 (つまり $\mathsf{L}_{\mathcal{S}}(X)$ の最大元) である。 □

定理 5.35. *Well-powered* で余完備なアーベル圏 $\mathcal{A}$ が、任意の対象が入射包絡を持つと仮定する。このとき *Serre* 部分圏 $\mathcal{S}$ に対して次は同値である。

(1) $\mathcal{S}$ は局所化部分圏である。
(2) $\mathcal{S}$ は *(*無限*)* 直和で閉じている。

とくに *Grothendieck* 圏に対して上の *2* つは同値である。

証明. (1) ⇒ (2): 命題 5.33 より従う。

(2) ⇒ (1): 命題 5.30(3) の条件をチェックする。(3)(a) は命題 5.34 より従うので、(3)(b) を示す。そのため $X \in \mathcal{A}$ を $\mathcal{A}(\mathcal{S}, X) = 0$ なる対象とする。このとき X の入射包絡 $X \hookrightarrow E$ をとる。この E が $\mathcal{S}^{\perp_{0,1}}$ に属することを示せばよい。

まず E は入射的であるので $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}, E) = 0$ は従う。なので $\mathcal{A}(\mathcal{S}, E) = 0$ なことを示したい。対象 $S \in \mathcal{S}$ からの射 $f\colon S \to E$ を取る。このとき $\mathcal{S}$ は商で閉じているので、f を $S \twoheadrightarrow \operatorname{Im} f \hookrightarrow E$ と分解することで、初めから f は単射であるとしてよい。

すると $S \hookrightarrow E(X)$ がゼロ射でないとすれば、$0 \neq S \in \mathsf{L}(E)$ であるので、$X \in \mathsf{L}(X)$ が本質的であったことから $X \cap S \neq 0$ が従う。一方 $X \cap S$ は S の部分対象であるので、$\mathcal{S}$ は部分対象で閉じたことから $X \cap S \in \mathcal{S}$ が従う。これは $0 \neq X \cap S \hookrightarrow X$ という射がゼロでないことを意味し、$\mathcal{A}(S, X) = 0$ と矛盾する。よって $\mathcal{A}(S, E) = 0$ である。 □

上の証明で大事なことは、$\mathcal{A}(\mathcal{S}, X) = 0$ なら X のなす部分圏は本質拡大で閉じている、ということである。なので入射包絡がとれれば、上のようにうまく命題 5.30(3)(b) を作ることができる。

6. (Ab5) アーベル圏での入射包絡の存在

この節では、*Grothendieck* 圏が豊富な入射的対象を持つことを仮定して、入射包絡の存在を議論する。そのために必要な条件は (Ab 5) のみなので、その仮定で考える。実は Grothendeick 圏は必ず豊富な入射的対象を持つのだが、そのことは次節以降で見る。

まず本質的単射と入射性についての考察をしておく。

命題 6.1. アーベル圏 $\mathcal{A}$ における単射 $\iota\colon X \hookrightarrow E$ で E が入射的なものとする。このとき任意の X の本質拡大は必ず E の内部で実現される。正確には、任意の本質的単射 $f\colon X \hookrightarrow A$ に対して、

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, hook, "\iota"'] & A \arrow[dl, "i"] \\ E & \end{tikzcd}$$

上図を可換にする単射 $i\colon A \hookrightarrow E$ が存在する。

証明. まず E の入射性より上を可換にする i が存在する。しかし f は本質的単射なので、$i \circ f = \iota$ の単射性より i は単射である。 □

以上の観察から、well-powered なアーベル圏において、入射的対象 E への埋め込み $X \hookrightarrow E$ がある場合、X の本質拡大は全て束 $\mathsf{L}(E)$ の中での本質拡大 $X \trianglelefteq M$ の形で与えられることになる (記号については定義 A.25 を参照)。

補題 6.2. *Well-powered* で余完備で *(Ab5)* を満たすアーベル圏 $\mathcal{A}$ が豊富な入射的対象を持つとき、対象 E に対して次は同値。

(1) E は入射的である。
(2) E は非自明な本質拡大を持たいない。正確には、任意の本質的単射 $E \hookrightarrow M$ は同型である。

証明. (1) ⇒ (2): こちらはアーベル圏についての仮定は何もいらない。E が入射的とし、本質的単射 $\iota\colon E \hookrightarrow M$ を持つとする。このとき入射性より ι は分裂単射となる。ここで可換図式が存在する:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, equal] & M \arrow[d, "\wr"] \\ E \arrow[r, hook, "{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]}"] \arrow[dr, equal] & E \oplus E' \arrow[d, two heads, "{[1,0]}"] \\ & E \end{tikzcd}$$

ここで ι が本質的単射より赤の射も本質的単射、よって上の合成を考えると $[1,0]\colon E \oplus E' \twoheadrightarrow E$ が単射より同型、よって上をたどって ι も同型である。(束論的に考えて、本質的部分対象が直和因子になってた場合、それは全体と一致しているという議論でもよい)

(2) ⇒ (1): こちらにいろいろな仮定を使う。$\mathcal{A}$ が豊富な入射的対象を持つので、対象 E を入射的対象 Q に埋め込んで、$E \leq Q$ と思う。このとき束 $\mathsf{L}(Q)$ の中で議論をする。

仮定 (Ab5) より束 $\mathsf{L}(Q)$ は完備で上連続なモジュラー束になる。よって命題 A.29 により、この束の中で E の擬補元 E' が取れる。このとき $E \oplus E' = Q$ を示せば E は入射的対象の直和因子より入射的なことが従う。

まず擬補元の定義より $E \cap E' = 0$ である。よって $Q = E + E'$ を示せばよい。次の合成を考える:

$$E = E/(E \cap E') \xrightarrow{\simeq} (E+E')/E' \hookrightarrow Q/E'$$

ここで $\mathsf{L}(Q/E') = [E', Q] \subset \mathsf{L}(Q)$ と同一視をする。このとき命題 A.30 より $[E', Q]$ のなかで $E+E'$ は本質的であるので、$(E+E')/E' \hookrightarrow Q/E'$ は本質拡大である。なので上の合成 $E \hookrightarrow Q/E'$ は本質拡大であるが、(2) の条件より同型となる。よって $(E+E')/E' \hookrightarrow Q/E'$ は同型、つまり $E+E' = Q$ が従う。 □

ようやく入射包絡の存在を示すことができる。以上の準備のもとではそんなに難しくない。

定理 6.3. *Well-powered* で余完備で *(Ab5)* を満たすアーベル圏 $\mathcal{A}$ が豊富な入射的対象を持つとき、任意の対象は入射包絡を持つ。

証明. 対象 $X \in \mathcal{A}$ が移入包絡を持つことを示したい。まず $\mathcal{A}$ が豊富な入射的対象を持つので、単射 $X \hookrightarrow Q$ という入射的対象 Q への単射が取れる。以下 X を Q の部分対象とみなし、束 $\mathsf{L}(Q)$ の中で考える。

$\mathcal{A}$ は余完備で (Ab5) を満たすことから束 $\mathsf{L}(Q)$ は上連続な完備モジュラー束である。よって命題 A.32 より、X の極大な本質的拡大 $X \trianglelefteq E \in \mathsf{L}(Q)$ がとれる。このとき E が入射的なことを示せばよい。

補題 6.2 を用いるため、E が非自明な本質的拡大を持たないことを示す。$\iota\colon E \hookrightarrow E'$ を本質的拡大だとすると、命題 6.1 より E' は $\mathsf{L}(Q)$ の内部で実現できる、つまり $E \trianglelefteq E' \in \mathsf{L}(Q)$ となる。しかし $X \trianglelefteq E \trianglelefteq E'$ が $\mathsf{L}(Q)$ で成り立つので、命題 A.26 により $X \trianglelefteq E'$ は本質拡大。よって E の極大性より $E = E'$ が従う。つまり E は非自明な本質的拡大を持たず、補題 6.2 より E は入射的である。 □

系 6.4. 環 Λ に対して、任意の右 Λ 加群は入射包絡を持つ。より一般に、*skeletally small* な加法圏 $\mathcal{C}$ に対して、右 $\mathcal{C}$ 加群のなす圏 $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ においては任意の対象が入射包絡を持つ。

証明. まず命題 E.10 より圏 $\mathsf{Mod}\,\Lambda$ は豊富な入射的対象を持つ。また例 4.2 より $\mathsf{Mod}\,\Lambda$ は Grothendieck 圏である。よって定理 6.3 より任意の加群は入射包絡を持つ。圏 $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ の場合も定理 E.15 より明らかである。 □

また次のような少し面白い観察ができる。対象 X を別の対象に埋め込むとき、たとえば $X = X$ という恒等射を考えるとこれが最小の本質拡大で、もっとでかい本質拡大をどんどんとっていきたい。逆に X を入射的対象に埋め込むと (できるなら)、それについて極小にとりたい。その二つは一致する:

命題 6.5. *Well-powered* で余完備で *(Ab5)* を満たすアーベル圏 $\mathcal{A}$ が豊富な入射的対象を持つとき、単射 $\iota\colon X \hookrightarrow Q$ について次は同値*:*

(1) ι は入射包絡。
(2) ι は X の本質拡大のなかで極大。正確には、ι は本質拡大であり、合成 $X \hookrightarrow Q \hookrightarrow Q'$ が本質拡大なら $Q \hookrightarrow Q'$ は同型。
(3) ι は入射的対象への埋め込みの中で極小。正確には、Q は入射的対象であり、$X \leq Q' \leq Q$ で Q' が入射的ならば $Q' = Q$ である。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): まず入射包絡の定義より ι は本質的単射である。次に $X \trianglelefteq Q'$ なる $X \leq Q \leq Q'$ をとると、$Q \trianglelefteq Q'$ なことが命題 A.26 から分かり、よって Q' は Q の本質拡大。一方命題 6.2 より入射的対象は非自明な本質拡大を持たないので、$Q = Q'$ が従う。

(2) $\Rightarrow$ (1): Q が入射的なことを示せばよい。命題 6.2 を用いるため、Q が非自明な本質拡大を持たないことを示せばよい。$Q \trianglelefteq Q'$ という本質拡大を取ると、$X \trianglelefteq Q \trianglelefteq Q'$ であるので、命題 A.26 より Q' は X の本質拡大でもある。なので (2) の条件より $Q = Q'$ が従う。

(1) $\Rightarrow$ (3): 本質拡大の定義と入射性よりただちに従う。

(3) $\Rightarrow$ (1): X の入射包絡を別に取ってしまえば、(3) の条件からそれは Q に一致していることが従う。 □

7. 局所連接 Grothendieck 圏へ向けて

この節は、locally coherent Grothendieck category 上で Ziegler spectrum の性質を論じた Herzog の論文 [He] と、skeletally small idempotent complete additive category と locally finitely presented additive category の一対一対応を調べている Crawley-Boevey の論文 [CB] を読んでいるときのメモです。がある程度 self-contained にしたい。

Well-powered なアーベル圏 $\mathcal{A}$ に対しては、対象 X の部分対象の束 $\mathsf{L}(X)$ の束論的性質を用いることで有限生成・ネーター・アルティン・長さ有限性を定義することができます。有限表示については二種類の定義があるらしく、有限表示の定義が決まればそこから連接 (coherent) 対象を定義できます。重要そうな性質は、**どんなアーベル圏でも、連接対象のなす圏は** *wide subcategory*、**つまり拡大で閉じたアーベル部分圏になる**ということです。とくに大抵の (著者が扱いたい)Grothendieck 圏は locally coherent になっており、連接対象のなす (たいてい小さい) アーベル圏が調べたいことが多いので、重要です。

7.1. 対象に対する有限的条件.

有限生成・ネーター・アルティン・長さ有限は、束論的に定義できます。Well-powered なアーベル圏 $\mathcal{A}$ が完備または余完備なら、部分対象の束は完備束になることに注意してください。逆に完備束でない状況ではおそらく次の定義くらいしか意味を持ちません:

定義 7.1. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の対象 S が

(1) **単純** *(simple)* であるとは、部分対象の同値類がちょうど 2 つ (0 と自身) となるときをいう。
(2) **長さ有限** *(has finite length, of finite length)* とは、部分対象のなす束 $\mathsf{L}(S)$ が集合になり、長さ有限 (つまり一つは組成列を持つ) になるときをいう。

長さ有限なモジュラー束は自動的に完備になるはずなのでまあ完備性仮定しても問題は無い気はします。

命題 7.2. アーベル圏の対象が長さ有限であることと、単純加群の有限回の拡大で得られることは同値であり、このとき *Jordan-Hölder* の定理 *(*長さの一意性・組成列の一意性*)* が成り立つ。

証明. 前半の主張は系 3.8 より明らか。後半はモジュラー束の一般論より従う。 □

完備束の条件を課すと、有限性が次のように定義できます。ここで、完備または余完備という条件を「(余) 完備」と以下書くこととします。

定義 7.3. Well-powered で (余) 完備なアーベル圏 $\mathcal{A}$ に対して、対象 X が

(1) 有限 (resp. 余) 生成であるとは、完備束 $\mathsf{L}(X)$ が (resp. 余) コンパクトなことをいう。

(2) ネーター (resp. アルティン) であるとは、完備束 $\mathsf{L}(X)$ がネーター的 (resp. アルティン的) なことをいう。
(3) 長さ有限であるとは、完備束 $\mathsf{L}(X)$ が長さ有限のときをいう。

通常の加群の部分加群についての大抵の性質は、完備モジュラー束において成り立つことが多い。**唯一の例外は上連続性であり、これが加群圏が対称的でないことの理由である** *(*任意の加群は移入包絡を持つが射影被覆は持たない等*)*。

加群の場合にこれらが通常の定義と同値なことは演習問題とする。有限生成のとこだけチェックが必要かな。

命題 7.4. *Well-powered* で *(*余*)* 完備なアーベル圏 $\mathcal{A}$ に対して次が成り立つ。

(1) 有限 *(resp.* 余*)* 生成対象は拡大と商 *(resp.* 部分*)* 対象で閉じる。
(2) ネーター対象 *(resp.* アルティン対象*)* のなす部分圏は *Serre* である。
(3) 対象がネーター的 *(resp.* アルティン的*)* なことと、任意の部分対象 *(resp.* 商対象*)* が有限生成 *(resp.* 有限余生成*)* なことは同値である。
(4) 対象が長さ有限なことと、ネーター的かつアルティン的なことは同値である。

証明. (1), (2) は命題 A.16 と双対性から従い、(3) は命題 A.12 から従う。 □

しばらくはあまり条件は仮定せずに locally coherent くらいでやっていくので、ネーター性アルティン性はしばらく忘れて良い。

定義 7.5. [He] Well-powered で (余) 完備なアーベル圏 $\mathcal{A}$ の対象 X が

(1) **有限表示** *(finitely presented)* であるとは、X は有限生成であり、任意の有限生成加群から X への全射の核が必ず有限生成になるときをいう。
(2) **連接** *(coherent)* であるとは、X は有限表示であり、任意の有限生成部分加群が有限表示なときをいう。

定義より連接ならば有限表示、有限表示なら有限生成である。

注意 7.6. 有限表示については、direct limit を持つ圏 (アーベルでなくてもよい、加法性さえなくてもよい) において別の定義がある ($\mathcal{A}(X,-)$ が direct limit を保つ) (おそらく compact object とか呼ばれる？)。これと完全に同値かは分からないが、locally finitely generated なら同値なことをあとで見たい。

普通の有限表示加群を知っている人からするとよく分からない定義かもしれないので、普通の定義との関連を見ていく。まず次の簡単な観察をしよう。

補題 7.7. *Well-powered* で *(*余*)* 完備なアーベル圏 $\mathcal{A}$ において、有限生成射影的対象は必ず有限表示である。

証明. 有限生成対象から射影的対象への全射を考えると射影性より split する。よって核は有限生成対象の直和因子より、有限生成である。 □

定義 7.8. Well-powered で (余) 完備なアーベル圏 $\mathcal{A}$ が**豊富な有限生成射影対象をもつ** *(has enough finitely generated projectives)* とは、任意の有限生成対象が有限生成射影的対象からの全射を持つときをいう。

例 7.9. Skeletally small な加法圏 $\mathcal{C}$ に対して、右 $\mathcal{C}$ 加群のなす圏 $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ は豊富な有限生成射影対象を持つ。

以下の補題や命題群は、ステートメントだけ見て自分で示してみることをオススメする。基本的に pullback とかしまくればパズルのように全部簡単に出てくるので楽しい。

補題 7.10. *Well-powered で (余) 完備なアーベル圏 $\mathcal{A}$ における短完全列*

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

において、X が有限生成、Y が有限表示 (resp. 連接) ならば Z は有限表示 (resp. 連接) である。

証明. まず Y が有限表示の場合を示す。命題 7.4(1) より有限生成性は商で閉じるので、Z は有限生成である。次に短完全列 $0 \to K \to W \to Z \to 0$ で W が有限生成なものをとる。示したいのは K が有限生成なこと。しかし pullback とれば次の完全図式ができる:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

ここで X と W が有限生成より、命題 7.4(1) より有限生成性は拡大で閉じるから、E は有限生成。よって真ん中縦の完全列において、Y が有限表示なので K は有限生成。

次に Y が連接のとき Z が連接を示す。すでに示したことから、Y は有限表示より Z は有限表示である。よって Z の任意の有限生成部分対象が有限表示を示せばよいので、$A \hookrightarrow Z$ を有限生成部分対象とすると、pullback をとって次の完全図式ができる。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, hook] & A \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ここで X と A が有限生成なので、有限生成性は拡大で閉じる (命題 7.4 より) ので E は有限生成。よって Y が連接、E は Y の有限生成部分対象より有限表示。なので X が有限生成、E が有限表示なのとすでに示したことから A は有限表示なことが従う。 □

系 7.11. *Well-powered で (余) 完備なアーベル圏 $\mathcal{A}$ において、有限表示対象・連接対象は余核で閉じる。*

証明. 補題 7.10 よりすぐ。 □

命題 7.12. *Well-powered で (余) 完備なアーベル圏 $\mathcal{A}$ が豊富な有限生成射影的対象を持つとき、対象 X に対して次が成り立つ。*

(1) *X が有限生成であることと、有限生成射影対象からの全射を持つことは同値である。*
(2) *X が有限表示であることと、有限生成射影対象の間の射の余核として書けることは同値である。*

証明. (1): 有限生成性は商で閉じるので明らか。

(2): まず X が有限表示とする。仮定より $0 \to \Omega X \to P_0 \to X \to 0$ という完全列で P_0 は有限生成射影対象なものがある。一方 ΩX は、X が有限表示なので有限生成になる。よって全射 $P_1 \twoheadrightarrow \Omega X$ が取れて、くっつければ $P_1 \to P_0 \to X \to 0$ が完全。

逆は、有限生成射影対象は有限表示であり、有限表示対象は余核で閉じるので従う。 □

この命題は加群の場合の定義との同値性を与えている。

補題 7.13. *Well-powered で (余) 完備なアーベル圏 $\mathcal{A}$ の有限表示対象 X に対して次は同値。*

(1) X は連接である。
(2) 任意の短完全列 $0 \to K \to X \to Y \to 0$ において Y が有限表示ならば K が有限表示。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): Y は有限表示で X は有限生成より K は有限生成、よって K は X の有限生成部分対象より有限表示である。

(2) $\Rightarrow$ (1): X の有限生成部分対象 K が有限表示なことを見れば良いが、完全列 $0 \to K \to X \to Y \to 0$ を作ると、補題 7.10 より、K が有限生成、X が有限表示から Y は有限表示。よって条件より K は有限表示である。 □

また次が成り立つ。

命題 7.14. *Well-powered* で *(余)* 完備なアーベル圏 $\mathcal{A}$ において次が成り立つ。

(1) 有限表示対象のなす圏は余核と拡大で閉じる。
(2) 連接対象のなす圏は核と余核と拡大で閉じる、つまり *wide* である。

証明. (1): 余核で閉じるのはすでに見た。拡大で閉じることを見る。短完全列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ において X と Z が有限表示だとする。まず有限生成性は拡大で閉じる (命題 7.4(1) から) ので Y は有限生成である。次に短完全列 $0 \to K \to W \to Y \to 0$ で W が有限生成なものをとったとき、K が有限生成を見ればよい。次の完全列ができる。

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

ここで Z が有限表示、W は有限生成なので L は有限生成。また X は有限表示、L は有限生成なので K は有限生成が従いおっけー。

(2):順番に見てく。

(核で閉じること): $0 \to K \to X \xrightarrow{f} Y$ という完全列をとり、X と Y が連接だとする。とくに X が有限生成より $\operatorname{Im} f$ は有限生成であり、かつ Y の部分対象より $\operatorname{Im} f$ は有限表示である。よって短完全列 $0 \to K \to X \to \operatorname{Im} f \to 0$ を考えれば、X が連接で $\operatorname{Im} f$ が有限表示より、補題 7.13 より K は有限表示。また K の有限生成部分対象は X の有限生成部分対象でもあるので、連接性よりそれは有限表示になる。なので K も連接である。

(余核で閉じること): 補題 7.10 ですでに示した。

(拡大で閉じること): 短完全列 $0 \to X \to Y \xrightarrow{f} Z \to 0$ において X と Z が連接だとする。(1) で示したことから特に Y は有限表示である。よって Y の任意の有限生成部分対象 A が有限表示ならよい。このとき次の図式ができる。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \cap A \arrow[r] \arrow[d, hook] & A \arrow[r] \arrow[d, hook] & f(A) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r, "f"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

A が有限生成より $f(A)$ は有限生成。よって Z の連接性から $f(A)$ は有限表示。よって $f(A)$ が有限表示、A が有限生成なので $X \cap A$ は有限生成。よって $X \cap A$ は X の連接性から有限表示。ここで有限表示性は (1) より拡大で閉じるので A は有限表示である。 □

よって、ネーター性も何も仮定しない環上で、連接加群のなす圏はアーベル圏になる！

Question 7.15. 環付き位相空間に対して、それ上の加群層のなす *Grothendieck* 圏において、連接対象は、通常の代数幾何の意味での連接層と同じ ???

7.2. **局所有限性 (locally coherent, noetherian とかとか).** 例えば環上の加群を考える時、環にネーターの仮定をすると便利だったりする。そのようにある種の有限的な条件を課す（ネーター的スキームとかも）のに対応して、Grothendieck 圏でも各種の有限性を課すと議論がしやすい。

定義 7.16. Well-powered な (余) 完備アーベル圏 $\mathcal{A}$ における性質 P が与えられたとき、$\mathcal{A}$ が**局所的に** *P (locally P)* であるとは、$\mathcal{A}$ が性質 P を満たす対象からなる生成**集合**が取れるときをいう。

余完備な場合、生成集合を取れた時点で well-powered だったことに注意 (命題 3.16)。

例 7.17. 例えば局所有限生成 (locally finitely generated)、局所ネーター的 (locally noetherian)、局所有限表示 (locally finitely presented)、局所連接 (locally coherent)、局所有限長 (locally finite) が定義できる。

それぞれ、より強い形での定義が普通なのでそれとの同値性を見ていきたい。まずは局所有限性。

命題 7.18. 余完備で生成集合を持つアーベル圏 $\mathcal{A}$ において、次は同値。

(1) $\mathcal{A}$ は局所有限生成である。
(2) $\mathcal{A}$ の任意の対象 X に対して、$X = \sum X_\lambda$ で各 X_λ が有限生成となるようできる。
(3) $\mathcal{A}$ の任意の対象 X に対して、X の有限生成部分対象たち全ての和は X になる。
(4) $\mathcal{A}$ の任意の対象 X に対して、X は有限生成部分対象の有向族の和としてかける。

証明. (1) ⇒ (2): 仮定より全ての元が有限生成である $\mathcal{A}$ の生成集合 $\mathcal{G}$ が取れる。このとき $\mathcal{A}$ の対象 X に対して、命題 3.13 より $X = \mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(X)$ が成り立ち、$\mathrm{tr}_{\mathcal{G}}(X) = \sum_\varphi \operatorname{Im}\varphi$、ここで φ は $\mathcal{G}$ の対象から X への射を走る。しかし $\mathcal{G}$ の対象は有限生成より、$\operatorname{Im}\varphi$ も有限生成。よって (2) が従う。

(2) ⇒ (3) ⇒ (4): 明らか (有限生成部分対象全ての集合は有向族をなすことに注意)。

(4) ⇒ (1): 今 $\mathcal{A}$ は余完備より生成子 G を持つと仮定してよい。このとき $G = \sum_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ と、各 G_λ は有限生成であるような有向和として書けている。このとき $\mathcal{G} := \{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ とすればこれが $\mathcal{A}$ の生成集合である。なぜなら $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \twoheadrightarrow G$ という全射があり G は $\mathcal{A}$ の生成子なので。 □

次に局所有限表示性を見ていきたいが、ここで微妙な議論がいろいろ必要になる、というのもコンパクト性のほうがいろいろ相性がよい。が一般に同値かは微妙で、局所有限生成な Grothendieck 圏では同値になることを見る。

命題 7.19. *Well-powered* で *(Ab5)* 満たすアーベル圏 $\mathcal{A}$ 上の対象 X に対して次は同値。

(1) X は有限生成。
(2) $\mathcal{A}(X, -)$ が有向和と可換。つまり、任意の対象 Y と $\mathsf{L}(Y)$ の有向族 Y_λ に対して、自然な写像
$$\varinjlim_\lambda \mathcal{A}(X, Y_\lambda) \to \mathcal{A}(X, \sum_\lambda Y_\lambda)$$
が同型。
(3) $\mathcal{A}(X, -)$ が、単射からなるフィルター余極限と可換。つまり、任意のフィルター圏 I からの関手 $F\colon I \to \mathcal{A}$ で各 $a\colon i \to j \in I$ に対して $F_a\colon F_i \to F_j$ が単射であるようなものに対して、自然な写像
$$\operatorname{colim} \mathcal{A}(X, F_{(-)}) \to \operatorname{colim} \mathcal{A}(X, \operatorname{colim} F)$$
が同型。

証明. まず (3) の状況で、各 i に対して構造射 $F_i \to \operatorname{colim} F$ は単射なことが補題 4.6 から従う。なので (2) と (3) の写像が単射なことはすぐ分かる。また (3) は構造射の単射性より各 F_i は $\operatorname{colim} F$ の部分対象と見れて、また $\operatorname{colim} F = \sum_i F_i$ と有向和で書けている。なので (結局フィルター余極

限はこの場合有向族の有向和となるので)(2) のみを見ればよい。また (Ab5) より (2) の状況では $\varinjlim_\lambda Y_\lambda = \sum_\lambda Y_\lambda$ なことが命題 4.4 より従うことにも注意。

(1) ⇒ (2): (2) の条件を言い換えると：「任意の射 $f : X \to \sum_\lambda Y_\lambda$ は必ずある $X \to Y_\lambda$ を経由する」。これを示す。しかしこれは $\operatorname{Im} f$ がある Y_λ に入ればいい。今 X が有限生成より、その商として $\operatorname{Im} f \subset Y$ は有限生成である。今 $\operatorname{Im} f \leq \sum_\lambda Y_\lambda$ という大小関係が $\mathsf{L}(Y)$ においてあるが、このとき interval $[0, \operatorname{Im} f]$ のコンパクト性より、命題 A.20 から $\operatorname{Im} f \leq Y_\lambda$ なる λ が存在することが分かる。ここで (Ab5) 使ったことに注意。

(2) ⇒ (1): 有限生成を示すために、有向和 $X = \sum_i X_i$ があれば $X = X_i$ なる i があればよい。しかし $\varinjlim_i \mathcal{A}(X, X_i) \to \mathcal{A}(X, \sum_i X_i)$ は全射であり、なので右辺から恒等射 $X = \sum_i X_i$ をとれば、ある i があり次が可換:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, equal] & X_i \arrow[d, hook] \\ & \sum_i X_i \end{tikzcd}$$

よって $X_i \hookrightarrow X$ が全射なので $X_i = X$ となる。 □

つまり Grothendieck 圏では、有限生成性は特別なフィルター余極限との Hom-functor の可換性で特徴づけられた。一方、同じような条件で定義される対象に「コンパクト性」がある (束のコンパクト性とは別なことに注意されたい！)。文献によってはコンパクト性のことを有限表示性と読んでいることが多い (というかそのほうが多い)。

定義 7.20. 順極限を持つ圏 $\mathcal{A}$ の対象 X が**コンパクト** *(compact)* であるとは、任意の $\mathcal{A}$ の順系 $\{Y_i \,|\, i \in I\}$ に対して、自然な写像

$$\varinjlim_{i \in I} \mathcal{A}(X, Y_i) \to \mathcal{A}(X, \varinjlim_{i \in I} Y_i)$$

が同型になるときをいう。つまり次の 2 条件が満たされる。

(1) $X \to Y_i$ が $X \to Y_i \to \varinjlim Y_i$ と合成して 0 なら、ある $i \leq j$ であって $X \to Y_i \to Y_j$ がすでに 0 になっている。
(2) 任意の射 $X \to \varinjlim Y_i$ は必ずある j があって $X \to Y_j \to \varinjlim Y_i$ と分解できる。

このコンパクト性が、局所有限生成の仮定のもとでは有限表示性と同値なことを見ていく。まず次が簡単に分かる。

補題 7.21. 局所有限生成な *Grothendieck* 圏 $\mathcal{A}$ における全射 $\pi \colon Y \twoheadrightarrow Z$ において、任意の Z の有限生成部分対象 W に対して、ある Y の有限生成部分対象 W' であり $\pi(W') = W$ であるようなものが存在する。

証明. 局所有限生成性より、$\pi^{-1}(W) = \sum_i Y_i$ という有限生成部分対象の有向和である。一方 π は全射より $W = \pi\pi^{-1}(W) = \pi(\sum_i Y_i) = \sum_i \pi Y_i$ で、W が有限生成なことからある i について $W = \pi Y_i$ となる。 □

命題 7.22 ([St, Proposition V.3.4])**.** 局所有限生成な *Grothendieck* 圏 $\mathcal{A}$ の対象 X において次は同値。

(1) X は有限表示。
(2) $\mathcal{A}(X, -)$ がフィルター余極限と可換。
(3) X はコンパクト。

証明. 一応、フィルター余極限を考えることと順極限を考えることは同じではあるが、念の為 (2) と (3) の同値性もついでに示す。

(1) ⇒ (2): フィルター圏からの関手 $F \colon I \to \mathcal{A}$ について、誘導される $\operatorname{colim} \mathcal{A}(X, F_{(-)}) \to \mathcal{A}(X, \operatorname{colim} F)$ が同型なことを見る。

(単射性) これには X が有限生成のみを使う。示すべきは、ある射 $X \to F_i$ に対して、構造射との合成 $X\colon F_i \operatorname{colim} F$ が 0 になったとき、もとの $X \to F_i$ が $\operatorname{colim} \mathcal{A}(X, F_{(-)})$ において 0 なこと。ここで補題 4.6 より次が分かる:

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[dl] \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \sum_{a\colon i\to\cdot} \operatorname{Ker} F_a \arrow[r] & F_i \arrow[r] & \operatorname{colim} F \end{tikzcd}$$

ここで $\sum_a \operatorname{Ker} F_a$ は有向和なので、X が有限生成なことと補題 7.19 より、ある $a\colon i \to j$ に対して次が可換:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[d] \\ \operatorname{Ker} F_a \arrow[r] \arrow[dr, "0"'] & F_i \arrow[d, "F_a"] \\ & F_j \end{tikzcd}$$

よって $X \to F_i \xrightarrow{F_a} F_j$ の合成が 0 となり、これは $X \to F_i$ が $\operatorname{colim} \mathcal{A}(X, F_{(-)})$ において 0 なことを意味する。

(全射性) 任意に射 $X \to \operatorname{colim} F$ をとってくる。ここで構造射 $F_i \to \operatorname{colim} F$ の像を $\overline{F_i}$ とすると、$\operatorname{colim} F = \sum_{i\in I} \overline{F_i}$ であり、X の有限生成性と補題 7.19 から、$X \to \operatorname{colim} F$ は $\overline{F_i} \hookrightarrow \operatorname{colim} F$ を通る。ここで $X \to \overline{F_i}$ で pullback をとって次の可換図を作る:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_i \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_i \arrow[r] & F_i \arrow[r] & \overline{F_i} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

今 X は有限生成より、補題 7.21 より、ある E の有限生成部分対象 W であって、合成 $W \hookrightarrow E \twoheadrightarrow X$ が全射となるようとれるので、次ができる (ここで初めて局所有限生成性が必要):

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_i \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_i \arrow[r] & F_i \arrow[r] & \overline{F_i} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ここで X が有限表示なので、E が有限生成より L は有限生成。また補題 4.6 より $K_i = \sum_{a\colon i\to\cdot} \operatorname{Ker} F_a$ が成り立ち、L の有限生成性より補題 7.19 より $L \to K_i$ はある $a\colon i \to j$ に対して $\operatorname{Ker} F_a \hookrightarrow K_i$ を経由する。よって $L \to K_i \to K_j$ の合成は 0 なので、次を考える:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "0"] & W \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddl, dotted] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_i \arrow[r] \arrow[d] & F_i \arrow[r] \arrow[d, "F_a"'] & \overline{F_i} \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_j \arrow[r] & F_j \arrow[r] & \overline{F_i} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

すると可換性より $L \to W \to F_i \xrightarrow{F_a} F_j$ は 0 射より、一番上の完全性からある $X \to F_j$ が誘導される。このとき $X \to \overline{F_i} \hookrightarrow \overline{F_j}$ と $X \to F_j \twoheadrightarrow \overline{F_j}$ が等しいことが diagram-chasing で分かる。なので $X \to \operatorname{colim} F$ は $F_j \to \operatorname{colim} F$ を経由することが分かり、全射性が従う。

(2) $\Rightarrow$ (3): 当たり前。

(3) ⇒ (1): 補題 7.19 より X は有限生成が従う。次に、任意の短完全列 $0 \to K \to Y \to X \to 0$ で Y が有限生成だったときに K が有限生成なことを示せばよい。ここで $\mathcal{A}$ は局所有限生成より $K = \sum_i K_i$ という有限生成部分対象 K_i たちの有向和で書けている。補題 4.4 より $X \cong \varinjlim_i (Y/K_i)$ であり、(3) の条件よりこの同型射はある $Y/K_j \to \varinjlim_i Y/K_i$ を経由する。次の可換図を見る。

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
& K_j \arrow[r, equal] \arrow[d] & K_j \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] \arrow[dl] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & Y/K_j \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim_i Y/K_i \arrow[r] & 0 \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

まず右の $X \to \varinjlim_i (Y/K_i)$ が同型より左下は pullback になり、縦横は全て完全列。しかし下の列は split していることが右下の三角形の可換性より分かり、L は Y/K_j の直和因子。しかし Y が有限生成より Y/K_j も有限生成で、その直和因子として L も有限生成。よって左の縦の完全列において K_j と L が有限生成なことと命題 7.4 より有限生成性は拡大で閉じるので K は有限生成なことが従う。 □

Appendix A. 束論について

著者の好みから、各議論にいろいろ束論でぶん殴ることをします。これは、**アーベル圏では元をとって議論はできないが、部分対象の集合はモジュラー束になるので束論の議論は使える**からだと思っています (元をとる代わりに束で殴る)。さらに Grothendieck 圏では束が**上連続**になるので、それを使った諸々の結果で殴ることができます。

A.1. 束の基本的な定義.

定義 A.1. Poset L が**束** *(lattice)* であるとは、任意の有限個の元に上限と下限が存在するときをいう。ここで $a, b \in \mathsf{L}$ の上限 (join) を $a \vee b$、下限 (meet) を $a \wedge b$ と書く。また最大元と最小元が (0 個の元の下限・上限として) 存在するが、これを 1、0 と書く。

普通は最大元・最小元の存在は束の定義に含めないことが多いですが、簡単のために含めることとしています。

例 A.2. 次は束となる。

- ある集合上の部分集合のなす集合、join が和集合、meet が共通部分。
- 加群上の部分加群全体、join が和、meet が集合論的共通部分。
- Well-powered なアーベル圏上で、対象 X の部分対象のなす束 $\mathsf{L}(X)$ (by 命題 3.2)。
- あとは組合せ論的にいろいろあるよね、有限 Coxeter 群は weak order (Bruhat でないやつ) で束になります。
- アーベル圏の Serre とか「〇〇で閉じた部分圏」全体 (集合論的問題はおいとく)。これは命題 A.4 より、poset であって、部分圏的に共通部分をとれば下限がある (また最大元も持つ) ので従う。
- 束 L の比較可能な二元 $a \leq b$ に対して interval subposet $[a, b]$。

定義 A.3. 束 L が**完備** *(complete)* とは、任意の L の (有限とは限らない) 部分集合 $S \subset L$ が上限 $\bigvee S$ と下限 $\bigwedge S$ を持つときをいう。

次の特徴付けは便利。

命題 A.4. *Poset L について次は同値。*

(1) L は完備束である。
(2) L は束かつ任意の部分集合が上限を持つ。
(3) L は束かつ任意の部分集合が下限を持つ。
(4) L は任意の部分集合が上限を持つ。
(5) L は任意の部分集合が下限を持つ。

証明. (1) ⇒ (2) ⇒ (4): 定義より。

(4) ⇒ (1): 部分集合 S の下限を作ればよいが、$\{x \in L \mid x \geq s \text{ for all } s \in S\}$ という部分集合の上限を取れば良い。 □

例 A.5. 次は完備束。

- 有限束。
- 部分加群のなす束。
- Well-powered で完備または余完備なアーベル圏の、部分対象のなす束。
- アーベル圏の「○○で閉じた部分圏」全体。
- 完備束 L の任意の interval。

また完備束でない例として、どんな簡単な反例があるかなあ？教えて。

A.2. **モジュラー束.** 次に、いっぱい出てくるモジュラー性を定義する。

定義 A.6. 束 L が**モジュラー** *(modular)* であるとは、任意の 2 元 $x_1 \leq x_2$ と任意の元 y に対して、$(y \vee x_1) \wedge x_2 = (y \wedge x_2) \vee x_1$ となることである。

これは少し分かりにくい。直感としては「y を、interval $[x_1, x_2]$ に放り込む方法として、

- まず x_1 より大きくして (x_1 と join する)、そのあと x_2 より小さくする (x_2 と meet する)。
- まず x_2 より小さくして (x_2 と meet する)、そのあと x_1 より大きくする (x_1 と join する)。

という 2 つの操作があります (実際に interval に入ることはやれば分かる)。で一般には $(y \vee x_1) \wedge x_2 \geq (y \wedge x_2) \vee x_1$ なことがやれば分かります。この二種の操作が一致する、と覚えれば覚えれます。

例 A.7. 次はモジュラー束である。

- 部分加群のなす束。
- Well-powered なアーベル圏上で、対象の部分対象のなす束 (定理 3.9)。
- 分配的な束。
- モジュラー束の双対束。よってモジュラー性は対称的な条件。

便利なモジュラー束の特徴づけとして次があります。そのために補元を導入します。

定義 A.8. 束 L の y が x の**補元** *(complement)* であるとは、$x \vee y = 1$ かつ $x \wedge y = 0$ が成り立つことである。

注意 A.9. (1) 補元は存在しても一意的ではありません。加群の場合、M の部分加群の束において N の補元が L であることは、$N \oplus L = M$ と直和になっていることと同値です。これを考えるとベクトル空間とかで簡単に補元が一意と限らないことが分かります。
(2) 加群が半単純であることと、部分加群の束において任意の元が補元を持つことは同値です (半単純性の、一つの束論的特徴づけ)。

命題 A.10. *束 L がモジュラーであることと、「L の任意の interval の中で、同じ補元を持つ 2 つの比較可能な元は等しい」は同値である。*

証明. やればできる。スケッチ。モジュラーだとしたら「」が成り立つのはモジュラー性の等式を使えば 2 つの元を等号で結べておっけー。「」が成り立つなら、$x_1 \leq x_2$ と y に対して、interval $[x_1 \wedge y, x_2 \vee y]$ を考えて、その中で $(y \vee x_1) \wedge x_2 \geq (y \wedge x_2) \vee x_1$ はともに y が補元なことが計算で分かりわかる。 □

次にアーベル圏上でのいろんな対象の性質を考えるための用語を定義します。

定義 A.11. L を完備束とする。

(1) L が**コンパクト** *(compact)* であるとは、$1 = \bigvee S$ なる部分集合 $S \subset L$ があったら、S の有限部分集合 F であってすでに $1 = \bigvee F$ となるようとれるときをいう。
(2) L が**余コンパクト** *(cocompact)* であるとは、双対束 L^{op} がコンパクトなときをいう。
(3) L が**ネーター的** *(noetherian)* であるとは、L の上昇列がいつかとまるときをいう。
(4) L が**アルティン的** *(artinian)* であるとは、L の降下列がいつかとまるときをいう。
(5) L が**長さ有限** *(has finite length, of finite length)* であるとは、少なくとも 1 つ長さ有限の組成列 (つまり 0 から 1 への真の増大列であってそれ以上細分できないもの) を持つときをいう。

このとき加群の類似で次が成り立つ。

命題 A.12. L を完備束とすると次は同値。

(1) L はネーター的である。
(2) L の任意の空でない部分集合は極大元を持つ。
(3) L の任意の元 x に対して、$[0, x]$ がコンパクト。

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2): これは加群と全く同じ。(1) から (2) は、元を取って極大元でないならそれよりでかいのがあり、それが極大元でないなら､､､を繰り返すと矛盾。(2) から (1) は上昇列の構成要素からなる集合の極大元とれば止まるのは分かる。

(2) $\Rightarrow$ (3): $x = \bigvee S$ とする。このとき、集合 $\{\bigvee F \mid F$ は S の有限部分集合$\}$ の極大元をとると、x に一致していることを示せばよい。極大元 $\bigvee F_0$ が x より真に小さいと仮定する。まず $\bigvee F_0 \not\geq s$ なる $s \in S$ があるはず、じゃないなら $\bigvee F_0 = x$ となっているので。このときすぐ $s \notin F_0$ は分かる。よって F_0 に s を付け加えると、F_0 より真に大きくなり、よって $\bigvee F_0 \vee s = \bigvee F_0$ となるが、これは $\bigvee F_0 \geq s$ と矛盾。

(3) $\Rightarrow$ (1): 上昇列 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots$ を取る。完備束より $x_\infty := \bigvee_{i \geq 1} x_i$ が取れる。ここで $[0, x_\infty]$ のコンパクト性より $x_\infty = \bigvee_{i=1}^{n} x_i = x_n$ となる n が取れる。よって $m \geq n$ については $x_m \leq x_\infty = x_n \leq x_m$ から $x_n = x_m$ □

命題 A.13. 完備なモジュラー束 L に対して、次は同値。

(1) L が長さ有限である。
(2) L はネーター的かつアルティン的である。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): たぶんモジュラーがいる？先に Jordan-Hölder とかからやったほうがよさそうだけど、割と面倒。

(2) $\Rightarrow$ (1): $0 \neq 1$ としてよい。まずアルティン的より、0 でない元全体のなかに極小元が存在するので x_1 と書く。このとき $1 = x_1$ なら $0 < 1$ が組成列。違うなら x_1 より真に大きい元全体の集合は (1 があるので) 空でないので、またアルティン性より極小元が存在し、x_2 とする。もし $1 = x_2$ なら $0 < x_1 < 1$ が組成列。違うならまた繰り返すと、いつまでも止まらないとすれば $x_1 < x_2 < \cdots$ という無限真増大列ができてネーター性に矛盾するので、このプロセスはいつか止まる。よって L は組成列を持つ。 □

Grothendieck 圏やらでよく出てくるのが、特別な *directed poset* についての colimit を考えることである。colimit とか言わなくても、束論ではわりと便利。

定義 A.14. Poset P が**有向** *(directed)* であるとは、P は空でなく、P の任意の 2 元 $x, y \in P$ に対して、$x \leq z$ かつ $y \leq z$ なる $z \in P$ が存在するときをいう。また束 L の部分集合 P が**有向族** *(directed family)* であるとは、P が充満部分 poset として有向なときをいう。

するとコンパクト性の、有向族を用いた簡明な特徴付ができる。

命題 A.15. 完備束 L がコンパクトであることと、任意の有向族 $P \subset L$ に対して、$1 = \bigvee P$ ならばある元 $x \in P$ により $1 = x$ となっていることは同値である。

証明. コンパクトなら条件満たすのはすぐ。逆は、$1 = \bigvee S$ なら、$P := \{S$ の有限個の元の join $\}$ という集合は有向族になることが分かり、$1 = \bigvee P$ がすぐ。あとは条件よりすぐ。 □

有限生成性やネーター性が商や部分や拡大で閉じたりといったものの束論類似の次が成り立つ。モジュラー性を課すことに注意せよ。

命題 A.16. L を完備束、x を L の元とすると次が成り立つ。

(1) L がコンパクトなら $[x, 1]$ もコンパクト。
(2) $[0, x]$ と $[x, 1]$ がともにコンパクトなら L はコンパクト。

さらに L がモジュラーとすると次が成り立つ。

(3) $[0, x]$ と $[x, 1]$ がともにネーターであることと L がネーターであることは同値。

証明. (1): 明らか。モジュラー性もいらない。

(2): 慎重な議論が必要。$1 = \bigvee S$ なる L の有向族 $S \subset L$ をとる。普通に考えると x との join と meet をとりたくなるが、meet を何も考えずにとると meet と有向和との可換性が必要になり、上連続性が欲しくなる (実際上連続を仮定すると証明はもっと楽)。なのでまず join をとる。もちろん $1 = \bigvee_{s \in S}(x \vee s)$ という $[x, 1]$ のなかでの等式が成り立つ。よって $[x, 1]$ のコンパクト性よりある元 $s_0 \in S$ があり $1 = x \vee s_0$ である。
次に、$S' := \{s \in S \mid s \geq s_0\}$ とする。ここで S の有向性より、$1 = \bigvee S'$ が成立することに注意。このとき補題 A.17 から、束の同型 $[s_0, 1] \cong [x \wedge s_0, x]$ が、y に対して $x \wedge y$ をとることで与えられる。よって、$1 = \bigvee S'$ という $[s_0, 1]$ の中での等式をこの同型で移せば、$x = \bigvee_{s \in S'}(x \wedge s)$ が成り立つ！(少し怖いが、順序集合として同型なので、上限下限は無限でも保存されるはず！) (上連続ならこれがすぐ出るが、上連続を仮定しないと一度 $[x, 1]$ で議論してからやらないといけない！)。よって $[0, x]$ のコンパクト性より、ある元 $s \in S'$ があり $x = x \wedge s$、つまり $x \leq s$ が成り立つ。これと $s \geq s_0$ と $1 = x \vee s_0$ から、$1 = s$ がめでたく出る。

(3): まず L がネーターとする。このときほぼ定義から、すべての interval はネーターが分かる。よっておっけー (モジュラーいらない)。
逆にモジュラー性が必要。$[0, x]$ と $[x, 1]$ がネーターとして、L の上昇列 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ をとる。自然に x との join と meet をとれば、$[0, x]$ での上昇列 $x \wedge a_1 \leq x \wedge a_2 \leq \cdots$ と、$[x, 1]$ での上昇列 $x \vee a_1 \leq x \vee a_2 \leq \cdots$ ができる。よってそれぞれのネーター性から、ある i があって、$j \geq i$ に対しては $x \wedge a_j = x \wedge a_i$、$x \vee a_j = x \vee a_i$ が成り立つ。一方 $a_i \leq a_j$ とモジュラー性より、$(x \vee a_i) \wedge a_j = (x \wedge a_j) \vee a_i$。この左辺は $(x \vee a_j) \wedge a_j = a_j$ で、右辺は $(x \wedge a_i) \vee a_i = a_i$ となる。よって $a_i = a_j$ が $j \geq i$ に対して成り立つので、L はネーターである。 □

ここで次のモジュラー束についてのよく知られた話を使った。これは加群の第なんとか準同型定理の類似である。

補題 A.17. L をモジュラー束、x, y という L の任意の *2* 元をとると、束の同型 $[x, x \vee y] \cong [x \wedge y, y]$ が、$a \mapsto a \wedge y$ と $b \vee x \leftarrow b$ で得られる。

証明. well-defined 性は明らかなので、互いに逆なのをモジュラー性を用いて等式変形して簡単に示せる。 □

A.3. **上連続な完備束.** 加群論での類似をいろいろ成り立たせようとしたら、**上連続** *(upper continuous)* という条件がめっちゃ使いたくなる。これが Grothendieck 圏の一番わかりにくい条件だが、重要。

定義 A.18. 完備束 L が**上連続** *(upper continuous)* であるとは、任意の元 $x \in L$ と有向族 S に対して、$x \wedge (\bigvee_{s \in S} s) = \bigvee_{s \in S}(x \wedge s)$ が成り立つときをいう。

有向族という仮定に注意。定義から $x \wedge (\bigvee_{s \in S} s) \geq \bigvee_{s \in S}(x \wedge s)$ は成り立つことに注意。

命題 A.19. 環上の加群に対して、部分加群のなす束は上連続である！

証明. やればできる。加群 M と、部分加群 X、部分加群の有向族 Y_λ $(\lambda \in \Lambda)$ に対して、$M \cap (\sum_\lambda Y_\lambda) = \sum_\lambda (M \cap Y_\lambda)$ を示せば良い。右が左に入るのは上より当たり前。左から元 m をとると、$m \in \sum_\lambda Y_\lambda$ なことから、$m \in Y_\mu$ なる $\mu \in \Lambda$ が取れることが分かる。なぜなら、Y_λ は有向なので、$\sum_\lambda Y_\lambda = \bigcup_\lambda Y_\lambda$ と集合論的な和になるからである。よって $m \in M \cap Y_\mu$ より右に入る。 □

例えば interval のコンパクト性については次が自然（位相空間の、部分空間のコンパクト性について思い出そう）だが、証明には上連続性を仮定する必要がある！

命題 A.20. 上連続な完備束 L の元 x に対して束 $[0, x]$ がコンパクトであることと、「$x \le \bigvee S$ ならば S の有限部分集合 $F \subset S$ であって $x \le \bigvee F$ なるようできる」ことは同値。

証明. 「」が満たされればコンパクトなのは明らか。逆に $[0, x]$ がコンパクトとする。簡単のため上のように S は有向族だとしてよい。このとき $x = x \wedge (\bigvee_{s \in S} s) = \bigvee_{s \in S}(x \wedge s)$ が、上連続性より分かる。よって $x = \bigvee_{s \in S}(x \wedge s)$ という束 $[0, x]$ での等式がなりたち、コンパクト性よりある $s \in S$ があって $x = x \wedge s$ よって $x \le s$。 □

注意 A.21. 上連続性は対称的でない！つまり上連続束の双対は上連続にはならず、自然な双対概念の「下連続」になる。しかし、部分加群のなす束は一般に下連続ではない！例えば $\mathbb{Z}$ の部分加群束の中で $3\mathbb{Z}$ と、下に有向な族 $2\mathbb{Z} \supset 4\mathbb{Z} \supset 8\mathbb{Z} \supset \cdots$ を考えると反例になっている。

A.4. **順序集合のガロア接続.** あまり知られていない？けどいろいろなことを形式的に示すのに便利な、poset の間の写像のガロア接続を定義する。

定義 A.22. P と Q を poset、2 つの順序写像の組 $f \colon P \rightleftarrows Q \colon g$ が (共変) **ガロア接続** *(Galois connection)* であるとは、$f(p) \le q \Leftrightarrow p \le g(q)$ であるときをいう。

つまり poset を圏と見たときの随伴対のことである。このとき次がすぐ分かる。

命題 A.23. *ガロア接続* $f \colon P \rightleftarrows Q \colon g$ *において次が成り立つ:*

(1) f は *(存在すれば)* 任意個の *(*無限でもよい*)join* を保つ。
(2) g は *(存在すれば)* 認印この *(*無限でもよい*)meet* を保つ。
(3) 順序集合の同型 $f \colon g(Q) \cong f(P) \colon g$ が誘導される。

A.5. **余剰 (superfluous) 、本質的 (essential) な元と根基、socle とか.** 射影被覆や入射包絡に必要な、余剰的部分加群・本質的部分加群に対応するものを定義しよう。

定義 A.24. 最大元 1 と最小元 0 を持つ束 L の元 $x \in L$ について次を定義する。

(1) x が**余剰的** *(superfluous)* であるとは、任意の元 $y \in L$ に対して、$x \vee y = 1$ ならば $y = 1$ が成り立つときをいう。
(2) x が**本質的** *(essential)* であるとは、任意の元 $y \in L$ に対して、$x \wedge y = 0$ ならば $y = 0$ が成り立つときをいう。

たまに、余剰的対象は小さい (small) と、本質的対象は大きい (large) と呼ばれる。その心は、余剰的対象は「他のものと足して全体になるならそいつはもともと全体」、対偶を取ると「全体じゃない元を足しても全体にならない」ということで、その対象を足しても足さなくても全体になるかならないかは変わらないという意味で小さい。本質的対象は、また対偶とると「ゼロでないものとの共通部分が必ずある (ゼロでない)」ということをいっており、どんなゼロでない対象とも交わるという意味で大きい。そういう直感である。

本質的元について、次のような記号を導入すると便利である:

定義 A.25. 0 を持つ束 L の元 $a, b \in L$ に対して、b が a の**本質拡大** *(essential extension)* であるとは、$a \le b$ であり、束 $[0, b]$ において a が本質的元なときをいう。このとき $a \trianglelefteq b$ と書く。

命題 A.26. 0 を持つ束 L の元 $a \le b \le c$ について次は同値である。

(1) $a \trianglelefteq b$ と $b \trianglelefteq c$ が成り立つ。
(2) $a \trianglelefteq c$ が成り立つ。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): やればできる。$x \in [0, c]$ が $x \wedge a = 0$ を満たすならば $x = 0$ を示す。このためにまず $x \wedge b \in [0, b]$ を考えると、$a \wedge (x \wedge b) = (a \wedge x) \wedge b = 0$ なので、a が $[0, b]$ において本質的なことから $x \wedge b = 0$ が従う。よって b が $[0, c]$ で本質的なことから $x = 0$ が従う。

(2) $\Rightarrow$ (1): こちらはより自明。まず $a \trianglelefteq b$ なのは、$x \leq b$ が $x \wedge a = 0$ なとき $x = 0$ ならよいが、$x \leq b \leq c$ であり a が $[0, c]$ で本質的より $x = 0$ となる。次に $b \trianglelefteq c$ なのは、$x \leq c$ が $x \wedge b0$ なとき $x = 0$ ならよいが、このとき $x \wedge a \leq x \wedge b = 0$ より $x \wedge a = 0$、よって $[0, c]$ で a が本質的より $x = 0$ となる。 □

Grothendieck 圏が豊富な入射的対象を持つことは Gabriel-Popescu により従わせるが、一度豊富な入射的対象を持つことが分かれば、入射包絡の存在は、純束論的な視点から見ることができる。そのために必要なものをここで述べていく。Grothendieck 圏に特徴的な条件である上連続性を所々で用いることに注目。

定義 A.27. 完備束 L に対して、$c \in L$ が $x \in L$ の**擬補元** *(pseudo-complement)* であるとは、c が $\{y \in L \,|\, x \wedge y = 0\}$ という集合の極大元であるときをいう (つまり $x \wedge c = 0$ であり、そのような中で極大なもの)。任意の元が擬補元を持つとき、L は**可擬補** *(pseudo-complemented)* と呼ぶ。

ここで擬補元は存在するとは限らず、存在しても一意的とは限らないことに注意。補元との関係性はとりあえず省略する (完備モジュラー束において補元は擬補元なことがすぐ示せる)。

注意 A.28. 擬補元の定義として、極大元というより強く最大元であることを仮定する流儀のほうが多数派らしいが、ここでは [St] にならって極大性のみを課すことにする。また [Po, 3.10] ではここでの擬補元のことを complement と読んでいる

命題 A.29. 完備束 L が上連続ならば可擬補である。より強く、$x \in L$ と $x \wedge y_0 = 0$ なる元 y_0 が与えられたとき、$y_0 \leq c$ なる x の擬補元 c が存在する。

証明. $x \in L$ をとり、この擬補元を作りたい。主張のように、$x \wedge y_0 = 0$ なる y_0 をとる (単に可擬補なことを示す場合は $y_0 = 0$ とすればよい)。次の L の部分集合

$$C := \{y \in L \,|\, x \wedge y = 0, y \geq y_0\}$$

が空でない帰納的部分集合なことを示せば、Zorn の補題により極大元が存在する。

まず空でないことは $y_0 \in C$ なことから従う。次に $Y \subset C$ を C の全順序部分集合として、$\bigvee Y$ を考える。この元が C に入ることを示せば明らかにこれが上界を与える。確認すると、

$$x \wedge (\bigvee Y) = \bigvee_{y \in Y} (x \wedge y) = 0$$

となる。ここで最初の等号に、Y が全順序なこと特に有向なことと、L が上連続なことを用いた。 □

この擬補元は本質的元と関連がある。普通の補元の場合は join をとると全体になるが、擬補元の場合は join をとると本質的元になる。より強く、次の擬補元についての特徴付けは便利である。

命題 A.30. L を 0 と 1 を持つモジュラー束とすると、$x, c \in L$ について次は同値である。

(1) c が x の擬補元である。
(2) $x \wedge c = 0$ であり、$x \vee c$ は $[c, 1]$ の中で本質的である。

さらに c が x の擬補元なとき、$x \vee c$ は L の中でも本質的である。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): x の擬補元 c に対して、$x \vee c$ が $[c, 1]$ の中で本質的なことを示す。そのため $y \in [c, 1]$ が $(x \vee c) \wedge y = c$ を満たすとき $y = c$ を満たせばよい。　そのためまず $x \wedge y = 0$ を示す。モジュラー性を $c \leq y$ と x に使って

$$c = (x \vee c) \wedge y = (x \wedge y) \vee c$$

となる。よって $x \wedge y \leq c$ が成り立つ。なので $x \wedge y = c \wedge x \wedge y = 0 \wedge y = 0$ となる。よって c の擬補元としての極大性より $c = y$ が従う。

(2) $\Rightarrow$ (1): 擬補元なことを示すには、極大性を、つまり $y \in [c, 1]$ が $x \wedge y = 0$ を満たすならば $y = c$ を示せばよい。また $c \leq y$ と x にモジュラー性を使って、

$$(x \vee c) \wedge y = (x \wedge y) \vee c = c$$

が成り立つ。よって $x \vee c$ が $[c, 1]$ で本質的だったことから、$y = c$ が従う。

最後に c が x の擬補元のとき $x \wedge c$ が L においても本質的なことをみる。このため $y \in L$ が $y \wedge (x \vee c) = 0$ を満たすとき、$c \leq x \vee c$ と y にモジュラー性を用いて

$$(c \vee y) \wedge (x \vee c) = (y \wedge (x \vee c)) \vee c = 0 \vee c = c$$

よって $c \vee y \in [c, 1]$ とみなすと、(1) で示したように $[c, 1]$ において $x \vee c$ は本質的より、$c \vee y = c$ が従う。よって $y \leq c$ である。ここから

$$y = y \wedge c \leq y \wedge (x \vee c) = 0$$

なので $y = 0$ となる。 □

擬補元を二回取る操作をしても元には戻らないが、実は次のようなことが言える:

命題 A.31. 上連続な完備モジュラー束 L について、$x \in L$ の擬補元を c、また $x \leq x'$ なる c の擬補元 x' をとると、x' は x の本質拡大であり、しかも x の本質拡大全体の中で極大元である。

証明. まず命題 A.29 により、c がとれ、また $x \wedge c = 0$ なことから x' もとれることに注意。

x' は x の本質拡大であることを示す。$y \leq x'$ が $x \wedge y = 0$ を満たすとする。このとき

$$x \wedge (c \vee y) = x \wedge x' \wedge (c \vee y) = x \wedge ((x' \wedge c) \vee y) = x \wedge (0 \vee y) = x \wedge y = 0$$

と変形できる (二番目の等号で $y \leq x'$ と c についてモジュラー性を使った)。よって $c \leq c \vee y$ に注意すると、c の極大性より $c = c \vee y$ が成り立つ、つまり $y \leq c$ である。よって $y \leq x'$ だったことより、$y \leq x' \wedge c = 0$ なので $y = 0$ である。

次に x' は x の本質拡大の中で極大なことを示す。このため $x' \leq a$ なる元 a が x の本質拡大だとする。このとき $x \wedge (a \wedge c) = a \wedge (x \wedge c) = a \wedge 0 = 0$ であるので、x が $[0, a]$ で本質的なことから $a \wedge c = 0$ となる。しかし x' は c の擬補元であったので、その極大性より $x' = a$ が従う。 □

系 A.32. 上連続な完備モジュラー束において、任意の元は極大な本質拡大を持つ。

Appendix B. Direct limit v.s. filtered colimit

有向集合上の順極限とフィルター余極限はほぼ同じ概念だが両者ともに使いやすい場面が違う、そして「ほぼ同じ」ということをちゃんと定式化するのはわりとめんどう。ここらへんは、加法圏を仮定してなくて general の圏論ぽくて読みにくいが [AR] に詳しい。有向集合については定義 A.14 参照のこと。

定義 B.1. 空でない小圏 I が**フィルター圏** *(filtered category)* であるとは、次の条件を満たすときいう。

(1) 任意の 2 つの対象 $i, j \in I$ に対して、$i \to k$, $j \to k$ なる $k \in I$ が存在する。
(2) 任意の 2 つの射 $a, b \colon i \rightrightarrows j$ に対してある $c \colon j \to k$ であって $c \circ a = c \circ b$ なるものが存在する。

例 B.2.
- Poset が有向なことと圏とみてフィルターなことは同値。
- 対象 1 つの圏で、射を恒等射と $e = e^2$ を満たす射の 2 つとしてとるとフィルター圏である。

ここでフィルター性を次のように言い換えると便利。

命題 B.3. 空でない小圏 I がフィルター圏であることと、次の条件は同値。

- I の任意の *full* と限らない有限部分圏 J *(i.e.* I の射の有限集合*)* が compatible cocone を J の中にもつ。つまりある対象 $k \in I$ と J の各対象 j に対して $a_j : j \to k$ という射が存在し、任意の J の射 $a\colon j_1 \to j_2$ に対して次が可換*:*

$$\begin{tikzcd} j_1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "a_{j_1}"'] & j_2 \arrow[dl, "a_{j_2}"] \\ k & \end{tikzcd}$$

証明. 上の条件が満たされたなら、フィルター性の条件 (1) は i と j からなる離散圏をとればよく、(2) は a, b という 2 つの射 (と恒等射) からなる部分圏をとって条件を使えばよい。

逆は、J の中の射が有限なことから、頑張って構成する。一応ちゃんと書くが、各自やれ。

(1) まず J の中の対象は有限集合から、条件 (1) を繰り返し使えば、ある対象 $l \in I$ と、各 $j \in J$ に対して I の射 $b_j\colon j \to l$ が取れる。
(2) J の中に入っている射 $a\colon j_1 \to j_2$ をとると、$b_{j_2} \circ a$ と b_{j_1} は $j_1 \rightrightarrows l$ という並行射。なので条件 (2) から l からさらに射 $c\colon l \to k$ を伸ばして、$c \circ b_{j_2} \circ a = c \circ b_{j_1}$ とできる。よって l を新たに k と名付け、$c \circ b_j$ と新たに名付けると、射 a については $b_{j_2} \circ a = b_{j_1}$ が成立する。
(3) 上の操作を、$b_{j_2} \circ a \neq b_{j_1}$ となる射 a がなくなるまでやり続ける。ここで J の中の射は有限個しかないので、このプロセスはいつか終わる。

でできるはず。アルゴリズム的に書くとこうなるがめんどい。 □

フィルター圏上での余極限をとる操作は、実は有向集合上での順極限になることが知られている、わりと構成はめんどくさい。だが気持ち悪いのでやる。ここで**共終** *(cofinal)* な関手を前から合成しても余極限は変わらないことを使う。

定義 B.4. 小圏の間の関手 $G : J \to I$ が**共終** *(cofinal)* であるとは次を満たすこと。

(1) I の任意の対象 i に対して必ずある $j \in J$ と射 $i \to Gj$ が存在する。
(2) 上のような 2 つの射 $i \to Gj_1$ と Gj_2 に対して、J での射 $j_1 \to j$ と $j_2 \to j$ が存在して、誘導される自然な次の図式が可換。

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r] \arrow[d] & Gj_1 \arrow[d] \\ Gj_2 \arrow[r] & G_j \end{tikzcd}$$

なんでこんなの定義するかといったら、余極限が変わらないからである:

命題 B.5. 共終な関手 $G\colon J \to I$ と任意の関手 $F\colon I \to C$ に関して、次は同値。

(1) F の余極限が存在する。
(2) $F \circ G$ の余極限が存在する。

またこのとき、誘導される $\mathcal{C}$ の射 $\operatorname{colim}(F \circ G) \to \operatorname{colim} F$ は同型。

証明. がんばってやればできる。$\mathcal{C}$ の中で、F 上の cocone を考えることと $F \circ G$ を考えることは同じ (cocone の圏の同型) なのが考えればわかり、そこから従う。 □

Appendix C. アーベル圏の定義・基本性質

書いてて自分で証明を考えているうちに「完全列ってなんだ……？」とかまでゲシュタルト崩壊してきたし、わりと面倒な議論がそれなりに必要なので、アーベル圏の基本性質を自分用にまとめておく。

Appendix D. 圏の局所化の一般論周辺

この補遺では、圏の局所化に関わることがらであり、特にアーベル圏であることすら使わないような一般的な圏論的な事項をまとめておく。基本的に [GZ] の、いわゆる reflective localization へ向かうが、ある程度いろんなことを自分なりに整理する。。

D.1. **圏の狭義局所化 v.s. 圏の 2 局所化.** 圏 $\mathcal{C}$ とその射の集まり $\mathcal{W}$ が与えられたとき、局所化 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ は定義 5.4 で与えられた。しかしそこで述べたように、この定義での局所化は「圏の同型」を除いて一意的であり、圏同値になれている人たちには不自然に思える。よって次の定義を採用する本も多い (Kashiwara-Schapira など)。

定義 D.1. 圏 $\mathcal{C}$ の射の集まり $\mathcal{W}$ が与えられたとき、*2* **局所化** *(2-localization)* $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ を (存在すれば) 次の普遍性を満たす関手で定義する。

- F により $\mathcal{W}$ の射は同型射に飛ぶ。
- $\mathcal{C}$ からの別の関手 $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が、同じく $\mathcal{W}$ の射を同型射に飛ばすなら、ある関手 $\overline{G}\colon \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \to \mathcal{D}$ と自然同型 $G \simeq \overline{G} \circ F$ が存在する。
- 任意の圏 $\mathcal{D}$ と関手 $H_1, H_2\colon \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \to \mathcal{D}$ に対して、$\mathrm{Hom}(H_1, H_2) \to \mathrm{Hom}(H_1 \circ F, H_2 \circ F)$ は全単射である。ここで Hom は自然変換の集まりをさす。

また、$\mathcal{C}$ が前加法圏である場合、$\mathcal{W}$ に対する**加法的** *2* **局所化** *(additive 2-localization)* とは、前加法圏 $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ への加法的関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ であり、上の普遍性のところを前加法圏や加法的関手に置き換えたものが成り立つときをいう。

通常の局所化 (定義 5.4) を、上の 2 局所化と区別するために狭義局所化 (strict localization) と呼ぶことにする。まず次の性質がすぐ分かる。

命題 D.2. 圏 $\mathcal{C}$ の射の集まり $\mathcal{W}$ についての *2* 局所化 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ と、圏への関手 $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ で $\mathcal{W}$ の射を可逆にするようなものが与えられたとする。このとき、*2* つの関手 $\overline{G}_1, \overline{G}_2\colon \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \rightrightarrows \mathcal{D}$ がともに $\alpha_i\colon G \simeq \overline{G}_i \circ F$ *(*$i = 1, 2$*)* を満たすならば、$\beta\colon \overline{G}_1 \simeq \overline{G}_2$ という自然同型であって、次を可換にするものが唯一存在する*:*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_2"'] & G_1 \arrow[d, "\beta"] \\ & G_2 \end{tikzcd}$$

証明. 2 局所化の最後の条件より、$\mathrm{Hom}(G_1, G_2) \to \mathrm{Hom}(G_1F, G_2F)$ (と 1, 2 を逆にしたもの) が全単射なことからすぐ従う。 □

注意 D.3. 上の条件は、集合論的条件を無視すれば、結局 $[\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}], \mathcal{D}] \xrightarrow{G\circ(-)} [\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ が、$[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ の中で $\mathcal{W}$ の射を可逆にする関手からなる充満部分圏への圏同値を与えることと同値である (ここで $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ などは $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への関手のなすでかい圏をさす)。これは関手圏を考える点で 2 圏的であり、また圏同値なものを区別しない立場からはこちらのほうが自然である。実際、狭義局所化と圏同値なものは狭義局所化になるとは限らないが、2 局所化は存在すれば「圏同値を除いて」一意的に存在することが上の命題より分かる。

この 2 つの「狭義局所化」と「2 局所化」の概念は、お互いに関連しているが、あまり明確に書いてある文献がよく見当たらなかった (おそらくある種の人々にとっては folklore であると思われる)。なのでここでその関係をできるだけ明確に書いておく。

まず狭義局所化が存在すれば、それが実際は 2 局所化も与えているということが分かる:

命題 D.4. 圏 $\mathcal{C}$ と射の集まり $\mathcal{W}$ に対して、狭義局所化 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ が存在すれば、それは *2* 局所化にもなっている。同様のことが前加法圏の場合にも成り立つ。

証明. 示すべきは、圏 $\mathcal{D}$ と二つの関手 $H_1, H_2\colon \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \rightrightarrows \mathcal{D}$ に対して、誘導される自然変換の集まりの間の写像 $\mathrm{Hom}(H_1, H_2) \to \mathrm{Hom}(H_1 \circ F, H_2 \circ F)$ が全単射なことである。ここで次の観察が重要である:

補題 D.5. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を圏、$\mathbf{2}$ を二つの対象とその間の一つの射からなる圏 $1 \to 2$ とする。このとき、「二つの関手 $F_1, F_2\colon \mathcal{A} \rightrightarrows \mathcal{B}$ とその間の自然変換 $\alpha\colon F_1 \to F_2$ を与える」ことと、「関手 $F\colon \mathcal{A} \to [\mathbf{2}, \mathcal{B}]$ を一つ与える」ことは一対一対応がある。

証明. 対応の付け方だけ説明。関手圏 $[\mathbf{2}, \mathcal{B}]$ は、$\mathcal{B}$ の中の射のなす圏と思えることに注意。

まず自然変換 $\alpha\colon F_1 \to F_2$ が与えられると、F を、$X \in \mathcal{A}$ に対して $\alpha_X\colon F_1X \to F_2X$ という $\mathcal{B}$ における射を対応させ、$f\colon X \to Y$ という $\mathcal{A}$ での射に対しては次の可換図式 ($= [\mathbf{2}, \mathcal{B}]$ での射) を対応させることで関手 $\mathcal{A} \to [\mathbf{2}, \mathcal{B}]$ が得られる:

$$\begin{tikzcd} F_1X \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F_1f"] & F_2X \arrow[d, "F_2f"] \\ F_1Y \arrow[r, "\alpha_Y"] & F_2Y \end{tikzcd}$$

逆に、関手 $F\colon \mathcal{A} \to [\mathbf{2}, \mathcal{B}]$ が与えられると、1 と 2 での evaluation $ev_1, ev_2\colon [\mathbf{2}, \mathcal{B}] \rightrightarrows \mathcal{B}$ を合成することで二つの関手 F_1 と F_2 ができ、$\mathcal{A}$ における射を F で送ってやることで上のような四角を得てそこから自然変換 α が構成できる。これらの操作がお互いに逆になるのは明らか。 $\square$

これを用いると証明が楽。

(単射性): 二つの自然変換 $\alpha, \beta\colon H_1 \rightrightarrows H_2$ を取ってくる。このとき、補題により、対応する二つの関手 $A, B\colon \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \rightrightarrows [\mathbf{2}, \mathcal{D}]$ が得られる。これらが $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ に送って等しいということは、少し考えると、二つの関手の合成 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \rightrightarrows [\mathbf{2}, \mathcal{D}]$ が等しいということである。よって、狭義局所化 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ の strict な普遍性により、二つの関手 A, B は等しい。これは二つの自然変換が等しいことを意味する。

(全射性): 自然変換 $\gamma\colon H_1 \circ F \to H_2 \circ F$ を取ってくる。これはある関手 $C\colon \mathcal{C} \to [\mathbf{2}, \mathcal{D}]$ に対応する。ここで、この関手により $\mathcal{W}$ の射は同型射に飛ぶ！なぜなら、$\mathcal{W}$ の射 $w\colon X \to Y$ を C で送ると次が得られる:

$$\begin{tikzcd} H_1FX \arrow[r, "\gamma_X"] \arrow[d, "H_1Fw"] & H_2FX \arrow[d, "H_2Fw"] \\ H_1FY \arrow[r, "\gamma_Y"] & H_2FY \end{tikzcd}$$

ここで Fw は同型射より H_1Fw も H_2Fw も同型である。よってこれは $[\mathbf{2}, \mathcal{D}]$ における同型射である。なので、狭義局所化の strict な普遍性により、ある関手 $\overline{C}\colon \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \to [\mathbf{2}, \mathcal{D}]$ が存在し、下が可換:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "C"] & \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \arrow[d, "\overline{C}"] & \\ & {[\mathbf{2}, \mathcal{D}]} \arrow[r, shift left, "ev_1"] \arrow[r, shift right, "ev_2"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

$\overline{C} \circ F = C$ が成り立つ。少し考えると、$\mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \to [\mathbf{2}, \mathcal{D}] \rightrightarrows \mathcal{D}$ と 1 と 2 で evaluation するとこれは $H_1 \circ F$ と $H_2 \circ F$ になるので、また strict な普遍性より、$\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \to [\mathbf{2}, \mathcal{D}] \rightrightarrows \mathcal{D}$ の二つの射は H_1 と H_2 にちゃんとなっている。よって $\overline{C}$ は H_1 から H_2 への自然変換にちゃんと対応しており、それが求める $\mathrm{Hom}(H_1, H_2)$ の元であることが分かる。

前加法的な文脈においても、$\mathcal{D}$ が前加法圏なら射圏 $[\mathbf{2}, \mathcal{D}]$ が前加法的なことに注意すれば、全く同じ議論が成り立つ。 $\square$

また逆に、2 局所化が存在すればそれは狭義局所化に取り替えることができる:

命題 D.6. 圏 $\mathcal{C}$ と射の集まり $\mathcal{W}$ に対して、*2* 局所化 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が存在すれば、狭義局所化も存在し、$\mathcal{D}$ と圏同値。同様のことが前加法圏の場合にも成り立つ。

証明. 圏 $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ を次で定める:

- 対象は $\mathcal{C}$ の対象 (ほんとうの意味で $\mathsf{Ob}\,\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] := \mathsf{Ob}\,\mathcal{C}$)。
- $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して、$\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}](X, Y)$ を、次のような $\mathcal{D}(FX, FY)$ の部分集合とする:
  $\mathcal{D}(FX, FY)$ の元であって、F で飛んでくる射と、F で飛んできた $\mathcal{W}$ の射の逆射との、有限回の合成として表せるもの (前加法圏なケースでは、それらの一次結合)

- 射の合成は $\mathcal{D}$ における射の合成で定める。

実際は $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}](X,Y) = \mathcal{D}(FX,FY)$ が成り立つのだが、その証明も込みで上のように定義する。これにより圏になっていることはすぐに分かる (集合論的な問題も、$\mathcal{D}(FX,FY)$ が $\mathcal{U}$-small なので大丈夫なはず)。また自然な関手 $F' \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ を、対象については $F'C := C$ で、射については $F'\psi := F\psi$ で定義することで定まり、次が狭義に可換:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F'"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \arrow[d, "\iota"] \\ & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

ここで ι は $\iota C := FC$ で、射については恒等写像で定まる (定義より忠実な) 関手である。この F' が狭義の普遍性を満たすことを調べる。

まず $\mathcal{W}$ の射は定義より F' によって可逆になる ($\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ の中には $\mathcal{W}$ の飛ばし先の逆射は全て入っていたことに注意)。次に $G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ が $\mathcal{W}$ の射を同型に飛ばすとする。このとき F の普遍性より、$\overline{G} \colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ と、自然同型 $\alpha \colon G \cong \overline{G} \circ F$ がある。関手 $\overline{G}' \colon \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \to \mathcal{E}$ を次で定める:

- 対象については、C を GC にうつす ($\mathsf{Ob}(\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]) = \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ に注意)。
- 射については、$\varphi \in \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}](X,Y)$ について、$\varphi \in \mathcal{D}(FX,FY)$ とみて、次を可換にする唯一の射 $\overline{G}'\varphi$ で定める:

$$\begin{tikzcd} GX \arrow[r, "\overline{G}'\varphi"] \arrow[d, "\alpha_X", "\simeq"'] & GY \arrow[d, "\alpha_Y", "\simeq"'] \\ \overline{G}FX \arrow[r, "\overline{G}\varphi"] & \overline{G}FY \end{tikzcd}$$

この対応が関手的なことは、$\overline{G}'\varphi$ の一意性からすぐ分かる。また $\overline{G}' \circ F = G$ が成り立つことは、対象についてはすぐわかり、射については、$\mathcal{C}$ の射 $\psi \colon X \to Y$ に対して、

$$\begin{tikzcd} GX \arrow[r, "G\psi"] \arrow[d, "\alpha_X", "\simeq"'] & GY \arrow[d, "\alpha_Y", "\simeq"'] \\ \overline{G}FX \arrow[r, "\overline{G}F\psi"] & \overline{G}FY \end{tikzcd}$$

が α の自然性より可換である。なので $\overline{G}'F\psi = G\psi$ が成り立つので分かる。

次に一意性を確認する。次を確認すれば十分である:

主張: 関手 $H_1, H_2 \colon \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \rightrightarrows \mathcal{E}$ が、$H_1F' = F_2F'$ を満たすならば $H_1 = H_2$ である。つまり F' が圏の圏で epi であるということである。以下これを示す。

まず対象について H_1 と H_2 が等しいことは、$C \in \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ に対して、$H_1C = H_1F'C = H_2F'C = H_2C$ が成り立つ (本当に等号が成り立つかこんがらがるが、落ち着いて考えよう)。

射についても考える。そのため、まず $\varphi = F'\psi$ というふうに $\mathcal{C}$ の射 ψ を用いて書けている場合は、先程と同様に $H_1\varphi = H_1F'\psi = H_2F'\psi = H_2\varphi$ なので $H_1\varphi = H_2\varphi$ である。また $w \in \mathcal{W}$ に対しては、$H_1(F'w) = H_2(F'w)$ が成り立ち、$F'w$ は同型射であるので、逆射の一意性より $H_1(F'w)^{-1} = H_2(F'w)^{-1}$ が成り立つ。一方一般の $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ の射は、定義から、「F から飛ぶものと、F で $\mathcal{W}$ の射を飛ばしたものとを、有限回合成したもの」である。なので $H_1 = H_2$ が一般の射についても成り立つことが分かる (前加法圏のケースでは関手が加法的なことも使う)。

以上より $F' \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ が狭義の普遍性を満たすことがわかった。これが $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \simeq \mathcal{D}$ の圏同値を誘導することは、命題 D.4 から F' が 2 局所化であることから従う。 □

証明の中でのことから次が分かる:

系 D.7. 圏 $\mathcal{C}$ と射の集まり $\mathcal{W}$ に対して、狭義局所化 $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ が存在すれば、F は対象について全単射であり、$\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ の射は必ず「$\mathcal{C}$ の射を F で飛ばしたものと、$\mathcal{W}$ の射を F で飛ばしたものの逆射との、有限回の合成 *(前加法圏の場合はそれらの一次結合)*」で書ける。

逆に集合論的な問題を無視すれば、形式的に $\mathcal{W}$ の逆射を導入して、上のように射集合を定めて、適当な同値関係で割れば局所化が得られる (いろんな本を参照)。

D.2. **反映的局所化.** 次に、局所化部分圏の章での動機づけにもなる、**与えられた圏に対して、性質の良い局所化と、性質の良い部分圏が一対一対応する**という事実を紹介する。これは、圏 $\mathcal{C}$ の局所化 $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ が実はもとの圏 $\mathcal{C}$ の部分圏として実現されている状況である。

これに関しては、次の [GZ] のものがよく知られている:

定理 D.8. *$F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}\colon G$ を随伴対 (G が F の左随伴) とするとき、次が同値である。*

(1) G は忠実充満である。
(2) 随伴の余単位射 $\varepsilon\colon FG \to \mathsf{id}_{\mathcal{D}}$ が同型である。
(3) $\mathcal{W}_{\mathrm{sat}}$ を F で送って同型射になるような $\mathcal{C}$ の射の集まりとすると、F は $\mathcal{W}_{\mathrm{sat}}$ についての *2* 局所化になっている。
(4) F はある $\mathcal{C}$ の射の集まり $\mathcal{W}$ についての *2* 局所化になっている。
(5) 任意の圏 $\mathcal{E}$ と関手 $H_1, H_2\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ に対して、$\mathrm{Hom}(H_1, H_2) \to \mathrm{Hom}(H_1 \circ F, H_2 \circ F)$ は全単射である。ここで Hom は自然変換の集まりをさす。つまり集合論的事柄をのぞけば、関手圏の間の写像 $[\mathcal{D}, \mathcal{E}] \xrightarrow{\circ F} [\mathcal{C}, \mathcal{E}]$ が忠実充満になっている。
(6) 任意の関手 $H_1, H_2\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ に対して、$\mathrm{Hom}(H_1, H_2) \to \mathrm{Hom}(H_1 \circ F, H_2 \circ F)$ は全単射である。つまり集合論的事柄をのぞけば、関手圏の間の写像 $[\mathcal{D}, \mathcal{C}] \xrightarrow{\circ F} [\mathcal{C}, \mathcal{C}]$ が忠実充満になっている。

前加法圏の場合も、関手を加法的関手、局所化を加法的局所化に置き換えれば同様のことが成り立つ。

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2): これは少し有名だと思う。まず $\mathcal{D}$ の対象 d_1, d_2 を固定したとき、

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(d_1, d_2) \arrow[r, "G"] \arrow[dr, "(-)\circ\varepsilon_{d_1}"'] & \mathcal{C}(Gd_1, Gd_2) \arrow[d, "\simeq"] \\ & \mathcal{D}(FGd_1, d_2) \end{tikzcd}$$

という可換図式がある (縦の同型射は随伴からくるもの)。よって「全ての d_1 に対して $(-) \circ \varepsilon_{d_1}$ が同型」なことと「全ての d_1, d_2 に対して $\mathcal{D}(d_1, d_2) \to \mathcal{C}(Gd_1, Gd_2)$ は同型」は同値であり、前者は米田の補題より「全ての d_1 に対して ε_{d_1} が同型射」と同値である。よって (1) と (2) は同値。

(2) $\Rightarrow$ (3): F が 2 局所化の普遍性を満たすことを示す。まず $\mathcal{W}_{\mathrm{sat}}$ の定義より F は $\mathcal{W}_{\mathrm{sat}}$ の射を可逆にする。

次に $H\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ が $\mathcal{W}_{\mathrm{sat}}$ の射を可逆にするとする。このとき $\overline{H}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ を、$\mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{C} \xrightarrow{H} \mathcal{E}$ の合成で定める。やりたいのは $\overline{H}F$ が H と自然同型なこと。次の図式を考える:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "\mathsf{id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \arrow[dr, "H"] & \\ & \mathcal{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, "\overline{H}"'] & \arrow[u, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

ここで $\eta\colon \mathsf{id}_{\mathcal{C}} \to GF$ は随伴の単位射である。この図式は自然変換 $H \to \overline{H}F$ を与えるが、これが同型なことを示す。そのためには、各 $X \in \mathcal{C}$ に対して $\eta_X\colon X \to GFX$ が $\mathcal{W}_{\mathrm{sat}}$ に入ることを見ればよい (H によりこれが同型射に飛ばされるので)。つまり $F\eta_X$ が同型なことを示す。

圏論の一般論から、次の図式は可換であったことに注意しよう (triangle identity):

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "F\eta_X"] \arrow[dr, equal] & FGFX \arrow[d, "\varepsilon_{FX}", "\simeq"'] \\ & FX \end{tikzcd} \tag{D.1}$$

また ε は仮定より自然同型である。なので $F\eta_X$ は同型となる。

最後に、関手 $H_1, H_2 \colon \mathcal{D} \rightrightarrows \mathcal{E}$ に対して、F により誘導される自然変換の間の写像 $\Psi\colon \operatorname{Hom}(H_1, H_2) \to \operatorname{Hom}(H_1F, H_2F)$ が全単射なことをみる。このために、逆向きの写像 $\Phi\colon \operatorname{Hom}(H_1F, H_2F) \to \operatorname{Hom}(H_1, H_2)$ を作り、お互いに逆写像であることを見る。この写像は $\beta \in \operatorname{Hom}(H_1F, H_2F)$ について次で定める:

$$\Phi\beta := \begin{tikzcd} & & \mathcal{D} \arrow[dr, "H_1"] \arrow[dd, phantom, "\Downarrow\beta"] & \\ \mathcal{D} \arrow[r, "G"] \arrow[urr, bend left, "\mathsf{id}_\mathcal{D}"] \arrow[drr, bend right, "\mathsf{id}_\mathcal{D}"'] & \mathcal{C} \arrow[ur, "F"'] \arrow[dr, "F"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\varepsilon^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & & \mathcal{E} \\ & & \mathcal{D} \arrow[ur, "H_2"'] & \end{tikzcd}$$

この写像たちがお互いに逆写像になっていることは、基本的に絵を書けば分かるが書いておく。まず $\alpha \in \operatorname{Hom}(H_1, H_2)$ から始めた場合、次のように α に戻ってくる:

$$\Phi\Psi\alpha \quad = \quad \begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "G"] \arrow[rr, bend left=50, "\mathsf{id}_\mathcal{C}"] \arrow[rr, bend right=50, "\mathsf{id}_\mathcal{C}"'] & \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\varepsilon^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "H_1"] \arrow[r, bend right, "H_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{E} \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "H_1"] \arrow[r, bend right, "H_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{E} \end{tikzcd} \quad = \quad \alpha.$$

逆に $\beta \in \operatorname{Hom}(H_1F, H_2F)$ から始めた場合、次のように計算できる:

$$\Psi\Phi\beta \quad = \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{D} \arrow[rr, "\mathsf{id}_\mathcal{D}"] \arrow[dr, "G"] \arrow[dd, phantom, "\|"] & & \mathcal{D} \arrow[dr, "H_1"] \arrow[dd, phantom, "\Downarrow\beta"] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathcal{C} \arrow[ur, "F"'] \arrow[dr, "F"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\varepsilon^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & & \mathcal{C} \\ & \mathcal{D} \arrow[rr, "\mathsf{id}_\mathcal{D}"'] \arrow[ur, "G"] & & \mathcal{D} \arrow[ur, "H_2"'] & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & & & \mathcal{D} \arrow[dr, "H_1"] \arrow[dd, phantom, "\Downarrow\beta"] & \\ \mathcal{C} \arrow[rr, "\mathsf{id}_\mathcal{C}"] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & & \mathcal{C} \\ & \mathcal{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, "\mathsf{id}_\mathcal{D}"'] & & \mathcal{D} \arrow[ur, "H_2"'] & \end{tikzcd}$$

$$= \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{D} \arrow[dr, "H_1"] \arrow[dd, phantom, "\Downarrow\beta"] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathcal{C} \\ & \mathcal{D} \arrow[ur, "H_2"'] & \end{tikzcd} \quad = \beta.$$

ここで 2 番目の等号は、三角恒等式 (D.1) により、ε^{-1} に F を前から合成したものは η に F を後から合成したものに等しいことから従う。3 番目の等式は三角恒等式である。

(3) $\Rightarrow$ (4): 自明。

(4) $\Rightarrow$ (5): これは 2 局所化の定義より従う。

(5) $\Rightarrow$ (6): 自明。

(6) $\Rightarrow$ (2): 具体的に $\varepsilon\colon FG \to \mathsf{id}_\mathcal{D}$ の逆を構成する。まず随伴の余単位射を $\eta\colon \mathsf{id}_\mathcal{C} \to GF$ とする。条件 (4) から、F を前から合成することで得られる $\operatorname{Hom}(\mathsf{id}_\mathcal{D}, FG) \to \operatorname{Hom}(F, FGF)$ が全単射なことを使い、次のような自然変換 $\theta\colon \mathsf{id}_\mathcal{D} \to FG$ を作れる:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D} \arrow[rr, "\mathsf{id}_\mathcal{D}"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{D} \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "F"] & & \mathcal{C} \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "\mathsf{id}_\mathcal{C}"] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \arrow[dr, "F"] & \\ & \mathcal{D} \arrow[ur, "G"'] & & \mathcal{D}. \end{tikzcd}$$

この θ が ε の逆射であることを示していく。

まず $\mathsf{id}_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\theta} FG \xrightarrow{\varepsilon} \mathsf{id}_{\mathcal{D}}$ が恒等射なこと。これは $\mathrm{Hom}(\mathsf{id}_{\mathcal{D}}, \mathsf{id}_{\mathcal{D}})$ の元なので、(4) の仮定から、F を後ろから合成して F についての恒等射になればよいが、次のように計算できる:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] & \mathcal{D} \arrow[r, "G"] \arrow[rr, bend left=50, "\mathsf{id}_{\mathcal{D}}"] \arrow[rr, bend right=50, "\mathsf{id}_{\mathcal{D}}"'] \arrow[rr, phantom, bend left=25, "\Downarrow\theta"] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\varepsilon"] & \mathcal{C} \arrow[r, "F"] & \mathcal{D} \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "\mathsf{id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[dr, "F"'] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "\Downarrow\eta"] & & \mathcal{C} \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \\ & \mathcal{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, "\mathsf{id}_{\mathcal{D}}"'] & & \mathcal{D}. \end{tikzcd}$$

で右辺は三角恒等式より $\mathsf{id}_F\colon F = F$ に等しい。よって $\varepsilon \circ \theta = \mathsf{id}_{\mathsf{id}_{\mathcal{C}}}$ が成り立つ。

次に $FG \xrightarrow{\varepsilon} \mathsf{id}_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\theta} FG$ の合成が恒等射なこと。次のように計算する:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \\ \mathcal{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, "\mathsf{id}_{\mathcal{D}}"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{D} \\ & \mathcal{C} \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & & & \\ \mathcal{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, "\mathsf{id}_{\mathcal{D}}"'] & & \mathcal{D} \arrow[rr, "\mathsf{id}_{\mathcal{D}}"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{D} \\ & & & \mathcal{C} \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

$$= \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[rr, "\mathsf{id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "\Downarrow\eta"] & & \mathcal{C} \arrow[dr, "F"] & \\ \mathcal{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, "\mathsf{id}_{\mathcal{D}}"'] & & \mathcal{D} \arrow[ur, "G"'] & & \mathcal{D} \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "G"] \arrow[r, bend right=50, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mathsf{id}_G"] & \mathcal{C} \arrow[r, "F"] & \mathcal{D} \end{tikzcd} \quad = \quad \mathsf{id}_{FG}.$$

ここで赤いところで θ の構成を使った。string diagram を知ってる人は紐でお絵かきしてみてもいいだろう。以上より $\theta \circ \varepsilon = \mathsf{id}_{FG}$ が言えた。よって ε は自然同型である。 □

この命題により、局所化の中で次のようなクラスを導入するのは自然であろう:

定義 D.9. 圏 $\mathcal{C}$ と射の集まり $\mathcal{W}$ に対して、2 局所化 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ が存在するとき、それが**反映的局所化**であるとは、F が右随伴を持つときをいう。このとき定理 D.8 の (4) の状況であるので、他の条件も満たされることに注意。

充満部分圏を考えることと、忠実充満関手を考えることは本質的には同じであった。なので、命題 D.8 をもとに、次のような定義を導入しよう:

定義 D.10. 圏 $\mathcal{C}$ の充満部分圏 $\mathcal{D}$ が**反映的** *(reflective)* であるとは、自然な包含関手 $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$ が左随伴を持つときをいう。

ここで本稿では部分圏とは、断らない限り、充満部分圏であり、同型で閉じることを仮定していたことに注意。

定理 D.8 より次がすぐに分かる:

系 D.11. 圏 $\mathcal{C}$ の反映的部分圏 $\mathcal{D}$ が与えられると、包含の左随伴 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は、「F で送って同型になる射全体の集まり」についての反映的局所化になっている。

逆に $\mathcal{C}$ の反映的局所化が与えられたとき、対応する (同型で閉じた) $\mathcal{C}$ の充満部分圏の記述を与えるのが次の狙いである。ここで一般に 2 つの射の集まり $\mathcal{W}_1$ と $\mathcal{W}_2$ が異なっても $\mathcal{W}_1$ と $\mathcal{W}_2$ についての 2 局所化は同じになりうることに注意。

命題 D.12. 圏 $\mathcal{C}$ とその射の集まり $\mathcal{W}$ についての反映的局所化 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が存在するとし、$G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ をその右随伴、$\eta\colon \mathsf{id}_{\mathcal{C}} \to GF$ をその単位射とする。このとき $C \in \mathcal{C}$ について次は同値である。

(1) C は G の *essential image* に含まれる、つまり $G(\mathcal{D})$ の対象と同型である。
(2) 余単位射 $\eta_C\colon C \to GFC$ は同型である。
(3) 任意の $\mathcal{C}$ の対象 X に対して、F が誘導する写像 $\mathcal{C}(X, C) \to \mathcal{D}(FX, FC)$ は全単射である。
(4) 任意の $\mathcal{W}$ の射 $\varphi\colon X \to Y$ に対して、$\mathcal{C}(Y, C) \xrightarrow{(-)\circ\varphi} \mathcal{C}(X, C)$ は全単射である。

これらの性質が満たされる対象 C のことを **$\mathcal{W}$-local** といい、G は $\mathcal{W}$-*local* な対象のなす充満部分圏と、$\mathcal{C}$ の $\mathcal{W}$ についての局所化との圏同値を誘導する。

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2): まず (2) ならば (1) は自明なので、(1) ならば (2) を示す。$D \in \mathcal{D}$ に対して $\eta_{GD}\colon GD \to GFGD$ が同型ならばよい。随伴の単位射を $\varepsilon\colon FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ とすると、三角恒等式

$$\begin{tikzcd} GD \arrow[r, "\eta_{GD}"] \arrow[dr, equal] & GFGD \arrow[d, "G\varepsilon_D", "\simeq"'] \\ & GD \end{tikzcd}$$

において、ε は同型だったことを命題 D.8 より思い出すと、η_{GD} が同型なことが従う。

(2) $\Leftrightarrow$ (3): 各対象 $X \in \mathcal{C}$ について次は可換:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(X,C) \arrow[r] \arrow[dr, "\eta_C\circ(-)"'] & \mathcal{D}(FX,FC) \arrow[d, "\simeq"] \\ & \mathcal{C}(X,GFC) \end{tikzcd}$$

ここで縦の同型射は随伴である。なので、「任意の X に対して $\mathcal{C}(X,C) \to \mathcal{D}(FX,FC)$ は同型」と「任意の X に対して $\mathcal{C}(X,C) \xrightarrow{\eta_C\circ(-)} \mathcal{C}(X,GFC)$ は同型」は同値で、後者は米田の補題より η_C が同型なことと同値である。

以上より (1) から (3) は同値である。

(3) $\Rightarrow$ (4): 次の可換図式を考える:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(Y,C) \arrow[r, "(-)\circ\varphi"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathcal{C}(X,C) \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathcal{D}(FY,FC) \arrow[r, "\simeq", "(-)\circ F\varphi"'] & \mathcal{D}(FX,FC) \end{tikzcd}$$

ここで縦の射は F から誘導されるものであり、(3) の仮定より同型である。また φ は $\mathcal{W}$ の射なので、$F\varphi$ は同型、よって下の射も同型である。よって上も同型。

(4) $\Rightarrow$ (2): ここが一番技巧的。まず初めに $\mathcal{W}$ を広げる。$\mathcal{C}$ の射の集まり $\mathcal{W}_{\mathrm{sat}}$ を F で同型に送られる射全体の集まりとする。仮定より反変 Hom 関手 $\mathcal{C}(-,C)\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ は $\mathcal{W}$ の射を同型に送るので、F の普遍性から、F を自然同型を除いて経由する。なので (4) の条件は $\mathcal{W}$ の代わりに $\mathcal{W}_{\mathrm{sat}}$ を考えても成り立つ。

次に命題 D.8 の (2) $\Rightarrow$ (3) の証明より、任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して $\eta_X \in \mathcal{W}_{\mathrm{sat}}$ が成り立つ。特に $\eta_C \in \mathcal{W}_{\mathrm{sat}}$ に条件 (4) を適応すると

$$\mathcal{C}(GFC,C) \xrightarrow{(-)\circ\eta_C} \mathcal{C}(C,C)$$

は同型、よってある $a\colon GFC \to C$ であって $a \circ \eta_C = \mathrm{id}_C$ なるものが取れる。つまり η_C は左逆元 a を持つ。

次にこの a を考えると、F で $a\circ\eta_C = \mathrm{id}_C$ を送ることで、Fa は同型なことが従い、よって $a \in \mathcal{W}_{\mathrm{sat}}$ となっている。また (1) $\Rightarrow$ (4) は示されているので、$GFC \in G(\mathcal{D})$ は条件 (4) を満たす。なので

$$\mathcal{C}(C,GFC) \xrightarrow{(-)\circ a} \mathcal{C}(GFC,GFC)$$

が同型より、ある $b\colon C \to GFC$ があり $b \circ a = \mathrm{id}_{GFC}$ が成り立つ。つまり a は左逆元 b を持つ。

以上より η_C は左逆元 a を持ち、a も左逆元 b を持つ。このことから η_C は実際には同型であることが形式的に従う。 □

また反映的部分圏について次の言い換えは便利である。そのため、部分圏による**近似** *(approximation)* の概念を導入する。

定義 D.13. 圏 $\mathcal{C}$ の部分圏 $\mathcal{D}$ と対象 $X \in \mathcal{C}$ について次を定義する。

(1) $\mathcal{C}$ の射 $f\colon D_X \to X$ が**右 $\mathcal{D}$ 近似** *(right $\mathcal{D}$-approximation)* であるとは、$D_X \in \mathcal{D}$ であり、任意の $g\colon D \to X$ という $D \in \mathcal{D}$ からの射が f を経由するとき (つまりある射 $\overline{g}\colon D \to D_X$ が存在して $g = f \circ \overline{g}$ となる) をいう。つまり関手圏 $[\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}b]$ において次が全射である。

$$\mathcal{D}(-, D_X) \xrightarrow{f\circ(-)} \mathcal{C}(-, X)\big|_{\mathcal{D}}$$

(2) $\mathcal{C}$ の射 $f\colon D_X \to X$ が**一意的右 $\mathcal{D}$ 近似** *(unique right $\mathcal{D}$-approximation)* であるとは、$D_X \in \mathcal{D}$ であり、任意の $g\colon D \to X$ という $D \in \mathcal{D}$ からの射が f を**唯一に**経由するとき (つまり $g = f\circ\overline{g}$ なる射 $\overline{g}\colon D \to D_X$ が唯一存在するとき) をいう。これはつまり関手圏 $[\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}b]$ において次が同型である。

$$\mathcal{D}(-, D_X) \xrightarrow{f\circ(-)} \mathcal{C}(-, X)\big|_{\mathcal{D}}$$

またこれは包含関手 $\iota\colon \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$ と $D \in \mathcal{D}$ に対して

$$\mathcal{D}(D, D_X) \xrightarrow{f\circ(-)} \mathcal{C}(\iota D, X)$$

が同型なことも意味する。

(3) 双対的に**左 $\mathcal{D}$ 近似** *(left $\mathcal{D}$-approximation)* と **$\mathcal{D}$ への一意的左近似** *(unique left $\mathcal{D}$-approximation)* を定義する。

(4) 任意の対象が右 $\mathcal{D}$ 近似 (resp. 左 $\mathcal{D}$ 近似) を持つような部分圏 $\mathcal{D}$ を**反変有限** *(contravariantly finite)* (resp. **共変有限**, *covariantly finite*) と呼ぶ。反変有限かつ共変有限な部分圏のことを**関手的有限** *(functorially finite)* と呼ぶ。

ここで「反映」という単語を用いたのはわけがある:

命題 D.14. 圏 $\mathcal{C}$ の部分圏 $\mathcal{D}$ に対して、次は同値*:*

(1) $\mathcal{D}$ は反映的部分圏である、つまり包含 $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$ には左随伴が存在する。
(2) 任意の対象 $X \in \mathcal{D}$ が一意的左 $\mathcal{D}$ 近似を持つ。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): 包含を $\iota\colon \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$、その左随伴を $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ とする。このとき随伴の単位射 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \iota L$ を考えると、任意の対象 $X \in \mathcal{C}$ と $D \in \mathcal{D}$ に対して、

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(LX, D) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[dr, "\simeq"'] & \mathcal{C}(\iota LX, \iota D) \arrow[d, "(-)\circ\eta_X"] \\ & \mathcal{C}(X, \iota D) \end{tikzcd}$$

という可換図式がある。ここで上の射は忠実充満関手 ι からくる同型、斜めの射は随伴の同型である。よって縦は同型。これはつまり言い換えると、任意の対象 $D \in \mathcal{D}$ に対して、$\mathcal{C}(\iota LX, D) \xrightarrow{(-)\circ\eta_X} \mathcal{C}(X, D)$ が全単射ということであり、これは任意の X から $\mathcal{D}$ の対象への射が一意的に η_X を経由することを意味する。なので η_X が一意的左 $\mathcal{D}$ 近似を与える。

(2) $\Rightarrow$ (1): 具体的に左随伴 $D^{(-)}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を構成する。

- $X \in \mathcal{C}$ に対して、一つ一意的左近似 $X \xrightarrow{\eta_X} D^X$ を選び、D^X をそれとして定める。このような選び方は、一意性より同型を除いて一意的なことがすぐ分かる。
- 射 $f\colon X \to Y$ に対しては、次の図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & D^X \arrow[d, dashed, "D^f"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"] & D^Y \end{tikzcd}$$

を可換にするような唯一の射 D^f が存在することが、η_X が一意的左 $\mathcal{D}$ 近似なことより従う。この対応が関手的なのは一意性を用いてすぐに分かる。よって関手 $D^{(-)}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ができた。

この関手が包含の左随伴なら良いが、任意の対象 $X \in \mathcal{C}$ と $D \in \mathcal{D}$ に対して、

$$\mathcal{C}(D^X, D) \xrightarrow{(-)\circ\eta_X} \mathcal{C}(X, D)$$

は、η_X が一意的左近似なことから全単射であり、また X と D についてこの同型は自然。よってより明確に書くと、包含関手 $\iota\colon \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$ に対して、

$$\mathcal{C}(D^X, D) \xrightarrow{(-)\circ\eta_X} \mathcal{C}(X, \iota D)$$

という自然同型があり、よって $D^{(-)}$ が ι の左随伴なことが従う。 □

系 D.15. 圏 $\mathcal{C}$ の部分圏 $\mathcal{D}$ に対して、任意の対象 $X \in \mathcal{C}$ がエピな *(resp.* モノな*)* 左 $\mathcal{D}$ 近似 *(resp.* 右 $\mathcal{D}$ 近似*)* を持つならば、$\mathcal{D}$ は反映的 *(resp.* 余反映的*)* である。

証明. モノ性やエピ性より、近似は一意的近似としてとれることから従う。 □

反映的部分圏の重要な性質として、極限で閉じていることがある:

命題 D.16. 圏 $\mathcal{C}$ の反映的部分圏 $\mathcal{D}$ は $\mathcal{C}$ の中での極限で閉じている。より正確には、任意の関手 $D_{(-)}\colon I \to \mathcal{D}$ に対して、もし $\lim_i D_i$ が $\mathcal{C}$ において存在するならば、実は $\lim_i D_i \in \mathcal{D}$ が成り立ち、とくにこの元は $D_{(-)}$ の $\mathcal{D}$ における極限を与える。

証明. 圏 $\mathcal{C}$ において $X := \lim_i D_i$ が存在するとする (包含関手は省略する)。このとき随伴の単位射を $\eta_X\colon X \to D^X$ とおくとこれは一意的左 $\mathcal{D}$ 近似である (命題 D.14)。この射が同型なことを示せば、(部分圏は常に同型で閉じることを仮定したので) $X \in \mathcal{D}$ が従う。

逆射を作る。各 $i \in I$ について、極限の構造射を $f_i\colon X \to D_i$ とする。このとき η_X は一意的左 $\mathcal{D}$ 近似なので、f_i は η_X を経由する、つまりある $\overline{f_i}\colon D^X \to D_i$ が存在して $\overline{f_i}\eta_X = f_i$ が成り立つ。また各射 $i \to j \in I$ に対して、次の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
 & & D_i \arrow[dd] \\
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[urr, bend left, "f_i"] \arrow[drr, bend right, "f_j"'] & D^X \arrow[ur, "\overline{f_i}"'] \arrow[dr, "\overline{f_j}"] & \\
 & & D_j
\end{tikzcd}$$

ここで右の小さい三角形以外は可換なことがすでに分かっているが、そのことと η_X が「一意的」近似だったことから、右の小さい三角形も可換。なので $\overline{f_i}\colon X \to D_i$ は $D_{(-)}$ 上の cone を与える。よって極限の普遍性より、ある $\varphi\colon D^X \to X$ が存在して、任意の $i \in I$ に対して次が可換:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[drr, bend right, "f_i"'] & D^X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\overline{f_i}"'] & X \arrow[d, "f_i"] \\
 & & D_i
\end{tikzcd}$$

この図式の可換性と、X の極限としての普遍性の唯一性の部分から、$\varphi\eta_X = \mathrm{id}_X$ が従う。

次に $\eta_X\varphi = \mathrm{id}_{D^X}$ を見たいが、次の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\eta_X"'] \arrow[dr, "\eta_X"] & \\
D^X \arrow[r, "\varphi"'] & X \arrow[r, "\eta_X"'] & D^X
\end{tikzcd}$$

この図式は、すでに示した $\varphi\eta_X = \mathrm{id}_X$ を使えば可換なことが分かる。しかし一方、$X \xrightarrow{\eta_X} D^X$ は一意的左 $\mathcal{D}$ 近似という普遍性を持っていた。よって一意性の部分から下の合成は id_{D^X} に等しいこと、つまり $\eta_X\varphi = \mathrm{id}_{D^X}$ が従う。 □

また単射性はどちらで考えても同値である:

命題 D.17. 圏 $\mathcal{C}$ の反映的部分圏 $\mathcal{D}$ において、$\mathcal{D}$ の射 $\varphi\colon X \to Y$ が $\mathcal{D}$ においてモノであることと、$\mathcal{C}$ においてモノであることは同値である。

証明. 明らかに $\mathcal{C}$ においてモノならば $\mathcal{D}$ においてもモノである。なので $\mathcal{D}$ において φ がモノであると仮定して、$\mathcal{C}$ においてもモノなことを示す。

任意の対象 $W \in \mathcal{C}$ と 2 つの射 $f_1, f_2 \colon W \rightrightarrows X$ が $\varphi f_1 = \varphi f_2$ を満たすとする。このとき $\mathcal{W}$ の一意的左 $\mathcal{D}$ 近似 $\eta_W \colon W \to D^W$ をとると、次の可換図式ができる:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\eta_X"'] & X \arrow[r, "\varphi"] & Y \\ D^W \arrow[ur, "\overline{f_i}"'] & & \end{tikzcd}$$

このとき $\varphi\overline{f_1} = \varphi\overline{f_2}$ なことが、$\varphi\overline{f_1}\eta_W = \varphi f_1 = \varphi f_2 = \varphi\overline{f_2}\eta_W$ なことと η_W が一意的近似なことより従う。ここで $\mathcal{D}$ において φ はモノより $\overline{f_1} = \overline{f_2}$ が従い、よって $f_1 = f_2$ となる。 □

D.3. **Calculus of fractions 周辺.**

Appendix E. 加群圏の場合

本稿ではできるだけ一般的なアーベル圏・Grothendieck 圏の範疇から出ずに議論をすすめたが、一部 Grothendieck 圏の性質を示すために Grothendieck 圏の外部から出て加群の場合の結果を使わねばならないときがある (とくに enough injectives なこと)。そこに必要最低限なものを環上の加群の場合に述べる。**本稿を通して、環は** *(***もちろん $\mathcal{S}$ 集合であり***)* **単位的結合的であり、可換と限らないものをさす。**

定義 E.1. 環 Λ に対して、右 Λ 加群 (であり $\mathcal{U}$ 集合なもの) のなす圏を $\mathsf{Mod}\,\Lambda$ と定める (射は加群の準同型)。

E.1. **加群は入射加群に埋め込める.**

定義 E.2. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の対象の集合 $\mathcal{I}$ が**余生成集合** *(cogenerating set)* であるとは、定義 3.10 の双対を満たすときをいう。それがさらに**入射的余生成集合** *(injective cogenerating set)* であるとは、余生成集合であり、全ての対象が入射的なことをいう。また対象 E が**入射的余生成子** *(injective cogenerator)* であるとは、集合 $\{E\}$ が入射的余生成なときをいう。

命題 E.3. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の入射的対象からなる集合 $\mathcal{I}$ について次は同値。

(1) $\mathcal{I}$ は入射的余生成子。
(2) $\mathcal{A}$ の任意の対象 $X \in \mathcal{A}$ について、X がゼロでないならば、ある対象 $E \in \mathcal{I}$ であって $\mathcal{A}(X, E) \neq 0$ なるものが存在する。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): こちらは入射性を使わない。ゼロでない対象 $X \in \mathcal{A}$ を取ると、恒等射 $\mathsf{id}_X \colon X \to X$ はゼロ射でない。なのである $\varphi\colon X \to E$ が存在し、$\varphi \circ \mathsf{id}_X$ はゼロでない、よって $\varphi \neq 0$ より $\mathcal{A}(X, E) \neq 0$ が従う。

(2) $\Rightarrow$ (1): ゼロでない射 $f \colon X \to Y$ をとる。すると $\operatorname{Im} f \neq 0$ であることから、条件 (2) よりある $\varphi\colon \operatorname{Im} f \to E$ というゼロ射でないものが取れる。次の図式を考える:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads] & & Y \arrow[ddl, dashed, bend left, "\overline{\varphi}"] \\ & \operatorname{Im} f \arrow[ur, hook] \arrow[d, "\varphi"] & \\ & E & \end{tikzcd}$$

このとき E の入射性より、上を可換にする $\overline{\varphi}\colon Y \to E$ が取れる。この $\overline{\varphi}$ は $\overline{\varphi} \circ f \neq 0$ を満たすことがすぐ確認できる。 □

上の条件 (2) のほうが、対象一つ一つについて考えれば良いので楽であり、普通、入射余生成子や射影生成子といったら (2) (とその双対) を定義にすることも多い。

完備なアーベル圏の場合は、入射余生成子があれば必ず enough injectives なことが従う。

定義 E.4. アーベル圏 $\mathcal{A}$ が**豊富な射影的対象を持つ** *(has enough projective objects, has enough projectives)* とは、任意の対象が射影的対象からの全射を持つときをいう。双対的に**豊富な入射的対象を持つ** *(has enough injective objects, has enough injectives)* とは、任意の対象が入射的対象への単射を持つときをいう。

命題 E.5. *アーベル圏 $\mathcal{A}$ が完備 (小さい直積を持つ) とする。このとき $\mathcal{A}$ が入射的余生成集合 $\mathcal{I}$ を持てば、$\mathcal{A}$ は豊富な入射的対象を持ち、具体的には任意の対象は $\mathcal{I}$ に属する対象の (無限) 直積に埋め込める。*

証明. 対象 $X \in \mathcal{A}$ に対して、次を考える:
$$X \xrightarrow{\prod f} \prod \{ I \mid f \in \mathcal{A}(X,I)\,,\, I \in \mathcal{I} \}$$
ここで添え字集合は、$I \in \mathcal{I}$ と $f \in \mathcal{A}(X,I)$ をともに動く (小ささに注意)。完備なのでこの直積は存在する。

入射的対象は直積で閉じたことを思い出すと、これが単射であることを示せば十分である。そのため $\varphi \colon W \to X$ をとり、$(\prod f) \circ \varphi = 0$ とする。これはつまり、任意の対象 $I \in \mathcal{I}$ と射 $f \colon X \to I$ に対して $W \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{f} I$ の合成がゼロであることを意味する。しかし余生成子の定義により、これは $\varphi = 0$ を意味する。よって $\prod f$ は単射である。 □

よって入射余生成子の存在を示せば豊富な入射的対象を持つことが分かるので、それを加群の場合に確かめていく。方針は**アーベル群の圏が入射余生成子を持つことを示し、それを Hom を使って Λ 加群の圏に持ってくる。**

まず加群圏の場合の入射余生成子の簡単な特徴付けを与えよう。

命題 E.6. *環 Λ 上の入射加群 $E \in \mathsf{Mod}\,\Lambda$ に対して次は同値。*

(1) E は $\mathsf{Mod}\,\Lambda$ の入射余生成子である。
(2) 任意の単純右 Λ 加群 S_Λ は E に埋め込める、つまり単射 $S \hookrightarrow E$ が存在する。
(3) 任意の単純右 Λ 加群 S_Λ に対して $\mathrm{Hom}_\Lambda(S,E) \neq 0$。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3): は明らか (単純性より、S からのゼロでない射は必ず単射なので)。

(2) $\Rightarrow$ (1): ゼロでない加群 M をとってくる。このとき $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,E) \neq 0$ を示したい。$0 \neq x \in M$ をとり、x で生成される M の有限生成部分加群 $N := x\Lambda$ を考える。ここで次の事実を用いる:

事実 E.7. *任意のゼロでない有限生成加群は必ず極大部分加群を持つ。とくにゼロでない有限生成加群は、ある単純加群への全射が存在する。*

証明は Zorn の補題により簡単に示せる (後半はその極大部分加群での商を取ればよい)。これを用いて、ある単純加群 S に対して $\varphi \colon N \twoheadrightarrow S$ という全射が作れる。

次の図式を考える:
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads, "\varphi"] & M \arrow[ddl, dashed, bend left, "\overline{\varphi}"] \\
 & S \arrow[d, hook, "i"] & \\
 & E &
\end{tikzcd}$$
ここで $i \colon S \hookrightarrow E$ は (2) で存在が保証されているものである。よって E の入射性を使えば上を可換にする $\overline{\varphi}$ が存在する。この $\overline{\varphi}$ が $\overline{\varphi} \neq 0$ なことはすぐ確認できる。 □

命題 E.8. *アーベル群の圏 $\mathcal{A}b$ は入射余生成子を持つ。具体的には、例えば $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ で与えられる。*

証明. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が入射的であることは標準的なので省く (もし非常に暇があれば思い出して書く)。後は命題 E.6 を用いたい。単純 $\mathbb{Z}$ 加群は各素数 p について $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ という形で与えられる。今準同型 $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を $f(1) := 1/p$ を満たすよう定める。このとき $\operatorname{Ker} f = p\mathbb{Z}$ がすぐ確認でき、よって単射 $\overline{f}\colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が定まる。よって命題 E.6 より $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は $\mathsf{Mod}\,\mathbb{Z} = \mathcal{A}b$ の入射余生成子となる。 □

命題 E.9. A, B を環、Q_B を入射的右 B 加群、${}_AM_B$ を (A, B) 両側加群とする。このとき M が左 A 加群として平坦 *(flat)* ならば、$\operatorname{Hom}_B({}_AM_B, Q_B)$ は入射的右 A 加群である。

証明. $\mathsf{Mod}\,A$ での単射 $X \hookrightarrow Y$ に対して、誘導される写像

$$\operatorname{Hom}_A(Y, \operatorname{Hom}_B(M, Q)) \to \operatorname{Hom}_A(X, \operatorname{Hom}_B(M, Q))$$

が全射であればよいが、次の図式を考える:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}_A(Y, \operatorname{Hom}_B(M, Q)) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(X, \operatorname{Hom}_B(M, Q)) \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ \operatorname{Hom}_B(Y \otimes_A M, Q) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_B(X \otimes_A M, Q) \end{array}$$

ここで縦の同型はテンソルと Hom の随伴である。一方 $X \otimes_A M \to Y \otimes_A M$ は M の平坦性より単射、よって Q_B が入射的なことより下の射は全射である。よって上も全射。 □

定理 E.10. 環 A に対して $\mathsf{Mod}\,A$ は入射余生成子を持つ、とくに豊富な入射的対象を持つ。

証明. 具体的に入射余生成子を構成する。$Q_{\mathbb{Z}}$ を $\mathcal{A}b$ における入射余生成子 (右加群) として (命題 E.8 により存在が保証されている)、$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_\Lambda\Lambda_{\mathbb{Z}}, Q_{\mathbb{Z}})$ は右 Λ 加群になる。これは命題 E.9 より入射的 Λ 加群である。

また任意のゼロでない右 Λ 加群 X_Λ に対して、

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(X, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, Q)) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X \otimes_\Lambda, Q) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, Q)$$

とできる (一番目は随伴、二番目は環自身をテンソルしたらもとに戻るので)。今 X はゼロでない Λ 加群なので、もちろんアーベル群としてもゼロでない。よって Q が $\mathcal{A}b$ での入射余生成子だったことから、$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, Q) \neq 0$。よって $\operatorname{Hom}_\Lambda(X, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, Q)) \neq 0$ が従い、つまり $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, Q)$ は $\mathsf{Mod}\,\Lambda$ の入射余生成子である。 □

E.2. **前加法圏上の加群の場合.** 実はより一般に、skeletally small な前加法圏上の加群圏でも同様の議論ができる。そのため書いておく。実質的には加法圏上の加群のテンソル積を用いれば上と平行な議論ができるが、少し道具が大掛かりなので、最低限でやる。

まず必要な定義を recall しておく。

定義 E.11. $\mathcal{C}$ を skeletally small な前加法圏としたとき、**右 $\mathcal{C}$ 加群**とは $\mathcal{C}$ からアーベル群のなす圏 $\mathcal{A}b$ への加法的反変関手 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}b$ のことをさす。このとき $\mathcal{C}$ 加群の射を自然変換とすることで $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ で右 $\mathcal{C}$ 加群の圏をなす。また $\mathcal{C}$ 加群 M, N について $\mathcal{C}$ 加群の射の集合を $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ と書く。この圏は例 4.2 により Grothendieck アーベル圏である。

ここで集合論的には、skeletally small な圏 $\mathcal{C}$ においても $\mathcal{C}(X, Y)$ は $\mathcal{U}$-small なだけで、$\mathcal{U}$ 集合とは限らず、よって $\mathcal{C}(X, Y) \in \mathcal{A}b$ とはならない ($\mathcal{A}b$ は $\mathcal{U}$ 集合であるようなアーベル群の圏だったので)。しかし以下 **$\mathcal{C}$ の Hom 集合を $\mathcal{U}$ 集合に取り替えることで、$\mathcal{C}$ は Hom 集合が $\mathcal{A}b$ に入ると仮定する。**

補題 E.12. *Skeletally small* な前加法圏 $\mathcal{C}$ の各対象 X について $\mathcal{C}(-, X)$ は右 $\mathcal{C}$ 加群であり、任意の $\mathcal{C}$ 加群 M に対して、同型

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(-, X), M) \cong M(X)$$

が存在する。また $\mathcal{C}(-, X)$ は有限生成射影加群である。

証明. 米田の補題である。射影性は米田からすぐ従う。有限生成は練習問題。 □

補題 E.13. *Skeletally small* な前加法圏 $\mathcal{C}$ の対象 x を固定したとき、$M \in \mathcal{A}b$ に対して関手

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}(x,-), M) \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}b$$

が定義できる。これに対して、$W \in \mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ と $M \in \mathcal{A}b$ について自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Wx, M) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}(x,-), M))$$

が存在する。

証明. 構成だけ与える。

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Wx, M) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}(x,-), M)) & & & & \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \\
\left(Wx \xrightarrow{f} M\right) & \longmapsto & (\,W \xrightarrow{\quad\varphi\quad} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}(x,-), M)\,) & & & & \\
 & & Wy \xrightarrow{\quad\varphi_y\quad} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}(x,y), M) & & & & \\
 & & \rotatebox{90}{$\in$} \qquad\qquad\qquad \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \\
 & & a \longmapsto (\,\mathcal{C}(x,y) \longrightarrow M\,) & & & & \\
 & & \rotatebox{90}{$\in$} \qquad\qquad \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \\
 & & (\psi \colon x \to y) \longmapsto Wy \xrightarrow{W\psi} Wx \xrightarrow{f} M & & & & \\
 & & \rotatebox{90}{$\in$} \qquad\qquad \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \\
 & & a \longmapsto \text{これ} & & & &
\end{array}$$

逆向きの写像は

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}(x,-), M)) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Wx, M) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
\left(W \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}(x,-), M)\right) & \longmapsto & (\,Wx \longrightarrow M\,) \\
 & & \rotatebox{90}{$\in$} \qquad\qquad \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & & a \longmapsto (\,Wx \xrightarrow{\varphi_x} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}(x,x), M)\,) \\
 & & \rotatebox{90}{$\in$} \qquad\qquad \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & & a \longmapsto (\,\mathcal{C}(x,x) \longrightarrow M\,) \\
 & & \rotatebox{90}{$\in$} \qquad\qquad \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & & \mathsf{id}_x \longmapsto \text{これ}
\end{array}$$

□

これはテンソルと Hom の随伴をいっていて、加法圏上の加群についてのテンソル積を定義してないが、適切に定義すればそれである。ここで、適切に定義すれば $W_{\mathcal{C}}$ という右 $\mathcal{C}$ 加群と $\mathcal{C}(x,-)$ という左 $\mathcal{C}$ 加群をテンソルしたら

$$W \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{C}(x,-) \cong Wx$$

が成り立つということだけ述べておこう (こう見ればテンソルと Hom の随伴に見えるだろう)。そして $\mathcal{C}$ の対象が一つの場合、つまり環 Λ の場合は、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}(x,-), M)$ を考えることは $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, M)$ を考えることとなり、これは右 Λ 加群の構造が入る。そうすると、加群圏の場合の入射加群の構成の類似として、次のような定理が成り立つ。

命題 E.14. *Skeletally small* な前加法圏 $\mathcal{C}$ に対して $x \in \mathcal{C}$ を固定し、$Q \in \mathcal{A}b$ を入射 $\mathbb{Z}$ 加群とする。このとき $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}(x,-), Q)$ は入射的右 $\mathcal{C}$ 加群である。

証明. $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ での単射 $W \hookrightarrow W'$ をとったとき、次の可換図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W', \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}(x,-),Q)) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(W'x, Q) \arrow[d, two heads] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}(x,-),Q)) \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Wx, Q)
\end{tikzcd}$$

ここで横の同型は先程の補題より従うもので、縦は $W \hookrightarrow W'$ により誘導されるもの。一方関手圏での単射性は point-wise での単射性より $Wx \hookrightarrow W'x$ は単射で、Q が入射的なことから右は全射、よって左も全射、より主張が従う。 □

定理 E.15. *Skeletally small* な前加法圏 $\mathcal{C}$ について、$\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ は入射余生成子を持つ。とくに豊富な入射的対象を持つ。

証明. Q を $\mathcal{A}b$ での入射余生成子とする ($\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ など)。また、$\mathcal{C}$ の同型類の代表元の集合を $\mathcal{C}'$ とする (skeletally small よりとれる)。このとき次の $\mathcal{C}$ 加群が入射余生成子なことを示す:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bigoplus_{x\in\mathcal{C}'} \mathcal{C}(x,-), Q) \cong \prod_{x\in\mathcal{C}'} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}(x,-), Q)$$

まず入射的であることは、先程の命題を右辺に適応すれば分かる (入射的対象は直積で閉じたことにも注意)。よって余生成子を示すために、任意のゼロでない $\mathcal{C}$ 加群がこの加群への射を持つことを示せばよい。

$0 \neq W \in \mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ を取ってくる。このとき

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \prod_{x\in\mathcal{C}'} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}(x,-),Q)) \cong \prod_{x\in\mathcal{C}'} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}(x,-),Q)) \cong \prod_{x\in\mathcal{C}'} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Wx, Q)$$

と変形できる。しかし $W \neq 0$ よりある $y \in \mathcal{C}$ について $Wy \neq 0$ であるが、今 $\mathcal{C}'$ は $\mathcal{C}$ の骨格だったことから $x \cong y$ なる $x \in \mathcal{C}'$ が存在し、$Wx' \neq 0$ を満たす。ここで $\mathcal{A}b$ において Q が入射余生成子だったことから $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Wx, Q) \neq 0$ が従い、上のアーベル群はゼロにならない。よって示された。 □

参考文献

[AR] J. Adámek, J. Rosický, *Locally presentable and accessible categories*, London Mathematical Society Lecture Note Series 189, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Ca] G. Călugăreanu, *Lattice Concepts of Module Theory*, Kluwer Texts in the Mathematical Sciences 22. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2000).

[CB] W. Crawley-Boevey, *Locally finitely presented additive categories*, Comm. Algebra 22 (1994), no. 5, 1641–1674.

[GZ] P. Gabriel, M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Springer Ergebnisse 35 (1967).

[He] I. Herzog, *The Ziegler spectrum of a locally coherent Grothendieck category*, Proc. London. Math. Soc. 74 (1997), no. 3, 503–558.

[Ka] R. Kanda *Classifying Serre subcategories via atom spectrum*, Adv. Math. 231 (2012), no. 3–4, 1572–1588.

[Po] N. Popescu, *Abelian categories with applications to rings and modules*, London Mathematical Society Monographs 3, Academic Press 1973.

[St] B. Stenström, *Rings of quotients: An introduction to methods of ring theory*, Springer-Verlag, NewYork-Heidelberg, 1975.

Email address: `m16009t@math.nagoya-u.ac.jp`

URL: `https://sites.google.com/view/italing/`