Exact categories in the representation theory of algebras

榎本 悠久 [*]

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 M2，2018 年 2 月

1 導入

著者の専門分野は (いまのところ) **多元環の表現論**である．あまりどのようなことをやる分野なのか知られていないと思うので, 本稿では環の表現論についての簡単な概説からはじめ, 著者が得た完全圏を用いた応用について述べる．

まず簡単のため, 本稿を通して以下の仮定をする．

- k を可換体とし, **多元環**というときは, 体 k 上有限次元であるような（一般に非可換な）k 代数をさす．
- **圏**というときは, 加法圏 $\mathcal{E}$ であり Hom 有限な k 線形圏（i.e. $\mathcal{E}(X,Y)$ が有限次元 k ベクトル空間かつ合成が双線形）を仮定し, さらに技術的な仮定（冪等完備）（気にしなくてよい）をつける．

例えば多元環 Λ に対し, 有限生成加群の圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ は上の意味で圏となることに注意する．このとき, 多元環 Λ の表現論とは「$\mathsf{mod}\,\Lambda$ **やそれに関連する圏の圏論的構造を調べる**」ことを主目的とする．圏論的構造といっても抽象的でよく分からないよう思えるが, 次の命題が手がかりとなる．

定理 1.1 (Krull-Schmidt)**.** 圏 $\mathcal{E}$ の任意の対象 X に対し, ある有限個の直既約な対象 X_i が存在して $X \cong \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ と直和分解される．さらにこの分解は並び替えと同型を除いて一意的である．

つまり圏 $\mathcal{E}$ は, **直既約対象がどれだけあるか**と**直既約対象の間に射がどれだけあるか**という 2 つの情報で完全に決定されることが分かる．さらに具体的に圏の構造を把握するために, 与えられた圏 $\mathcal{E}$ に対して箙 $Q(\mathcal{E})$ をを次のようにして描く（箙は quiver の訳語で有向グラフのこと）．

- $Q(\mathcal{E})$ の頂点集合は $\mathsf{ind}\,\mathcal{E}$, つまり $\mathcal{E}$ の直既約対象の同型類の集合とする．
- X から Y に**既約射**があるときに $X \to Y$ と $Q(\mathcal{E})$ において矢を描く．ここで既約射とは $\mathcal{E}$ の非同型射であって, 他の直既約の間の非同型な射の合成の和でかけないようなものである．

この箙 $Q(\mathcal{E})$ は圏 $\mathcal{E}$ の**極小生成系**と呼ぶべきもので, $\mathcal{E}$ の本質的情報を組み合わせ的に記述する (実際 $Q(\mathcal{E})$ からできる自由圏から $\mathcal{E}$ への本質的全射ができる)．まずは数学専攻にとって馴染み深いだろう次の例を見よう．

[*] m16009t@math.nagoya-u.ac.jp

例 1.2. 多元環 $\Lambda := k[X]/(X^3)$ に対し $Q(\operatorname{mod}\Lambda)$ を描こう．線形代数の授業でやるように, 有限生成 Λ 加群を考えることは有限次元ベクトル空間上の 3 乗すると 0 になる線形自己準同型を考えることと同じで, よって直既約 Λ 加群の同型類はサイズ i のジョルダン細胞 J_i で代表される $(i = 1, 2, 3)$. このときそれぞれのジョルダン細胞の間に自然な単射 $J_1 \rightarrowtail J_2 \rightarrowtail J_3$ や全射 $J_3 \twoheadrightarrow J_2 \twoheadrightarrow J_1$ があり, それぞれ既約写像となっている．実際 $Q(\operatorname{mod}\Lambda)$ は次の絵で与えられる．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & J_3 \arrow[dr] & & J_3 \arrow[dr] & & J_3 \arrow[dr] & & J_3 \arrow[dr] & & J_3 & \\
\cdots & & J_2 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & J_2 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & J_2 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & J_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
 & J_1 \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] & & J_1 \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] & & J_1 \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] & & J_1 \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] & & J_1 &
\end{tikzcd}
$$

(ここで見やすさのため J_i という頂点を繰り返し書いているが, それぞれ J_i たちは実際は同じ頂点を表している．）また $J_1 \cdots J_1$ は ${}_{J_1}\nearrow^{J_2}\searrow_{J_1}$ の合成が 0 であるという関係式を, $J_2 \cdots J_2$ は ${}^{J_2}\searrow_{J_1}\nearrow^{J_2} = {}_{J_2}\nearrow^{J_3}\searrow_{J_2}$ という可換の関係式を表している．実は, **上のグラフ上自由に生成させた圏を, 2 つの点線の関係式で割った圏は, $\operatorname{mod}\Lambda$ と同値**だということが分かる．このように箙を用いることで, 視覚的に分かりやすい形で, 与えられた圏の生成元と関係式による完全な記述を与えることができる!

上の例では箙の頂点は有限個しかなかった．このように箙が有限のときは圏の構造が非常に理解しやすい．

定義 1.3. 圏 $\mathcal{E}$ が**有限型**であるとは, $\operatorname{ind}\mathcal{E}$ が有限集合であるとき (つまり $Q(\mathcal{E})$ が有限グラフなとき) をいう．また多元環 Λ が**有限表現型**であるとは, $\operatorname{mod}\Lambda$ が有限型であるときをいう．

よって上では $\operatorname{mod} k[X]/(X^3)$ は有限型の圏であり, $k[X]/(X^3)$ は有限表現型である．有限表現型の多元環は, その加群圏が制御しやすくほぼ完全に構造が理解できることから, 古くから表現論では重要な研究対象であった．本稿の主題は, 有限表現型の類似である **CM 有限型な多元環の分類**を, **完全圏**という圏論的枠組みに関する結果を用いることで研究することである．

2 CM 表現論

Cohen-Macaulay (CM) 表現論とは, CM 加群のなす $\operatorname{mod}\Lambda$ の部分圏 $\mathsf{CM}\,\Lambda$ の構造を調べることを目的とする．必要な定義をまずする．

定義 2.1.
- 多元環 Λ が**岩永-Gorenstein 環**であるとは, Λ の Λ 加群としての入射次元が右加群としても左加群としても有限であるときをいう．以下略して IG 環と書く．
- IG 環 Λ 上の有限生成加群 M が **Cohen-Macaulay** であるとは, $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda) = 0$ が $i > 0$ に対してなりたつときをいう．Cohen-Macaulay 加群のなす $\operatorname{mod}\Lambda$ の部分圏を $\mathsf{CM}\,\Lambda$ と書く．
- IG 環が CM 有限であるとは, $\mathsf{CM}\,\Lambda$ が有限型であるときをいう．

いくつかの歴史的動機を述べておこう．まず IG 環の CM 表現論はもともと可換環の表現論に由来を持つ．ネーター局所環について, 自己入射次元が有限であることは環が Gorenstein 環であることの特徴づけの一つであり, よって IG 環は可換 Gorentein 環の自然な非可換拡張である．この文脈において同様に上で述べて CM 加群の定義は, 可換 Gorenstein 環上の極大 Cohen-Macaulay 加群の概念を拡張している．このとき CM 有限な Gorenstein 環は ADE 型単純特異点と対応することなど, さまざまな研究がされてきた．

しかしもともとの起源を離れて多元環の表現論の視点からも, IG 環の CM 表現論は次のような典型例を含み, よく研究されている.

例 2.2. ふたつの対照的な典型例がある.

- Λ を自己入射的多元環, つまり Λ 自身が入射右加群であるものを考えると, これは IG 環となっており, しかも $\mathsf{CM}\,\Lambda = \mathsf{mod}\,\Lambda$ がなりたつ. この場合, CM 有限型と有限表現型は同値である. 実は例 1.2 の環 $k[X]/(X^3)$ は自己入射的である.

- Λ を大域次元有限な多元環, つまり任意の加群が入射次元有限であるものとすると, これは IG 環である. この場合 $\mathsf{CM}\,\Lambda$ は射影加群のなす圏と同値になり, これは常に有限型となっている. つまり Λ は CM 有限型である.

ここで, 本稿の目的 **CM 有限型の IG 環の分類**のためには次の障害が問題となる.

注 2.3. 通常の加群圏を扱う場合は, $\mathsf{mod}\,\Lambda_1$ と $\mathsf{mod}\,\Lambda_2$ が圏同値になるならば Λ_1 と Λ_2 は同じ環 (正確には森田同値) となる: つまり加群圏からもとの環を復元できる. しかし, 全く異なる IG 環 Λ_1 と Λ_2 であっても, その CM 圏 $\mathsf{CM}\,\Lambda_1$ と $\mathsf{CM}\,\Lambda_2$ が圏同値になってしまうことが非常によくある: つまり「CM 圏をとる」という操作はもとの環の情報を忘れてしまう.

知っている人向けの具体例でいうと, 有限表現型の自己入射環を Λ_1, その Auslander 代数を Λ_2 とすると, 二つの CM 圏は一致するが一般に全然二つは森田同値にならない. このため, CM 有限な環の分類は次の 2 ステップを行う必要がある.

1. IG 環の CM 圏となりうる加法圏を全て特定する (このなかで有限型な圏がちょうど CM 有限な IG 環の CM 圏に対応する).
2. 与えられた有限型の圏一つ一つについて, それを CM 圏として持つような IG 環を全て特定する

このステップ 2 が通常の加群圏では現れないステップである. このためには, もとの環の情報を忘れないような CM 圏上の付加構造を用いることが自然であり, それが次に紹介する**完全圏**である.

3　完全圏

完全圏 (exact category) というとき二つの別の概念 (Barr のものと Quillen のもの) があるが, ここで扱うのは Quillen の意味での完全圏である.

定義 3.1. ペア $\mathcal{E} = (\mathcal{E}, F)$ が**完全圏**であるとは, $\mathcal{E}$ は加法圏であり, F は $\mathcal{E}$ 内の短完全列 ($0 \to X \to Y \to Z \to 0$ のようなもの) の集まりでいくつかの公理を満たすときをいう.

つまり完全圏といったら「加法圏+その上の付加構造 (完全圏構造)」という形をしている. 短完全列が指定されていることで, 完全圏を用いればアーベル圏ではない圏においてもホモロジー代数を行うことができて, 様々な分野で用いられている.

例 3.2. $\mathcal{E}$ をアーベル圏 $\mathcal{A}$ の拡大で閉じた部分圏とする. このとき $\mathcal{E}$ は以下のように自然に完全圏構造が入る: $\mathcal{A}$ での短完全列でありすべての項が $\mathcal{E}$ に入っているものを $\mathcal{E}$ 上の短完全列だと指定する. 今回重要な例として, IG 環上の CM 加群のなす圏 $\mathsf{CM}\,\Lambda$ は, アーベル圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の中で拡大で閉じた部分圏となっている. よって上の例より自然に完全圏構造が入る. しかも, 完全圏としての $\mathsf{CM}\,\Lambda$ からもとの環 Λ を復元することができる!(射影生成子の自己準同型環として)

CM 圏 $\mathsf{CM}\,\Lambda$ の CM 圏構造からは Λ が復元できないことは既に述べたが, このことはちょうど, **与えられた加法圏上には複数の異なる完全圏構造が入りうる**ことと対応している. よって上述のステップ 2 のためには, **加法圏上の完全圏構造を分類**することが有向な手段となりうる. これが主結果である.

4 主結果

第一の主結果は, 与えられた有限型の圏における完全圏構造の分類を与えるものである. このためにまず有限型の圏についての (この分野の人にとっては well-known な) 次のことを確認しよう.

命題 4.1. *次の二つのクラスの間に全単射が存在する.*

1. *有限型の圏 (の圏同値類)*

2. *有限次元多元環 (の森田同値類)*

ここで対応は, 有限型の圏 $\mathcal{E}$ に対しては $\Gamma := \mathrm{End}_{\mathcal{E}}(\bigoplus \mathsf{ind}\,\mathcal{E})$ を, 多元環 Γ に対しては有限生成射影加群のなす圏 $\mathcal{E} := \mathsf{proj}\,\Gamma$ を対応させることで与えられる.

つまり「有限型の圏 $\mathcal{E}$ を考えることと多元環 Γ を考えることは同じ」である. この対応のもとで, $\mathcal{E}$ のもつ圏論的性質と Γ のホモロジー的性質が関連していると考えることは自然で, 実際いくつかの結果が知られている. 例えば $\mathcal{E}$ が核を持つことやアーベル圏であることなどは, 対応する Γ の純ホモロジー代数的な言葉で簡単に記述することができる.

よって戦略は, 圏 $\mathcal{E}$ と多元環 Γ が上で対応するとき, $\mathcal{E}$ 上の完全圏構造を Γ 上の加群の言葉で書くことである. このため次の加群の定義をする.

定義 4.2. 多元環 Γ 上の単純加群 S が **2 正則**であるとは, 次の条件を満たすときをいう.

1. S は射影次元 2 である.

2. $\mathrm{Ext}^i_\Gamma(S, \Gamma)$ は $i \neq 2$ のとき 0 であり, $i = 2$ のとき単純 Γ^{op} 加群である.

このとき次がなりたつ.

定理 4.3 ([En2, Theorem 3.7, Corollary 3.10])**.** *$\mathcal{E}$ を有限型の圏, Γ を命題 4.1 で $\mathcal{E}$ に対応する多元環としたとき, 次の間に全単射がある.*

1. *$\mathcal{E}$ 上の完全圏構造 F*

2. *2 正則な単純 Γ 加群の集まり*

3. *箙 $Q(\mathcal{E})$ 上の点線の集合 $\mathbb{A}$*

ここでどのようなときに箙 $Q(\mathcal{E})$ に点線を引くかは省略するが, 今まで出ててきた点線は全てこの定理における点線になっている.

注 4.4. この定理は, 有限型という仮定や, さらに圏として仮定していた k 線形 Hom 有限などをのぞいても, 適当な条件のもとになりたつ. このような与えられた圏上の完全圏構造については, ごく最近そのようなもののなかで最大のものが存在することが示されるなど [Ru], 自然な疑問ながらあまり調べられていなかった.

次にこれを利用して, CM 有限 IG 環の分類に関する次の主定理が得られた.

定理 4.5 ([En2, Theorem A])**.** 次のクラスの間に全単射が存在する.

1. *CM* 有限な *IG* 環 Λ
2. ペア $(\Gamma, \mathbb{A})$ で, Γ は大域次元有限な多元環, $\mathbb{A}$ は Γ の箙 $Q(\mathsf{proj}\,\Gamma)$ の上の点線からなるサイクルの集合

ここで $(\Gamma, \mathbb{A})$ から Λ を作るには, $\mathbb{A}$ には乗っていない頂点に対応する射影 Γ 加群全ての直和の自己準同型環を取ればよい.

Proof. これは, 次の補題と先の定理によりすぐ従う.

補題 4.6 ([En1])**.** 有限型の完全圏 $\mathcal{E}$ が定理 *4.3* でペア $(\Gamma, \mathbb{A})$ と対応するとする. このとき $\mathcal{E}$ がある *IG* 環の *CM* 圏と完全圏として同値なことと, Γ が大域次元有限かつ $\mathbb{A}$ がサイクルからなることは同値である.

□

例 4.7. 例 1.2 を考えよう. ここで $\mathcal{E}$ として圏 $\mathsf{mod}\,k[X]/(X^3)$ をとり, Γ はこの圏と命題 4.1 のもと対応する多元環とする. この Γ は大域次元が 2 であり, さらに $Q(\mathsf{proj}\,\Gamma) = Q(\mathcal{E})$ は例 1.2 に描かれているものと同一視できる. よって点線からなるサイクルは 2 つあり, サイクルの集合の選び方は全部で $2^2 = 4$ 通りある. このとき具体的に Λ を計算することは簡単であるが省略する.

より複雑な例として興味ある読者は [En2] の Example 1.2 を見よ.

最後に定理 4.3 の証明のアイデアを簡単に話そう. 実は $\mathcal{E}$ と Γ が命題 4.1 で対応するとき, Γ 加群を考えることは $\mathcal{E}$ 上の前層 $\mathcal{E}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}b$ を考えることと同じであり, よって米田埋め込み $\mathcal{E} \to \mathsf{mod}\,\Gamma$ が存在する. このとき $\mathcal{E}$ は $\mathsf{proj}\,\Gamma$ と圏同値になっており, 米田埋め込みの左完全性から $\mathcal{E}$ 上の短完全列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ を米田で移せば $0 \to \mathcal{E}(-, X) \to \mathcal{E}(-, Y) \to \mathcal{E}(-, Z)$ が完全となる. これは $\mathcal{E}(-, Y) \to \mathcal{E}(-, Z)$ の cokernel の射影分解を与えており, 射影次元が 2 である. この cokernel として現れうる集まりを考えると, これがちょうど 2 正則単純加群を組成列としてもつ加群に対応することが分かる.

参考文献

[En1] H. Enomoto, *Classifying exact categories via Wakamatsu tilting*, J. Algebra 485 (2017), 1–44.

[En2] H. Enomoto, *Classifications of exact structures and Cohen-Macaulay-finite algebras*, arXiv:1705.02163.

[Ru] W. Rump, *On the maximal exact structure on an additive category*, Fund. Math. 214 (2011), no. 1, 77–87.