注意 !! 誤植や数学的なミスやギャップ等が含まれている場合があります。また一般的な記法や定義と異なったものを採用している箇所もあります。使用は自己責任にてお願いします。

可換環上の（非可換）代数上の加群のメモ（未完）

榎本 悠久

Abstract. 可換環上の加群論や、可換環上の非可換多元環上の加群論についての自分なりのメモ。何回も見返すの面倒なので気になるトピックを適当にまとめる。

目次

Date: 2019/12/05.
Key words and phrases. 可換環, CM 加群など.

1. Introduction

筆者が可換環や order の表現論やる上での備忘録。主に松村 [Ma]（とくに associated prime 周辺）や Bruns-Herzog [BH]（とくに depth や可換 CM 環周辺）や Goto-Nishida [?]（とくに非可換ネーター代数での ass や移入分解について）を参照しているが、筆者が分かりやすいようにまとめ直していて、証明方法も違う場合が多い（元を取る証明をしないよう、加群論的な証明を心がけている）。また可換にこだわらず、非可換でいくところは非可換でやっている。

1.1. 記法.

本稿を通して、次を使う。

- R: 可換環（ほとんどネーターだが仮定は毎回書く）
- Λ: 可換と限らない環（ほとんど両側ネーターだが毎回書く）（両側ネーターのことを省略して単に「ネーター環」と呼ぶ）。
- $\mathsf{Mod}\,\Lambda$: 右 Λ 加群のなすアーベル圏。
- $\mathsf{mod}\,\Lambda$: 有限生成右 Λ 加群のなす圏。Λ がネーターのときはアーベル圏になることに注意。
- $\mathsf{proj}\,\Lambda$: 有限生成射影右 Λ 加群のなす圏
- $\mathsf{fl}\,\Lambda$: 長さ有限 Λ 加群のなすアーベル圏。これは $\mathsf{Mod}\,\Lambda$ の Serre 部分圏になっている。
- Λ 加群 M について、$\operatorname{rad} M$: M の極大部分加群の共通部分。このとき次が成り立つ。

$$\operatorname{rad} M = \{x \in M \mid \text{単純加群 } S \text{ への任意の射 } f\colon M \to S \text{ で } f(x) = 0\}$$

- Λ 加群 M について $\mathsf{L}_\Lambda(X)$ で X の Λ 部分加群のなす束をさす。
- 環 Λ や圏 $\mathcal{C}$ の Jacobson 根基（つまり $\operatorname{rad}\Lambda, \operatorname{rad}\mathcal{C}$）を、特に $\mathcal{J}_\Lambda, \mathcal{J}_\mathcal{C}$ と書く。文脈で分かるときは環を略して単に $\mathcal{J}$ と書く。
- Λ 加群 M について、$\operatorname{Ann} M_\Lambda \subset \Lambda$ を $M \cdot \lambda = 0$ なる $\lambda \in \Lambda$ 全体と定義する。これは両側イデアルになっている。また M の元 x についても、$\operatorname{Ann}_\Lambda(x)$ で $x \cdot \lambda = 0$ なる $\lambda \in \Lambda$ 全体と定義する。これは一般には右イデアルになるだけで両側イデアルとは限らないことに注意。
- $\operatorname{Spec} R$: R の素イデアルの集合（Zariski 位相入れるときは入れる）

- $\operatorname{Max} R$: R の極大イデアルの集合
- R 加群 M について、$\operatorname{reg} M := \{a \in R \mid xa = 0 \Rightarrow x = 0\} \subset R$、この元のことを M 正則 (M-regular) とも呼ぶ。つまり M 上の r 倍写像 $(-)\cdot r \colon M \to M$ が単射（これは R 加群の射なことに注意）。M の非零因子 (non-zero-divisor) とも呼ばれる。とくに $\operatorname{reg} R$ は普通の意味での非零因子全体。当たり前だが R が整域なら $\operatorname{reg} R = R \setminus \{0\}$。
- $M \in \mathsf{Mod}\, R$ について、$\operatorname{Supp} M := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid M_\mathfrak{p} \neq 0\}$. とくに $\operatorname{Supp} R = \operatorname{Spec} R$.
- $M \in \mathsf{Mod}\, R$ について、$\dim M$ を、$\operatorname{Supp} M$ の中の prime chain の長さの最大値。
- $M \in \mathsf{Mod}\, R$ について、$\operatorname{Min} R$: $\operatorname{Supp} M$ の極小元の集合。
- R のイデアル I について、$V(I) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid I \subset \mathfrak{p}\}$.
- R のイデアル I について、$\sqrt{I}$ を、何乗かして I に入る R の元全体。R が可換に注意するとこれは R のイデアルになっている。$\sqrt{I} = I$ なるイデアルを根基イデアルという。素イデアルは根基イデアルである。
- R の積閉系 S について、R_S で $S^{-1}R$ を指す。また $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ での局所化を $R_\mathfrak{p}$ と書く。加群の局所化も同様。
- $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ について、$R_\mathfrak{p}$ の単純加群を $k(\mathfrak{p})$ と書く: $k(\mathfrak{p}) := R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$.

また圏を考えるときに次の言葉遣いをする。

(1) 圏の部分圏は常に充満部分圏で同型で閉じるとする。
(2) 加法圏の部分圏は常に有限直和で閉じるとする。
(3) 加法圏 $\mathcal{C}$ の対象 X に対して $\mathsf{add}\, X$ で、X の有限直和の直和因子からなる圏とする。
(4) 完全圏 $\mathcal{E}$ が**射影生成子 P を持つ**とは、P は $\mathcal{E}$ の射影対象であり、任意の対象 $X \in \mathcal{E}$ に対して、$\mathcal{E}$ の短完全列
$$0 \to \Omega X \to P_0 \to X \to 0$$
であり、$P_0 \in \mathsf{add}\, P$ であるようなものが存在するときをいう。
(5) 双対的に、完全圏 $\mathcal{E}$ が**移入余生成子 I を持つ**とは、I は $\mathcal{E}$ の移入対象であり、任意の対象 $X \in \mathcal{E}$ に対して、$\mathcal{E}$ の短完全列
$$0 \to X \to I^0 \to \Sigma X \to 0$$
であり、$I^0 \in \mathsf{add}\, I$ であるようなものが存在するときをいう。

1.2. **もうやりたくないようなイデアル論のこと.** まず、本稿の中でおそらく一番複雑で、一番元を取った煩雑な証明をする次の有名な補題を示しておく。これについては引用抜きに使う。

補題 1.1 (Prime Avoidance). R を可換環、$n \geq 2$ とし、$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_n$ を「$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ 以外は全て素イデアル」であるような R のイデアルの集まりとする（実用上、全て素イデアルとしてよい）。このとき R のイデアル I について次が同値:

(1) $I \subset \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$.
(2) ある $1 \leq i \leq n$ が存在し $I \subset \mathfrak{p}_i$.

証明. (2) $\Rightarrow$ (1): 明らか。

(1) $\Rightarrow$ (2): 対偶を示す :「任意の i について $I \not\subset \mathfrak{p}_i$ ならば、$I \not\subset \bigcup_i \mathfrak{p}_i$ である」を、n についての帰納法で示す。つまり I の元であって、どの $\mathfrak{p}_i$ にも入っていないものを作りたい

$n = 2$ の場合。$I \not\subset \mathfrak{p}_i$ が $i = 1, 2$ で成り立つので、$x_i \in I$ であって $x_i \notin \mathfrak{p}_i$ であるものが $i = 1, 2$ で取れる。後でも同じ論法するが、もし $x_1 \notin \mathfrak{p}_2$ であれば、x_1 は $\mathfrak{p}_1$ も $\mathfrak{p}_2$ も避けているので、そこで終わり。よって $x_1 \in \mathfrak{p}_2$ の場合だけ考えればよい。同様に $x_2 \in \mathfrak{p}_1$ としてよい。

このとき $x_1 + x_2$ を考える。もちろん $x_1 + x_2 \in I$ である。これが $\mathfrak{p}_1$ も $\mathfrak{p}_2$ も避けていることを示す。もしこれが $\mathfrak{p}_1$ に入っていたら、$x_2 \in \mathfrak{p}_1$ なことから $x_1 \in \mathfrak{p}_1$ が出てしまう。よって $x_1 + x_2 \notin \mathfrak{p}_1$ である。同様に $x_1 + x_2 \notin \mathfrak{p}_2$ より、主張がなりたつ（$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ は素イデアルである必要はない！）

$n > 2$ の場合。$\mathfrak{p}_n$ は素イデアルであることに注意。帰納法の仮定により（$n-1$ 個の場合を考えて）、$i = 1, 2, \cdots, n$ について、$x_i \in I$ であり、「x_i は $\mathfrak{p}_i$ 以外を全て避けている」ような元が取れる。

このとき、もしどこかの i について x_i がついでに $\mathfrak{p}_i$ も避けていたら、x_i は全ての $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ を避けているのでそこで終わり。よって、全ての i について $x_i \in \mathfrak{p}_i$ と仮定できる。

このとき、$x := x_n + x_1 x_2 \cdots x_{n-1}$ という元を考える、もちろん I の元である。これが全ての素イデアルを避けていることを示す。まず $i = 1, \cdots, n-1$ については、$x \in \mathfrak{p}_i$ としてしまうと、後ろの元 $x_1 \cdots x_{n-1} \in \mathfrak{p}_i$ に注意すれば、$x_n \in \mathfrak{p}_i$ となってしまい、x_n のとり方に違反する。よって、x は $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_{n-1}$ まで避けている。

x が $\mathfrak{p}_n$ も避けることを示せば終わりである。$x \in \mathfrak{p}_n$ と仮定する。そうすると $x_n \in \mathfrak{p}_n$ であったことから、$x_1 \cdots x_{n-1} \in \mathfrak{p}_n$ が出る。ここで「$\mathfrak{p}_n$ が素イデアルより」(これを初めて使う)、ある $1 \leq i < n$ について $x_i \in \mathfrak{p}_n$ になってしまう。これは x_i が $\mathfrak{p}_n$ を避けていることに違反する。よって x は $\mathfrak{p}_n$ にも属さない。 □

積閉系での局所化について。次は容易に確かめられる:

命題 1.2. R を可換環、S を R の積閉系、Λ を(可換と限らない)R 代数、M_Λ を右 Λ 加群とする。このとき Λ_S は R_S 代数の構造をもち、M_S は自然に Λ_S 加群とみなせる。

加群を局所化したところでの部分加群は、もとの加群を持ちいて記述できる。まず右 Λ 加群 M について、$\mathsf{L}_\Lambda(M)$ で Λ 部分加群のなす束をさしていたことを思い出そう。

定義 1.3. R を可換環、S をその積閉系、Λ を R 代数とする。このとき $M \in \mathsf{Mod}\,\Lambda$ の部分加群 N が *S-saturated* であるとは、$x \in M$ と $s \in S$ について $xs \in N$ ならば $x \in N$ となるときをいう。また M の S-saturated な部分加群からなる poset を $\mathsf{L}^S_\Lambda(M)$ と書くことにする。

この saturated な部分加群について次は簡単にわかる:

補題 1.4. R を可換環、S をその積閉系、Λ を R 代数、$M \in \mathsf{Mod}\,\Lambda$ とすると次が成り立つ:

(1) $\mathsf{L}_\Lambda(M)$ のなかで $\mathsf{L}^S_\Lambda(M)$ は(無限個の)共通部分をとる操作で閉じている。よって poset $\mathsf{L}^S_\Lambda(M)$ は(無限個の)meet を持つ。しかし和で閉じているとは限らない。
(2) 任意の $L \in \mathsf{L}_\Lambda(M)$ に対して、L を含む S-saturated 部分加群のなかで最小なものが一意的に存在し、これを $\overline{L}$ と書き、L の saturation と呼ぶ。
(3) S-saturated な部分加群の族 $L_i (i \in I)$ に対して、$\mathsf{L}^S_\Lambda(M)$ での join が存在し、それは $\overline{\sum_{i \in I} L_i}$ で与えられる。とくに $\mathsf{L}^S_\Lambda(M)$ はこの join と通常の meet で完備束になる。

証明. (1) saturated の定義に戻ってやればできる。

(2) Explicit に、$\overline{L} := \{x \in M \mid \exists s \in S \text{ s.t. } xs \in L\}$ とすれば条件を満たすことがすぐわかる。

(3) (2) からすぐに従う。 □

実はこの saturation の操作は、局所化したところでの部分加群を考える操作に対応する。

命題 1.5. R を可換環、S をその積閉系、Λ を R 代数、$M \in \mathsf{Mod}\,\Lambda$ とする。このとき、局所化 $\varphi \colon M \to M_S$ を考えると、次の共変ガロア接続がある。

$$\mathsf{L}_{\Lambda_S}(M_S) \rightleftarrows \mathsf{L}_\Lambda(M)$$

$$N \longmapsto \varphi^{-1}(N),$$

$$L_S = \varphi(L) \cdot \Lambda_S \longleftarrow\!\shortmid L$$

これについて次が成り立つ:

(1) 左から N とって右へいって左に戻ると N のままである。
(2) 右から L を取り出して左へ行って右へ戻ると、L の S での saturation $\overline{L}$ が出てくる。
(3) とくに、この写像たちは束の同型 $\mathsf{L}_{\Lambda_S}(M_S) \cong \mathsf{L}^S_\Lambda(M)$ を誘導する。

証明. 明らかに上の 2 つは順序を保つ写像である。また $L_S = \varphi(L) \cdot \Lambda_S$ はすぐに確認できる。よって (1) と (2) が分かれば、($L \leq \overline{L}$ より) これらの写像がガロア接続であることが従い、(3) は (1) と (2) から従う。

(1) M_S の Λ_S 部分加群 N をとると、$\varphi\varphi^{-1}(N) \subset N$ より、$\varphi\varphi^{-1}(N) \cdot \Lambda_S \subset N$ である。

逆に N から元をとると、x/s with $x \in M, s \in S$ という格好をしている。よって $x/1 = x/s \cdot s/1 \in N$ であるので、$x \in \varphi^{-1}(N)$ が分かる。よって $x/s = x/1 \cdot 1/s \in \varphi\varphi^{-1}(N) \cdot \Lambda_S$ である。

(2) $\overline{L} = \varphi^{-1}(\varphi(L) \cdot \Lambda_S)$ を示す。

($\subset$) $x \in \overline{L}$ を取る。このときある $s \in S$ が存在して $xs \in L$ である。よって、$\varphi(x) = x/1 = xs/1 \cdot 1/s \in \varphi(L) \cdot \Lambda_S$ が成り立つ。

($\supset$) $x \in \varphi^{-1}(\varphi(L) \cdot \Lambda_S)$ とする。つまり $\varphi(x) \in \varphi(L) \cdot \Lambda_S$ である。つまりある $y \in L$ と $s \in S$ が存在し $x/1 = y/s$ となることがすぐ分かる。よってある $t \in S$ により $xst = yt$ となる。よって $x \cdot st \in L$ であり、$x \in \overline{L}$ である。 □

命題 1.6. R を可換環、S をその積閉系とする。このとき先程のことから、R_S のイデアルは S-saturated な R のイデアルと一対一対応するが、このもとで R_S の素イデアルは、R の素イデアルのうち S と交わらないものに対応する。つまり局所化 $\varphi\colon R \to R_S$ について、$\varphi^{-1}\colon \operatorname{Spec} R_S \to \operatorname{Spec} R$ は単射であり、その像は $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{p} \cap S = \varnothing\}$ となる（これは中への同相になってる）。

証明. 先程のことより、$\varphi^{-1}\colon \operatorname{Spec} R_S \to \operatorname{Spec} R$ は単射である。よってその像が、S と交わらない R の素イデアルの集合と一致することを示す。

$P \in \operatorname{Spec} R_S$ をとってきて、$\varphi^{-1}(P)$ を考えると、一般論よりこれは R の素イデアルである。もし $\varphi^{-1}(P)$ が S と交われば、その元を φ で送れば P が可逆元を含むことになり、$P = R_S$ となり矛盾。よって $\varphi^{-1}(P)$ は S と交わらない。

次に $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ を、S と交わらない $\mathfrak{p}$ の素イデアルとする。このとき $\mathfrak{p}$ は S-saturated である。なぜなら、$xs \in \mathfrak{p}$ が $x \in R$ と $s \notin \mathfrak{p}$ について成り立てば、$s \notin \mathfrak{p}$ なことと $\mathfrak{p}$ が prime なことより $x \in \mathfrak{p}$ が従うので。この $\mathfrak{p}$ について、$\varphi(\mathfrak{p}) \cdot R_S$ が R_S の素イデアルであればよい。$x/s \cdot y/t \in \varphi(\mathfrak{p}) \cdot R_S$ とする。すると $xy/st = a/u$ なる $a \in \mathfrak{p}$ と $u \in S$ がある。よってある $v \in S$ があり、$xy \cdot uv = a \cdot stv$ in R となる。よって $xy \cdot uv \in \mathfrak{p}$ となるが、$uv \in S$ であり $\mathfrak{p}$ は S-saturated だったことより $xy \in \mathfrak{p}$ となる。よって $x \in \mathfrak{p}$ または $y \in \mathfrak{p}$ となり、$x/s \in \varphi(\mathfrak{p}) \cdot R_S$ または $y/t \in \varphi(\mathfrak{p}) \cdot R_S$ となる。つまり $\varphi(\mathfrak{p}) \cdot R_S$ は R_S の素イデアルである。 □

イデアルの冪零根基について。いわゆる Nullstelensatz のアフィンスキーム版。

命題 1.7. R を可換環とする。次にように写像を定める。

$$\{R\text{ のイデアル }\} \underset{I(-)}{\overset{V(-)}{\rightleftarrows}} \{\operatorname{Spec} R\text{ の部分集合 }\}$$
$$I \longmapsto V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid I \subset \mathfrak{p}\},$$
$$I(X) := \textstyle\bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p} \longleftarrow\!\!\!\!\shortmid\ X$$

このとき次が成り立つ:

(1) 2 つの写像は順序を反転させ、反変ガロア接続である。
(2) $I(V(I)) = \sqrt{I}$ である。
(3) この対応で、R の根基イデアルと $\operatorname{Spec} R$ の Zariski 閉集合が一対一に対応する。

証明. (1) はすぐ分かる。(3) は (1) と (2) の帰結。

(2) I で初めから割っておいて、$\bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R} \mathfrak{p} = \sqrt{(0)}$ を示せば十分である。

($\subset$) x を左からとる。$x \notin \sqrt{(0)}$ とする。このとき $S := \{1, x, x^2, \cdots\}$ は R の積閉系であり 0 を含まない。よって $R_S \neq 0$ であり $\operatorname{Spec} R_S \neq \varnothing$ である。

$$\varnothing \neq \operatorname{Spec} R_S \xrightarrow{\simeq} \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{p} \cap S = \varnothing\} \subset \operatorname{Spec} R$$

を見ると、ある $\mathfrak{p}$ と S が交わらないような $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ がとれる。これは $x \in \mathfrak{p}$ に矛盾する。

($\supset$) こちらはすぐ。$x \in \sqrt{(0)}$ とすると、つまりある n に対して $x^n = 0$ である。任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ に対して、もちろん $x^n = 0 \in \mathfrak{p}$ であるので、$\mathfrak{p}$ が素イデアルなことから $x \in \mathfrak{p}$ となる。 □

Part 1. 可換環メイン

ここには可換環における主要な命題を示す。が、非可換の一般性で成り立つものはできるだけ非可換でやるので、非可換アレルギーのかたはごめんなさい。

2. 加群の SUPPORT

命題 2.1. R を可換環としたとき次が成り立つ。

(1) $M \in \mathsf{Mod}\, R$ について、$\operatorname{Supp} M$ は上向きで閉じている、つまり $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ かつ $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ なら $\mathfrak{q} \in \operatorname{Supp} M$ である。
(2) $\mathsf{Mod}\, R$ での短完全列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ があったとき、$\operatorname{Supp} M = \operatorname{Supp} L \cup \operatorname{Supp} N$ が成り立つ。
(3) $\operatorname{Supp}(\bigoplus_i M_i) = \bigcup_i \operatorname{Supp} M_i$.
(4) R のイデアル I について $\operatorname{Supp}_R(R/I) = V(I)$
(5) $M \in \mathsf{Mod}\, R$ とすると、$\operatorname{Supp} M \subset V(\operatorname{Ann}_R M)$ が成り立ち、M が有限生成なら $\operatorname{Supp} M = V(\operatorname{Ann}_R M)$ となる。
(6) $M \in \mathsf{Mod}\, R$ について、$M = 0$ と $\operatorname{Supp} M = \varnothing$ と $\operatorname{Supp} M \cap \operatorname{Max} R = \varnothing$ は同値。
(7) $0 \neq M \in \mathsf{Mod}\, R$ について次が成り立つ。

$$\dim M = \sup\{\dim M_{\mathfrak{m}} \mid \mathfrak{m} \in \operatorname{Supp} M\}$$

証明. (1) この状況のとき、$(M_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{q}}} = M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ より明らか。

(2) 局所化が完全より明らか。

(3) 局所化が無限直和と可換より明らか。

(4) $(R/I)_{\mathfrak{p}} = 0 \Leftrightarrow$ ある $x \notin \mathfrak{p}$ が存在して $\overline{1} \cdot x = 0$ in R/I $\Leftrightarrow$ ある $x \notin \mathfrak{p}$ が存在して $x \in I \Leftrightarrow I \not\subset \mathfrak{p}$.

(5) $I := \operatorname{Ann}_R M$ とする。$M \in \mathsf{Mod}\, R$ に対して、$\bigoplus R \twoheadrightarrow M$ という全射がとれ、I の元は消えることから、これは全射 $\bigoplus(R/I) \twoheadrightarrow M$ となる。よって (2)(3)(4) から $\operatorname{Supp} M \subset V(I)$.

次に M を有限生成だと仮定する。このとき、生成元に打つことで写像 $R \to M^n$ なる写像があるが、これの核は、その生成元を消すもの、つまり I に一致。よって単射 $R/I \hookrightarrow M^n$ という写像があり、よって (2)(3)(4) より $V(I) \subset \operatorname{Supp} M$. ($M$ が無限生成だと、M の無限直積への写像になってしまい、(3) を使えない！)

(6) 任意の真のイデアルは必ず極大イデアルに含まれることから、$\operatorname{Supp} M = \varnothing$ と $\operatorname{Supp} M \cap \operatorname{Max} R = \varnothing$ は同値。また $M = 0$ としたら明らかに $\operatorname{Supp} M = \varnothing$.

よって、$M \neq 0$ のときに $\operatorname{Supp} M$ が極大イデアルを含むことを示せばよい。$M \neq 0$ とすると、ゼロでない有限生成部分加群 L を持つ。(2) により $\operatorname{Supp} L$ が極大イデアル含めば十分だが、(5) により $\operatorname{Supp} L = V(\operatorname{Ann} L)$ で、$L \neq 0$ により $\operatorname{Ann} L$ は R の真のイデアル。よって $V(\operatorname{Ann} L)$ は極大イデアルを含む。

(7) $\operatorname{Supp} M$ の chain は必ずある極大イデアルで終わるようにできるので明らか。 □

3. TORSION-FREE 周辺

Torsion-free やら torsion-less やら。まずは非可換ネーター環の一般性で torsion-less をやる。

定義 3.1. Λ をネーター環、$M \in \mathsf{Mod}\, \Lambda$ とする。このとき、自然な写像

$$\operatorname{ev}_{(-)} \colon M \to \operatorname{Hom}_\Lambda(\operatorname{Hom}_\Lambda(M, \Lambda), \Lambda)$$

について、

(1) これが単射なとき M を *torsion-less*
(2) 全単射（同型）なとき M を *reflexive*

と呼ぶ。

定義 3.2. ネーター環 Λ について、$\Omega(\mathsf{mod}\,\Lambda) = \mathsf{Sub}\,\Lambda$ という $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の部分圏を、

$$M \hookrightarrow \Lambda_\Lambda^n$$

という単射があるような $M \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ からなる圏とする（つまり自由加群の部分加群のなす圏）

命題 3.3. ネーター環 Λ 上の $M \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ について次は同値。

(1) M は torsion-less。
(2) $M \in \mathsf{Sub}\,\Lambda$。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): 一般に、有限生成左 Λ 加群 ${}_\Lambda Y$ に対して、全射 $\Lambda^n \twoheadrightarrow Y$ をとって $(-,\Lambda)$ で送れば、

$$0 \to (Y,\Lambda) \to (\Lambda^n,\Lambda) = \Lambda_\Lambda^n$$

という短完全列ができる。つまり (Y,Λ) は $\mathsf{Sub}\,\Lambda$ に入る。これに、今の場合 $Y := (M,\Lambda)$ としてやる（Y が有限生成なことは、同じように自由加群から M への全射をとり、それを $(-,\Lambda)$ で飛ばして、ネーター性より出る）。すると仮定より M は (Y,Λ) の sub なので、$\mathsf{Sub}\,\Lambda$ に入る。

(2) $\Rightarrow$ (1): 仮定より $f = {}^t[f_1,\cdots,f_n] \colon M \hookrightarrow \Lambda^n$ という単射がある。$\mathrm{ev}_x \colon (M,\Lambda) \to \Lambda$ がゼロ射なときに $x = 0$ を示す。

今 $\mathrm{ev}_x = 0$ なのでどの i についても $f_i(x) = \mathrm{ev}_x(f_i) = 0$、よって $f(x) = 0$ が従う。よって f が単射より $x = 0$。 □

可換環のときは、これと torsion-free や socle との関連を見る。

定義 3.4. R を可換環、$M \in \mathsf{Mod}\,R$ とする。このとき M が *torsion-free* であるとは、$\mathrm{reg}\,R \subset \mathrm{reg}\,M$ なとき、つまり R の非零因子が M の非零因子であるとき、つまり「R の非零因子 r について r 倍写像 $M \to M$ が単射」な成り立つときをいう。正反対に、M の任意の元がある $\mathrm{reg}\,R$ の元で消えるとき、M を *torsion* 加群であるという。

定義から R 自身は必ず torsion-free に注意。また無限生成も許しているのは後で使うように、R の全商環（一般にほぼ無限生成）は必ず R 加群とみて torsion-free がわかり、これを許したいので無限生成も許した。

命題 3.5. 可換環 R と $\mathsf{Mod}\,R$ での短完全列

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

について次が成り立つ:

(1) M が torsion-free なら L も torsion-free.
(2) M が torsion なら L と N は torsion。
(3) L と N が torsion (resp. torsion-free) なら M も torsion (resp. torsion-free).

証明. (1) と (2) はすぐ。

(3) torsion-free について。L と N を torsion-free とし、$r \in \mathrm{reg}\,R$ をとる。このとき r 倍写像 $(-)\cdot r \colon M \to M$ が単射ならよい。次の図式を見る:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, hook, "r"] & M \arrow[r] \arrow[d, "r"] & N \arrow[r] \arrow[d, hook, "r"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ここで縦は r 倍写像。いま L と N が torsion-free より左と右は単射。よって真ん中も単射なので、M は torsion-free。

次に torsion について。やればできるが、M の任意の元 x を取る。これを $N = M/L$ に送ると、N が torsion よりある $r \in \mathrm{reg}\,R$ について $\overline{x}r = 0$ in M/L、つまり $xr \in L$。次に L が torsion なことから、ある $s \in \mathrm{reg}\,R$ について $xrs = 0$。ここで $rs \in \mathrm{reg}\,R$ なことから、M は torsion である。 □

また、torsion の（無限）直和は torsion であり、torsion-free の（無限）直和や直積も torsion-free になっていることがすぐ分かる。ただし torsion の無限直積は torsion とは限らないのが簡単に例作れる。

torsion と torsion-free との関係は次が基本的。

命題 3.6. 可換環 R と $M \in \mathsf{Mod}\, R$ について次は同値:

(1) M は torsion-free.
(2) T を任意の torsion 加群としたとき $\mathrm{Hom}_R(T, M) = 0$ となる。

証明. (1) ⇒ (2): $f \colon T \to M$ という射をとり、$x \in T$ をとる。するとある $r \in \mathrm{reg}\, R$ があり $xr = 0$ となる。よって $f(x)r = f(xr) = 0$ となる。ここで M が torsion-free より $f(x) = 0$ となる。

(2) ⇒ (1): $x \in M$ と $r \in \mathrm{reg}\, R$ について $xr = 0$ とする。このとき x を左からかける $R/(r) \to M$ という射が well-defined だが、$R/(r)$ の任意の元は r で死ぬので $R/(r)$ は torsion 加群。よって $x = 0$ が従う。 □

命題 3.7. R を可換環、$M \in \mathsf{Mod}\, R$ とすると、次のような $\mathsf{Mod}\, R$ での完全列

$$0 \to tM \to M \to fM \to 0$$

であり、tM が torsion であり、fM は torsion-free であるようなものが一意的に存在する。つまり $\mathsf{Mod}\, R$ において torsion 加群の圏と torsion-free 加群の圏が torsion pair になっている。

証明. 書いてあるとおり、$tM := \{x \in M \mid \exists r \in \mathrm{reg}\, R \text{ s.t. } xr = 0\}$ とする。このとき fM が torsion-free であることが、命題 3.6 と 3.5 を使って、いつものように分かる。 □

ここで torsion と torsion-free との一般論から離れて、torsion-less と torsion-free との関係をみていく。

命題 3.8. R を可換ネーター環、$M \in \mathsf{Mod}\, R$ としたとき、M が torsion-less ならば M は torsion-free である。

証明. $M \in \mathsf{mod}\, R$ なら証明は楽。なぜなら、命題 3.3 により M は R の有限直和の部分加群。よって命題 3.5 により M も torsion-free。

一応直接の証明をつける。$M \to ((M, R), R)$ が単射なときに、M が torsion-free を示す。そのため、$xr = 0, r \in \mathrm{reg}\, R$ とする。$x = 0$ がみたい。任意に射 $f \colon M \to R$ をとると、

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & R \\ \downarrow{\scriptstyle r} & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ M & \xrightarrow{f} & R \end{array}$$

という可換図式において、左上に x をいれて chase することで、$f(x) = 0$ がすぐ出る。よって、$\mathrm{ev}_x = 0 \in ((M, R), R)$ となる。M が torsion-less だったことから、$x = 0$ となる。よって M は torsion-free。 □

R が整域の場合に、有限生成加群の torsion-free と torsion-less の同値性をしめす。そのため、局所化つかった次の言い換えを見る:

命題 3.9. R を可換環、$Q = Q(R)$ をその全商環 ($= \mathrm{reg}\, R$ での R の局所化)、$M \in \mathsf{Mod}\, R$ としたとき、次は同値。

(1) M は torsion-free。
(2) 局所化の写像 $M \to M \otimes_R Q$ は単射。
(3) M は、ある Q 加群 X の R 部分加群になる（Q 加群は R 加群とも見れることに注意）。

またこの X は、M が有限生成なら、X_Q が有限生成 Q 加群であるように取れる。とくに R が整域のとき、K を R の商体とすると、次は同値。

(1) M は torsion-free。

(2) 局所化 $M \to M \otimes_R K$ は単射。
(3) M はある K ベクトル空間 X の部分 R 加群になっている。

またこの X は、M が有限生成加群なら、X は有限次元 K ベクトル空間に取れる。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): $M \to M \otimes_R Q$ で x がゼロに行くとすると、局所化の話より $x/1 = 0$ が成り立つ、つまりある $s \in \operatorname{reg} R$ について $xs = 0$ となる。よって M が torsion-free より $x = 0$。((2) から (1) も同様にすぐ出る)。

(2) $\Rightarrow$ (3): $X := M \otimes_R R$ ととればよい。

(3) $\Rightarrow$ (1): 一般に、Q 加群 X を R 加群とみると torsion-free である。なぜなら $xr = 0$ で $r \in \operatorname{reg} R$ なら、r^{-1} を Q 加群とみて掛ければ、$x = 0$ が X でなりたつので。

いま M は Q 加群 X の R 部分加群で、X 自身は上より torsion-free。よってその sub より M も torsion-free。 □

これを用いて、次の特徴付けができる:

定理 3.10. R を可換ネーター整域、K をその商体、$M \in \operatorname{\mathsf{mod}} R$ としたとき次は同値。

(1) M は torsion-less ($\Leftrightarrow M \in \operatorname{\mathsf{Sub}} \Lambda$)。
(2) X は torsion-free ($\Leftrightarrow$ M はある K ベクトル空間の部分 R 加群 $\Leftrightarrow$ 局所化 $M \to M \otimes_R K$ が単射)。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): 命題 3.8。

(2) $\Rightarrow$ (1): これは非自明だし、有限生成を外すと嘘（K は torsion-free だが自由加群には埋め込めない、はず)。

命題 3.9 を使うと、ある $n \geq 0$ について $M \leq K^n$ とみなせる（M は K^n の R 部分加群)。このとき、M の元は、K^n として見ると、$x = [x_1/r, x_2/r, \cdots, x_n/r] \in M \subset K^n$ と $x_i \in R, r \neq 0$ を用いてかける。M が有限生成であるので R 加群としての生成系 $m_1, \cdots, m_l$ がとれるが、K^n の元とみて、その分母として出てくるものを全部かけると、結局ある $r \in \operatorname{reg} R$ があって $m_i r \in R$ がすべての i について成り立つようできる（つまり生成系の分母を全部とっぱらえる)。有限生成を使ったことに注意。よって $Mr \leq R^n$ であり、このことから、

$$M \xhookrightarrow{(-)\cdot r} Mr \leq R^n$$

という単射の列ができる（最初が単射なとこに M が torsion-free を使った)。よって $M \in \operatorname{\mathsf{Sub}} R$。

(別証) こっちのほうが元を取らずにすんで簡単だった。局所化して議論する。

示したいこと：$M \to \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(M, R), R)$ が単射。この射を局所化すると、

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[d, hook] & \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(M,R),R) \arrow[d] \\
M \otimes_R K \arrow[r] \arrow[d, equal] & \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(M,R),R)) \otimes_R K \arrow[d, "\cong"] \\
M \otimes_R K \arrow[r, "\cong"] & \operatorname{Hom}_K(\operatorname{Hom}_K(M \otimes_R K, K), K)
\end{tikzcd}$$

ここで M が torsion-free より左の縦は単射、右の下の同型は補題 3.11 の $\Lambda = R$ の場合から。また一番下は、自然な写像に一致しているので、**任意の有限次元 K ベクトル空間は K 上で reflexive** なことから、同型。よって chase して一番上の写像が単射が従う。この議論は、Q が 0 次元 Gorenstein 環で work し、「torsion-less と torsion-free が同値」は逆にそういうふうに特徴づけられるらしい (Vasconcelos) □

補題 3.11. R を可換ネーター環、S をその積閉集合、$M, N \in \operatorname{\mathsf{Mod}} R$ で M を有限生成とすると、自然な同型

$$\operatorname{Ext}^i_R(M, N) \otimes_R R_S \cong \operatorname{Ext}^i_{R_S}(M \otimes_R R_S, N \otimes_R R_S)$$

が全ての $i \geq 0$ についてある。

証明. 命題 17.9 を見よ。 □

あとで使いそうなので結局 Vasconcelos の設定でやる。証明ではいろいろなことを fact として使うので、ひまなときに追加してく。

命題 3.12 ([Va]). R を可換ネーター環で generically Gorenstein とし、また embedded prime がない（$\operatorname{Ass} R = \operatorname{Min} R$）とする。このとき、$M \in \operatorname{mod} R$ について次は同値:

(1) M は torsion-free.
(2) M は torsion-less.

証明. (1) ⇒ (2) のみ示せばよい。
関手的にやる。

$$0 \to L \to M \xrightarrow{\mathrm{ev}} ((M,R),R)$$

という完全列とる（ev の核を L）。$L = 0$ を示すため、$\operatorname{Supp} L = \varnothing$ をみる。
まず局所化は完全なのと、Hom との可換性とかから、$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ について

$$0 \to L_{\mathfrak{p}} \to M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\mathrm{ev}} \operatorname{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{p}}))$$

が完全。いま R が generically Gorenstein より、どの minimal prime $\mathfrak{p}$ で局所化しても、$R_{\mathfrak{p}}$ はアルティン Gorenstein 環。よって任意の有限生成 $R_{\mathfrak{p}}$ 加群は reflexive より（ここそのうち補足）、$L_{\mathfrak{p}} = 0$ となる。
上の議論で、$\operatorname{Min} R \cap \operatorname{Supp} L = \varnothing$ が分かる。また R は embedded prime がないので $\operatorname{Min} R = \operatorname{Ass} R$、つまり $\operatorname{Ass} R \cap \operatorname{Supp} L = \varnothing$ となる。また L は有限生成より、$\operatorname{Supp} L = V(\operatorname{Ann} L)$。なのでまとめると、どの $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} R$ についても $\operatorname{Ann} L \not\subset \mathfrak{p}$ となる。ここで prime avoidance 使えば、$\operatorname{Ann} L \not\subset \bigcup \operatorname{Ass} R$ となる。よってある $x \in \operatorname{Ann} L$ があり、$x \notin \bigcup \operatorname{Ass} R$ となる。
よって命題 4.14 より $x \in R \setminus \bigcup \operatorname{Ass} R = \operatorname{reg} R$、つまり x は R-regular である。ここで $x \in \operatorname{Ann} L$ を思い出すと、$Lx = 0$ となる。いま M は torsion-free より L もそう。なので $L = 0$ が従う。 □

次に socle との関係性。

定義 3.13. 環 Λ と $M \in \operatorname{Mod} \Lambda$ について、$\operatorname{soc} M_\Lambda$ を、M の単純部分加群の和とする。これは次ともかける:

$$\operatorname{soc} M = \sum \{\operatorname{Im} f \mid f \colon S \to M, S \text{ は単純加群 }\}$$

補題 3.14. （非可換）環 Λ 上の加群 $M \in \operatorname{Mod} \Lambda$ について次は同値:

(1) $\operatorname{soc} M_\Lambda = 0$.
(2) $\operatorname{Hom}_\Lambda(\operatorname{fl} \Lambda, M) = 0$.

証明. (2) ⇒ (1):明らか
(1) ⇒ (2): Hom の消滅は拡大で閉じる。よって、(1) から「単純加群から M への射はゼロしかない」ので、拡大していって、任意の長さ有限加群から M への射はゼロしかないことがわかる。 □

（非可換）ネーター環 Λ 上の有限生成加群は、長さ有限加群と socle ゼロ加群との拡大で unique にかける:

命題 3.15. Λ をネーター環、$M \in \operatorname{mod} \Lambda$ とすると、次のような完全列

$$0 \longrightarrow TM \longrightarrow M \longrightarrow FM \longrightarrow 0$$

であって $TM \in \operatorname{fl} \Lambda$ かつ $\operatorname{soc}(FM) = 0$ となるものが存在し、一意的である。このことから、$(\operatorname{fl} \Lambda, \{\operatorname{soc} = 0\})$ という 2 つの部分圏は $\operatorname{mod} \Lambda$ の torsion pair である。

証明. $TM := \sum \{L \mid L \leq M \text{ であり長さ有限 }\}$ と定める。これは無限和だが、Λ がネーター、M が有限生成なことよりネーター、よって TM は有限生成となるので、この和は有限和。しかし長さ有限な加群の有限和は、長さ有限加群の直和から全射を持つので、長さ有限。よって TM 自身が長さ有限加群となる。

これは、構成からどんな $X \in \mathsf{fl}\,\Lambda$ からの $X \to M$ もかならず包含 $TM \hookrightarrow M$ を経由する。このことを使うと、標準的な議論から、FM の socle はゼロであることが分かる（FM への simple からの射をとってそれを pullback して短完全列つくって真ん中もながさ有限よりうんぬん）。一意性も、TM はこう取らなきゃいけないことがすぐ分かる。 □

以下、この「socle=0」と torsion-free や torsion-less との関係を見ていきたい。環 R 自身は常に torsion-less や torsion-free なので、「torsion-free なら socle=0」が言えるような環はもともと socle 0 である。socle 0 をいちいちいうのが長いので、次を使う:

定義 3.16. 可換ネーター環 R が *0-socle* であるとは、$\operatorname{soc} R_R = 0$ なときをいう。

R が局所環、より弱く半局所環なら、socle の記述より、R が 0-socle なことと $\operatorname{Hom}_R(R/\mathcal{J}, R) = 0$ と同値である。depth を知っている人なら、0-socle な局所環は depth が 1 以上な環、と言い換えてもいい。

まず 0-socle は部分加群で閉じるので、「R が 0-socle で M が有限生成 torsion-less な R 加群ならば $\operatorname{soc} M = 0$」は出る（命題 3.3 なことから $M \in \mathsf{Sub}\,R$ により）。実用上はこれで十分かもしれないが、より強く、無限生成も含めて、torsion-less でやりたい。証明書いたら depth とか associated prime が必要になったので、とりあえず使ってやる。

まず簡単な lemma から。可換環では $R/\mathfrak{p}$ という形の加群がよく出るが、これの regular element は簡単にかける。

補題 3.17. 可換ネーター環 R と $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ に対して、

$$\operatorname{reg} R/\mathfrak{p} = R \setminus \mathfrak{p}$$

証明. $r \in R$ について、もし $r \in \mathfrak{p}$ なら、r 倍写像 $R/\mathfrak{p} \to R/\mathfrak{p}$ はゼロ写像より、単射でない ($R/\mathfrak{p} \neq 0$ だから)。よって $\operatorname{reg} R/\mathfrak{p} \subset R \setminus \mathfrak{p}$。

逆に、$r \in R \setminus \mathfrak{p}$ とする。r 倍写像 $R/\mathfrak{p} \to R/\mathfrak{p}$ で $\overline{a}$ が $\overline{0}$ になったとすると、$ar \in \mathfrak{p}$ となり、$r \notin \mathfrak{p}$ より、$\mathfrak{p}$ が素イデアルなことから $a \in \mathfrak{p}$ つまり $\overline{a} = 0$。よって $r \in \operatorname{reg} R/\mathfrak{p}$。

あるいはもっと簡単に、$R/\mathfrak{p}$ は整域なので、零因子は 0 のみ、とか考えてもいい。 □

命題 3.18. 可換ネーター環 R と $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ に対して、次は同値:

(1) ある $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} R$ が存在し $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$。
(2) $R/\mathfrak{p}$ が R 加群として torsion-free。

とくに、$\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ について、$R/\mathfrak{m}$ が torsion-free なことと、$\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} R$ なことつまり $\operatorname{soc} R \neq 0$ なことは同値。

証明. $R/\mathfrak{p}$ が torsion-free なことは、定義から $\operatorname{reg} R \subset \operatorname{reg} R/\mathfrak{p}$ と同値。補題 3.17 より、$\operatorname{reg} R \subset R \setminus \mathfrak{p}$、つまり (1) は $\mathfrak{p} \subset R \setminus \operatorname{reg} R$。ここで命題 4.14 より、$R \setminus \operatorname{reg} R = \bigcup \operatorname{Ass} R$。つまり (1) は $\mathfrak{p} \subset \bigcup \operatorname{Ass} R$ と同値。ここで、$\operatorname{Ass} R$ は有限集合より、prime avoidance を使えば、これは「ある $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} R$ が存在し $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ が成り立つ」、つまり (2) と同値。 □

命題 3.19. R を 0-socle な可換ネーター環とする。このとき $M \in \mathsf{Mod}\,R$ が torsion-free ならば $\operatorname{soc} M = 0$ となる。

証明. $\operatorname{soc} M \neq 0$ とする。このとき、M の socle にいる単純加群取り出せば、つまりある $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ について、$R/\mathfrak{m} \hookrightarrow M$ という単射がある。一般に torsion-free は部分加群で閉じるので、$R/\mathfrak{m}$ が torsion-free。よって命題 3.18 により $\operatorname{soc} R \neq 0$ で矛盾。 □

つぎに、「$\operatorname{soc} M = 0$ なら M は torsion-free」が言えるのはいつかを考えたい。しかし例えば $R = k[[x, y]]$ 上の $R/(x)$ を考えると、socle は 0 だが明らかに torsion-free でない。なので 1 次元の仮定がいる。これは実質 1 次元 CM 環についての話になる。

命題 3.20. R を可換 1 次元ネーター環とする。このとき $M \in \mathsf{mod}\,R$ が $\operatorname{soc} M = 0$ ならば M は torsion-free である。つまり $\operatorname{soc} M = 0$ と torsion-free は同値である。

証明. M が torsion-free でないとして $\operatorname{soc} M \neq 0$ を示す。torsion-free でないので、ある $0 \neq x \in M$ と $r \in \operatorname{reg} R$ が存在して $xr = 0$ である。ここで $L := xR \leq M$ という部分加群を考える。仮定より $Lr = 0$ であるから、L は $R/(r)$ 加群である。

ここでそのうちやることから、$r \in \operatorname{reg} R$ より $\dim R/(r) = \dim R - 1 = 0$。よってそのうちやることから $R/(r)$ はアルティン環、特に L は長さ有限加群である。ゼロでない長さ有限加群は socle を持つので、L も socle をもち、$\operatorname{soc} M \neq 0$ となる。 □

系 3.21. R を 1 次元 Cohen-Macaulay 環とする。このとき $M \in \mathsf{mod}\, R$ について、M が MCM 加群であることと torsion-free であることは同値である。

次に、実用上の 0-socle の十分条件をかいとく。ちなみに 0 次元なら必ず任意の有限生成加群は長さ有限より socle をもつ。

命題 3.22. 次の環は 0-socle である:

(1) 1 次元以上の可換局所ネーター環 $(R, \mathfrak{m})$ で reduced なもの。.
(2) 体でない可換ネーター整域 R.

証明. (1) $\operatorname{soc} R \neq 0$ とする。つまりある $0 \neq x \in R$ が存在して $x\mathfrak{m} = 0$ となる。ここでもし $x \notin \mathfrak{m}$ なら、R は local より x は可逆元。よって $\mathfrak{m} = 0$ となり、$\dim R = 0$ となってしまう。なので $x \in \mathfrak{m}$ であり、とくに $x^2 \in x\mathfrak{m} = 0$。よって R は reduced でなくなってしまう。

(2) $\operatorname{soc} R \neq 0$ とする。つまりある $0 \neq x \in R$ と $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ が存在して $x\mathfrak{m} = 0$ である。ここで R は体でないので $\mathfrak{m} \neq 0$ であり、$0 \neq y \in \mathfrak{m}$ が取れる。すると $xy = 0$ であり、R が整域に矛盾する。 □

命題 3.23. 可換ネーター整域 R について、$\dim R \geq 1$ なら $\operatorname{soc} R = 0$ である。

いままでのまとめ。可換ネーター環 R と $M \in \mathsf{Mod}\, R$ について次の関係が成り立つ。

$$M \in \mathsf{Sub}\, R \underset{M:\ \text{f.g.}}{\rightleftarrows} M\text{:torsion-less} \underset{\substack{R\text{:gen. Gor,}\\ \operatorname{Min} R = \operatorname{Ass} R,\\ M\text{:f.g.}}}{\rightleftarrows} M\text{:torsion-free} \underset{\dim R = 1}{\overset{\operatorname{soc} R = 0}{\rightleftarrows}} \operatorname{soc} M_R = 0$$

さらに R が整域なら次のようになる:

$$M \in \mathsf{Sub}\, R \underset{M:\ \text{f.g.}}{\rightleftarrows} M\text{:torsion-less} \underset{M\text{:f.g.}}{\rightleftarrows} M\text{:torsion-free} \underset{\dim R = 1}{\overset{\dim R > 0}{\rightleftarrows}} \operatorname{soc} M_R = 0$$

これの高次元 ver やネーター代数版もそのうちやりたい。

4. Associated prime 周辺

定義 4.1. R を可換ネーター環、$M \in \mathsf{Mod}\, R$ とする（無限生成でもよい）。このとき $\operatorname{Ass} M$ という $\operatorname{Spec} R$ の部分集合を、

$$\operatorname{Ass} M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \text{ある単射 } R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M \text{ が存在する }\}$$

で定める。つまり $R/\mathfrak{p}$ が M に部分加群として入ってるような $\mathfrak{p}$ を全部とってきたもの。

この定義は、元を使うと、$\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ であることは、ある $x \in M$ が存在して $\operatorname{Ann}_R(x) = \mathfrak{p}$ となることと同じである。これを $\operatorname{Ass} M$ の定義に使ってる本が多い気がするが、こう書かれると全然わからないので、加群の埋め込みという方で統一してほしい。そうすると「$\operatorname{Ass} M$ は M の底のほうにいる素イデアル」みたいなイメージが湧く、とくに有限次元多元環やってるひとなら、socle にいる simple との類似である。あとで inj. hull 取るときもまったく同じ直感でうまくいく。

基本性質をいくつか。

命題 4.2. R を可換環、$M \in \mathsf{Mod}\, R$ とする。

(1) $\{\operatorname{Ann}_R(x) \mid x \in M, x \neq 0\}$ という R のイデアルの集合を考える。この集合の極大元は自動的に素イデアルになる。

(2) R がネーター環なら、$M \neq 0$ ならば $\operatorname{Ass} M \neq \varnothing$.
(3) $\operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Supp} M$

証明. (1) やるだけ。$\operatorname{Ann}_R(x)$ が上の集合のなかで極大だとして、$ab \in \operatorname{Ann}_R(x)$、$a \notin \operatorname{Ann}_R(x)$ とする。つまり $x \cdot ab = 0$ だが $x \cdot a \neq 0$ である。このとき $\operatorname{Ann}_R(xa)$ を考える。明らかに $\operatorname{Ann}_R(x) \subset \operatorname{Ann}_R(xa)$ であるので、極大性より $\operatorname{Ann}_R(x) = \operatorname{Ann}_R(xa)$ である。いま $b \in \operatorname{Ann}_R(xa)$ であるので、$b \in \operatorname{Ann}_R(x)$ である。よって $\operatorname{Ann}_R(x)$ は素イデアル。

(2) $M \neq 0$ なら、上の集合は空ではない。よって R がネーターより上のイデアルの集合に極大元がある。

(3) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} R$ なら埋め込み $R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$ があり、これを $\mathfrak{p}$ で局所化すれば $M_\mathfrak{p} \neq 0$ がすぐ従う。 □

準素分解とかのアレで用語だけ定義しておく:

定義 4.3. 可換ネーター環 R 上の加群 $M \in \mathsf{Mod}\, R$ が *coprimary* であるとは、$\operatorname{Ass} M$ がただ一つの元からなるときをいう。このとき、$\operatorname{Ass} M = \{\mathfrak{p}\}$ として、M を $\mathfrak{p}$-*coprimary* とも呼ぶ。

あとで詳しくやる。

命題 4.4. 可換ネーター環 R と $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ について、$R/\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}$-coprimary である、つまり $\operatorname{Ass}_R(R/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$ が成り立つ。

証明. 実は次が成り立つ: $R/\mathfrak{p}$ の任意の元 $0 \neq \overline{x} \in R/\mathfrak{p}$ について、$\operatorname{Ann}_R(\overline{x}) = \mathfrak{p}$ が成り立つ。これはほぼ素イデアルの定義なので、やればできる。ここからすぐ $\operatorname{Ass}(R/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$ が出る。 □

Prime filtration について。

命題 4.5. R を可換ネーター環、$M \in \mathsf{mod}\, R$ を有限生成加群とする。このとき、M の部分加群の列

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$$

が存在し、各商 M_i/M_{i-1} がある $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} R$ を用いて $R/\mathfrak{p}_i$ と同型であるようなものが取れる。つまり任意の有限生成 R 加群は、$R/\mathfrak{p}$ という形の加群を有限回拡大して得られる！これを prime filtration と呼ぶ。

証明. $M = 0$ ならおわり。$M \neq 0$ とすると、$\operatorname{Ass} M \neq \varnothing$ より $\mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Ass} M$ が取れる。つまり単射 $R/\mathfrak{p}_1 \hookrightarrow M$ がとれ、その像を M_1 とする。M/M_1 を考えると、これが 0 なら終わり。0 でないなら、、、と繰り返していく。この操作は、M の部分加群の真の上昇列を与えるので、M がネーター的よりどこかで必ず止まる。 □

加群の prime filtration がわかれば、support は分かる:

命題 4.6. 可換ネーター環 R と有限生成加群 M について、M の prime filtration を一つ固定し、そこに出てくる素イデアルを $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ とすると、$\operatorname{Supp} M = V(\mathfrak{p}_1) \cup \cdots \cup V(\mathfrak{p}_n)$ となる。

証明. 命題 2.1 よりすぐ。 □

次に短完全列についての振る舞い。

命題 4.7. 可換ネーター環 R と、$\mathsf{Mod}\, R$ での短完全列

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

について、次が成り立つ:

(1) $\operatorname{Ass} L \subset \operatorname{Ass} M$
(2) $\operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Ass} L \cup \operatorname{Ass} N$

証明. (1) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} L$ があれば、$R/\mathfrak{p} \hookrightarrow L \hookrightarrow M$ という単射の合成考えて $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ となる。

(2) こちらが非自明。$\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ とすると $R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$ がある。次の可換図式考える:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & R/\mathfrak{p} \arrow[r] \arrow[d, hook] & Z \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

まず $X \neq 0$ の場合。このとき、(1) から $\varnothing \neq \operatorname{Ass} X \subset \operatorname{Ass} R/\mathfrak{p} = \{\mathfrak{p}\}$ となる（命題 4.2 と命題 4.4）ので、$\operatorname{Ass} X = \{\mathfrak{p}\}$ である。よって左縦の単射から、$\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} L$ となる。次に $X = 0$ の場合、このときは $Z = R/\mathfrak{p}$ となるので、右縦の単射から $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} N$ となる。以上より $\operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Ass} L \cup \operatorname{Ass} N$ が言えた。 □

系 4.8. 可換ネーター環 R 上の有限生成加群 $M \in \operatorname{\mathsf{mod}} R$ について $\operatorname{Ass} M$ は有限集合。

証明. Prime filtration 命題 4.5 をとり、命題 4.4 と命題 4.7 より明らか。 □

局所化との関係について。すごい自然だが証明はちょいめんどい。

命題 4.9. 可換ネーター環 R と、$M \in \operatorname{\mathsf{Mod}} R$ と $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ を考える。自然な埋め込み $\operatorname{Spec} R_\mathfrak{p} \hookrightarrow \operatorname{Spec} R$ のもとで、$\operatorname{Ass}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$ の元は、ちょうど $\operatorname{Ass}_R M$ の元かつ $\operatorname{Spec} R_\mathfrak{p}$ の元と一致する、つまり下の点線の全単射がある:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ass}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \arrow[r, dashed, "\simeq"] \arrow[d, hook] & \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} M \mid \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \operatorname{Ass}_R M \arrow[d, hook] \\ \operatorname{Spec} R_\mathfrak{p} \arrow[r, "\simeq"] & \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\} \arrow[r, hook] & \operatorname{Spec} R \end{tikzcd}$$

証明. $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}_R M$ かつ $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ とする。よって埋め込み $R/\mathfrak{q} \hookrightarrow M$ がある。これを $\mathfrak{p}$ で局所化すると、$(R/\mathfrak{q})_\mathfrak{p} \hookrightarrow M_\mathfrak{p}$ ができるが、$(R/\mathfrak{q})_\mathfrak{p} \cong R_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{p}$ なことより、$\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$ が成り立つ。

逆がちょっと元をとらないといけない。$\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$ で $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ なるものに対して、$\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$ と仮定する。このとき $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} M$ を見たい。Annihilator を使った記述を考える。ある $x/s \in M_\mathfrak{p}$ が存在して、$\operatorname{Ann}_{R_\mathfrak{p}}(x/s) = \mathfrak{q}R_\mathfrak{p}$ となっている。ここで可逆元でひねっても Ann は変わらないので、$\operatorname{Ann}_{R_\mathfrak{p}}(x/1) = \mathfrak{q}R_\mathfrak{p}$ としてよい。

一番成り立てばうれしいのは、$\operatorname{Ann}_R(x) = \mathfrak{q}$ なこと。しかし一般には無理で、いろいろ取り替える。いま R がネーター環より $\mathfrak{q}$ の生成系 $q_1, \cdots, q_n$ が取れる。ここで $(x/1) \cdot (q_i/1) = 0$ in $M_\mathfrak{p}$ なことから、ある $s_1, \cdots, s_n$ で $s_i \notin \mathfrak{p}$ なものがとれて $x \cdot (s_i q_i) = 0$ in M となる。ここで x の代わりに $x' = xs_1 \cdots s_n$ を考えるとうまくいく、という仕組みである。

$\operatorname{Ann}_R(x') = \mathfrak{q}$ を示せばよい。まず $\mathfrak{q} \subset \operatorname{Ann}_R(x')$ は、先程の x' の構成からからすぐにでる。次に $x'a = 0$ が $a \in R$ について成り立つとする。これを $M_\mathfrak{p}$ にもっていくと、$(x'/1) \cdot (a/1) = 0$ が当たり前に成り立つ。ここで s_i たちは $M_\mathfrak{p}$ では可逆元だったことから、$(x/1) \cdot (a/1) = 0$ が従う。よって $a/1 \in \operatorname{Ann}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}R_\mathfrak{p}$ である。ここからは標準的な議論により（局所化と素イデアルの対応とか)、$a \in \mathfrak{q}$ であることがすぐに従う。 □

念の為、こわいのでイデアル商の場合も書いておく。

命題 4.10. 可換ネーター環 R とイデアル I を考え、$M \in \operatorname{\mathsf{Mod}} R/I$ とする。このとき M_R と見れるが、$\operatorname{Ass}_R M \subset V(I)$ である。また自然な埋め込み $\operatorname{Spec} R/I \hookrightarrow \operatorname{Spec} R$ のもとで、$\operatorname{Ass}_{R/I} M$ と $\operatorname{Ass}_R M$ は一致する。

証明. $\operatorname{Ass}_R M \subset V(I)$ だけ軽く。$\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M$ とすると、$R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$ がある。ここで $MI = 0$ より $R/\mathfrak{p}$ に I かけても死ぬ。よって $I \subset \mathfrak{p}$、つまり $\mathfrak{p} \in V(I)$ である。あとは落ち着けば当たり前。 □

Prime filtration は便利で、たとえば 0 次元と長さ有限性が同値なことが分かる（これは普通の可換環では多分別ルートでやる気がする)。あとで、Ass などを使っても同じことが成り立つことを見る（命題 4.23)。

命題 4.11. R を可換ネーター環、$0 \neq M$ を有限生成 R 加群とすると、次は同値:

(1) $\dim M = 0$.
(2) $\operatorname{Supp} M \subset \operatorname{Max} R$.
(3) $M \in \mathsf{fl}\, R$.

またこのとき、M の組成因子として現れる単純加群を $R/\mathfrak{m}_1, \cdots, R/\mathfrak{m}_n$ とすると、$\operatorname{Supp} M = \{\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_n\}$ となっている。

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2): 落ち着くと、$\dim M = 0$ なら、つまり $\operatorname{Supp} M$ のどの素イデアルにも包含関係がないことを示している。任意の素イデアルは必ず極大イデアルに含まれ、$\operatorname{Supp} M$ は上向きで閉じるので、$\dim M = 0$ なら、$\operatorname{Supp} M$ は極大イデアルのみからなっている。逆に、$\operatorname{Supp} M \subset \operatorname{Max} R$ なら明らかに $\dim M = 0$ である。

(2) $\Rightarrow$ (3): M の prime filtration を一つとり、出てくる素イデアルを $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ とする。命題 4.6 により $\operatorname{Supp} M = V(\mathfrak{p}_1) \cup \cdots \cup V(\mathfrak{p}_n)$ である。しかし (2) より $\operatorname{Supp} M \subset \operatorname{Max} R$ なことから、$\mathfrak{p}_i$ たちは全て極大イデアル。よって prime filtration は実は組成列を与えている。

(3) $\Rightarrow$ (2): M の組成列をとると、M は単純 R 加群を有限回拡大したもの。一方単純 R 加群は必ずある $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ を用いて $R/\mathfrak{m}$ と書ける。よって極大イデアル $\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_n$ が M の組成列に出てくるとする。このとき $\operatorname{Supp}_R R/\mathfrak{m}_i = V(\mathfrak{m}_i) = \{\mathfrak{m}_i\}$ に注意。よって命題 2.1 により、$\operatorname{Supp} M = \{\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_n\}$ となり、$\operatorname{Supp} M \subset \operatorname{Max} R$ となる。 □

系 4.12. 可換環 R について次は同値:

(1) R は 0 次元ネーター環。
(2) 任意の有限生成 R 加群は長さ有限。
(3) R はアルティン環。

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2): 命題 4.11 の (1) $\Leftrightarrow$ (3) よりすぐ従う。

(2) $\Rightarrow$ (3): R_R は有限生成 R 加群より長さ有限、よってアルティン加群。

(3) $\Rightarrow$ (2): 一般に右アルティン環は右ネーター環であり（そのうちやるかも）、よって任意の有限生成加群は長さ有限。 □

少しそれたが、Ass の性質に戻る。まず Ass は単射の存在で特徴づけられていたが、もっと簡単に Hom 集合で分かる:

補題 4.13. R を可換ネーター環とし、$M \in \mathsf{Mod}\, R$ と $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ をとる。このとき、次は同値:

(1) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$.
(2) $\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{p}, M)_\mathfrak{p} = \operatorname{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), M_\mathfrak{p}) \neq 0$。これはあとで導入する Bass 数使えば $\mu^0(\mathfrak{p}, M) \neq 0$ である。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): 何回かやった議論。$R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$ を局所化すれば単射 $k(\mathfrak{p}) \hookrightarrow M_\mathfrak{p}$ ができる。

(2) $\Rightarrow$ (1): これもやった。最初の等号は補題 3.11 だった。(2) より $M_\mathfrak{p}$ の中に $k(\mathfrak{p})$ が入っている（$k(\mathfrak{p})$ は単純 $R_\mathfrak{p}$ 加群より、そこからの non-zero 射は必ず単射に注意）。よって $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$ であり、命題 4.9 より $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ が従う。 □

次の性質は depth とか次元でめっちゃよく使う。

命題 4.14. R を可換ネーター環、$M \in \mathsf{Mod}\, R$ をとる。このとき、

$$R \setminus \operatorname{reg} M = \bigcup \operatorname{Ass} M$$

が成り立つ、つまり M の associated prime の集合論的 union は、ちょうど M の零因子全体である。

証明. まず $a \in \bigcup \operatorname{Ass} M$ とする。つまりある $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ について $a \in \mathfrak{p}$ である。ここで $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(x)$ となる $x \in M$ が取れるので、$xa = 0$ となる。よって $a \notin \operatorname{reg} M$.

逆に $a \notin \operatorname{reg} M$ とする。つまりある $0 \neq x \in M$ が存在して $xa = 0$ となる。このとき $\operatorname{Ann}_R(x)$ というイデアルは命題 4.2(1) で考えてたイデアルの集合の元。今 R がネーター環より、これを含む

ような、この集合での極大元が取れ、それを $\mathfrak{p}$ とすると、命題 4.2 より $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ である。よって $a \in \operatorname{Ann}_R(x) \subset \mathfrak{p}$ となる。 □

次に極小素イデアルと Ass との関係。

補題 4.15. R を可換ネーター環、$M \in \mathsf{Mod}\, R$ とする。このとき、任意の $\operatorname{Supp} M$ の元は必ずある $\operatorname{Ass} M$ の元を含む。

証明. $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ とすると $M_\mathfrak{p} \neq 0$ である。よって $\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$ が取れる。命題 4.9 を使うと、$\operatorname{Spec} R$ の中で考えて、$\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} M$ であり $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ である。 □

命題 4.16. R を可換ネーター環とし、$M \in \mathsf{Mod}\, R$ とする。このとき次の集合は一致する:

- $\operatorname{Ass} M$ の極小元の集合。
- $\operatorname{Supp} M$ の極小元の集合（$\operatorname{Min} M$ のこと）。

証明. 補題 4.15 により、「任意の $\operatorname{Supp} M$ の元はある $\operatorname{Ass} M$ の元を含む (*)」。これと、$\operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Supp} M$ から、主張は形式的に従うことが落ち着けば分かる。

念の為ちゃんとやる。$\operatorname{Ass} M$ の極小元 $\mathfrak{p}$ をとると $\operatorname{Supp} M$ に入る。$\operatorname{Supp} M$ の元 $\mathfrak{q}$ で $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ なるものがあったとすると、(*) より $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Ass} M$ で $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{q}$ なるものがあるが、すると $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ なので、$\mathfrak{p}$ の極小性より $\mathfrak{p}' = \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ である。よって $\mathfrak{p}$ は $\operatorname{Supp} M$ でも極小元である。

逆に、$\operatorname{Supp} M$ の極小元 $\mathfrak{p}$ をとると、(*) より $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ なる $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} M$ がとれる。しかし $\operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Supp} M$ だったことから、$\mathfrak{p}$ の極小性より $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ となり、とくに $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ である。あとは、$\operatorname{Ass} M$ のほうが $\operatorname{Supp} M$ より小さいので、明らかに $\mathfrak{p}$ は $\operatorname{Ass} M$ でも極小である。 □

系 4.17. 可換ネーター環 R 上の**有限生成**加群 M について次が成り立つ:

(1) $\operatorname{Min} M$ は有限集合であり、$M \neq 0$ なら $\operatorname{Min} M \neq \varnothing$ である。
(2) 任意の $\operatorname{Supp} M$ の元は必ずある $\operatorname{Min} M$ の元を含む。

とくに、任意の素イデアルは必ず極小素イデアルを含む。

証明. (1) いま M が有限生成と仮定したので、系 4.8 より $\operatorname{Ass} M$ は有限集合。よってその極小元の集合 $\operatorname{Min} M$ ももちろん有限集合である。また $M \neq 0$ なら $\operatorname{Ass} M \neq \varnothing$ より $\operatorname{Min} M$ も空でない。

(2) 補題 4.15 より、任意の $\operatorname{Supp} M$ の元はある $\operatorname{Ass} M$ の元を含む。また「$\operatorname{Ass} M$ が有限集合なので」、この $\operatorname{Ass} M$ の元は明らかに $\operatorname{Ass} M$ の極小元 ($= \operatorname{Min} M$ の元) を含む。 □

実は、「任意の素イデアルは必ず極小素イデアルを含む」ことは、ネーター環でない場合でも逆向きの Zorn を使っていえるらしい。

とりあえずこれを使えば Support は Min をつかって書ける:

系 4.18. R を可換ネーター環、M を有限生成 R 加群とする。このとき $\operatorname{Min} R$ は有限集合なので $\operatorname{Min} M = \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n\}$ と書くと、

$$\operatorname{Supp} M = V(\mathfrak{p}_1) \cup \cdots \cup V(\mathfrak{p}_n)$$

が成り立つ。

証明. $\operatorname{Supp} M$ が上向きで閉じていたことと、系 4.17 より明らか。 □

また特に coparimary 加群の support は次のように記述できる:

系 4.19. R を可換ネーター環、$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ とする。このとき M が $\mathfrak{p}$-coparimary なら（つまり $\operatorname{Ass} M = \{\mathfrak{p}\}$）、

$$\operatorname{Supp} M = V(\mathfrak{p})$$

が成り立つ。

証明. $\operatorname{Supp} M$ が上向きで閉じていたことと補題 4.15 より明らか。 □

またここで Associated prime の中でいくつか便利な部分集合を定義しておく。

定義 4.20. R を可換ネーター環、$M \in \mathsf{Mod}\, R$ とする。このとき

$$\begin{array}{rcc} \operatorname{Supp} M & := & \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}, \\ \cup & & \\ \operatorname{Ass} M & := & \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \exists R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M\}, \\ \cup & & \\ \operatorname{Min} M & := & \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M \mid \operatorname{Ass} M \text{ での極小元} = \operatorname{Supp} M \text{ での極小元}\}, \\ \cup & & \\ \operatorname{Assh} M & := & \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} M \mid \dim R/\mathfrak{p} = \dim M\}. \end{array}$$

つまり $\operatorname{Min} M$ は $\operatorname{Ass} M$ の極小元＝ $\operatorname{Supp} M$ の極小元（命題 4.16）であり、$\operatorname{Assh} M$ はさらに $\operatorname{Min} M$ のうちで、M の次元を実現しているような素イデアルである（$\operatorname{Supp} M$ の素イデアルの maximal chain は必ず $\operatorname{Supp} M$ の極小元から始まるので、$\operatorname{Min} M$ に入ってる）。**ただし $\dim M = \infty$ の場合にも $\operatorname{Assh} M$ を同様に定める。**

またこのとき、$\operatorname{Ass} M$ に入っているが $\operatorname{Min} M$ に入っていないものを *embedded prime* といい、$\operatorname{Min} M$ に入っているものを *isolated prime* と呼ぶ。

注意 4.21. 少し無限次元のときの $\operatorname{Assh} M$ や $\operatorname{Min} M$ について怖いので補足。これらが空じゃないことが次のように保証される。$M \neq 0$ とする。

- まず $\dim M < \infty$ のとき。$\dim M$ を実現するような $\operatorname{Supp} M$ での chain が取れ、その一番初めのものを $\mathfrak{p}$ とする。これは明らかに $\mathfrak{p}$ の $\operatorname{Supp} M$ の極小元より、$\operatorname{Min} M \neq \varnothing$ である。さらに $\operatorname{Supp} M$ が上向きで閉じていたことを思い出すと、$\dim R/\mathfrak{p} = \dim M$ が分かり、$\operatorname{Assh} M \neq \varnothing$ である。
- 次に M が有限生成のとき。系 4.17 により $\operatorname{Min} M \neq \varnothing$ であり、しかも有限集合である。もし $\dim M < \infty$ なら上のことより明らかに $\operatorname{Min} M$ のなかに $\operatorname{Assh} M$ の元は入っている。問題は $\dim M = \infty$ の場合だが、この場合も $\operatorname{Min} M$ が有限集合より、$\dim R/\mathfrak{p} = \infty$ なる $\operatorname{Min} M$ の元が必ずある。なぜなら、なかったとしたら、$\operatorname{Min} M$ が有限なので、$\mathfrak{p}$ が $\operatorname{Min} M$ を動くときの $\dim R/\mathfrak{p}$ の値は最大値がある。しかし $\dim M = \infty$ より、それより長い長さの $\operatorname{Supp} M$ での chain を取ってやると、その一番初めの項に必要なら $\operatorname{Min} M$ の元 $\mathfrak{p}$ を付け加えてやることで、$\dim R/\mathfrak{p}$ よりも長い chain が作れてしまいおかしい。

つまり、「$\dim M < \infty$ または M が有限生成のとき」は、きちんと $\operatorname{Assh} M \neq \varnothing$ が保証される。

当たり前のことを書いておくと、

注意 4.22. R が可換ネーター整域ならば $\operatorname{Ass} R = \{(0)\}$ のみで、$\operatorname{Ass} R = \operatorname{Min} R = \operatorname{Assh} R$ である！忘れがちな自明な例。

また加群が 0 次元の場合もまとめておく。

命題 4.23. R を可換ネーター環、$0 \neq M$ を有限生成 R 加群とすると次は同値:

(1) $M \in \mathsf{fl}\, R$.
(2) $\dim M = 0$.
(3) $\operatorname{Supp} M \subset \operatorname{Max} R$.
(4) $\operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Max} R$.
(5) $\operatorname{Min} M \subset \operatorname{Max} R$.
(6) $\operatorname{Assh} M \subset \operatorname{Max} R$.

またこのとき $\operatorname{Assh} M = \operatorname{Min} M = \operatorname{Ass} M = \operatorname{Supp} M$ であり、この集合は有限集合であり、「$R/\mathfrak{m}$ が M の組成因子として出てくる $\mathfrak{m}$」を集めた集合となっている。

証明. (1)(2)(3) の同値性は命題 4.11 でやった。

(3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6): $\operatorname{Assh} M \subset \operatorname{Min} M \subset \operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Supp} M$ より明らか。

(6) $\Rightarrow$ (2): まず注意 4.21 より、$\operatorname{Assh} M \neq \varnothing$ である。よって $\mathfrak{p} \in \operatorname{Assh} M$ が取れる。しかし (6) の仮定よりこれは極大イデアルであり、$\operatorname{Assh} M$ の定義により $\dim M = \dim R/\mathfrak{p} = 0$ となる。

最後の主張。M を (1)-(6) を満たすとする。M の組成因子が $R/\mathfrak{m}_1, \cdots, R/\mathfrak{m}_l$ だとすると、命題 4.11 より $\operatorname{Supp} M = \{\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_l\}$ である。しかし $\dim R/\mathfrak{m}_i = 0 = \dim M$ がどの i でも成り立つので、$\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_l \in \operatorname{Assh} M$ である。よって主張が成り立つ。 $\square$

あとで depth とき使うので、Hom 集合の Ass を計算しておく。

命題 4.24. R を可換ネーター環、X を有限生成 R 加群、$M \in \mathsf{Mod}\, R$ とすると、次が成り立つ:

$$\operatorname{Ass}_R \operatorname{Hom}_R(X, M) = \operatorname{Supp} X \cap \operatorname{Ass}_R M.$$

証明. 局所化を使う。X が有限生成より $\operatorname{Hom}_R(X, M)_\mathfrak{p} = \operatorname{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(X_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p})$ に注意。

($\subset$) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R \operatorname{Hom}_R(X, M)$ とする。つまり単射

$$R/\mathfrak{p} \hookrightarrow \operatorname{Hom}_R(X, M)$$

があるので、局所化して

$$k(\mathfrak{p}) \hookrightarrow \operatorname{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(X_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p})$$

がある、とくに $X_\mathfrak{p} \neq 0$ より $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} X$ である。この写像の像の中から、0 でない $f\colon X_\mathfrak{p} \to M_\mathfrak{p}$ を取ってくる。$f \neq 0$ よりある元は f により $M_\mathfrak{p}$ のゼロでない元にうつる。しかし $f \cdot \mathfrak{p}R_\mathfrak{p} = 0$ なことより、この元は $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ かけて死ぬ。よって $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$ である。しかし命題 4.9 により、ここから $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M$ が従う。

($\supset$) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} X \cap \operatorname{Ass}_R M$ をとる。同じく局所化する。$X_\mathfrak{p} \neq 0$ は有限生成 $R_\mathfrak{p}$ 加群より、単純 $R_\mathfrak{p}$ 加群 $k(\mathfrak{p})$ へ全射がある: $X_\mathfrak{p} \twoheadrightarrow k(\mathfrak{p})$. また $R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$ を局所化して、単射 $k(\mathfrak{p}) \hookrightarrow M_\mathfrak{p}$ ができる。これらを合成して、$X_\mathfrak{p} \twoheadrightarrow k(\mathfrak{p}) \hookrightarrow M_\mathfrak{p}$ という射ができる。この射は明らかに $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ を書けたら消え、しかもゼロでない。よって $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_{R_\mathfrak{p}} \operatorname{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(X_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p})$ となる。また命題 4.9 により、$\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R \operatorname{Hom}_R(X, M)$ が従う。 $\square$

これを用いて、射集合がゼロかどうかの判別条件が得られる。あとで depth のときの雛形。

系 4.25. 可換ネーター環 R と $X, M \in \mathsf{mod}\, R$ と $M \in \mathsf{Mod}\, R$ について次は同値:

(1) $\operatorname{Hom}_R(X, M) = 0$.
(2) $\operatorname{Ass}_R \operatorname{Hom}_R(X, M) = \varnothing$.
(3) $\operatorname{Supp} X \cap \operatorname{Ass}_R M = \varnothing$.
(4) $\operatorname{Ann}_R X$ が M 正則元を含む。

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) はすでにやったことから。

(3) $\Rightarrow$ (4): $\operatorname{Ann}_R X$ が M 正則元を含まないとする。すると $\operatorname{Ann}_R X \subset R \setminus \operatorname{reg} M = \bigcup \operatorname{Ass} M$ となる。いま M が有限生成より $\operatorname{Ass} M$ は有限集合。よって prime avoidance より、ある $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ が存在して $\operatorname{Ann}_R X \subset \mathfrak{p}$ となる。よって $\mathfrak{p} \in V(\operatorname{Ann}_R X) = \operatorname{Supp} X$ より、$\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} X \cap \operatorname{Ass} M$ となり矛盾。

(4) $\Rightarrow$ (1): $r \in \operatorname{Ann}_R X$ で M 正則な元を取る。任意に射 $f\colon X \to M$ をとると、

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"] & M \arrow[d, hook, "r"] \\ X \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

という可換図式で、$r \in \operatorname{Ann}_R X$ より左縦はゼロ射、$r \in \operatorname{reg} M$ より右縦は単射。よって $f = 0$。 $\square$

5. Ass を求める方法（いわゆる準素分解）

準素イデアルとかがすごく苦手でイデアル論的によく分からなかったけど、「associated prime が一つしか無い」て言い換えれば加群論ぽくなる。まとめてたら、locally nilpotent 元のことばを使うと見通し良くなることに気づいたのでまとめなおす。

5.1. Coprimary 加群と locally nilpotent 元.

定義 5.1. R を可換環、$M \in \mathsf{Mod}\, R$ とその部分加群 $N \leq M$ を取る。このとき N が M の *primary submodule* であるとは、M/N が coprimary である、つまり $\operatorname{Ass} M/N$ がただ一つの元からなるときをいう。またこのとき、$\operatorname{Ass} M/N = \{\mathfrak{p}\}$ のとき、N を M の $\mathfrak{p}$-primary submodule と呼ぶ。

とくに R のイデアル I の primary 性も、同じく R/I が coprimary であること、つまり $\operatorname{Ass}_R R/I$ が一元集合であることと定義する。

まず coprimary 性の、元をつかった特徴づけ。便利な用語使いを定義する。

定義 5.2. R を可換環、M を R 加群とする。このとき $r \in R$ が M に *locally nilpotent* に作用する、M 上 *locally nilpotent* であるとは、任意の $x \in M$ に対してある n が存在して $xr^n = 0$ なるときをいう。

もちろん M が有限生成なら、locally nilpotent 性は nilpotent 性と同じである。またある意味、M 正則元と対照的な状況である。実際、M 正則元は決して locally nilpotent にはならないことがすぐ分かる。また両者ともに $\operatorname{Ass} M$ で記述できることを系 5.4 で見る。

実は、M 上 locally nilpotent な元全体は簡単な記述を持つ。これは命題 1.7 の一般化になっている。

命題 5.3. 可換環 R 上の R 加群 M を考えると、$r \in R$ について次が同値:

(1) r は M 上 locally nilpotent である。
(2) r はどの $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ にも含まれる。

とくに、M 上 locally nilpotent な元全体は $\bigcap \operatorname{Supp} M$ に一致する。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ を任意にとると $M_\mathfrak{p} \neq 0$ である。いま r が M 上 locally nilpotent より、明らかに $M_\mathfrak{p}$ 上でもそうである。しかしもし $r \notin \mathfrak{p}$ とすると、r は $R_\mathfrak{p}$ で可逆元より、locally nilpotent 性から $M_\mathfrak{p} = 0$ となってしまい矛盾。よって $r \in \mathfrak{p}$ である。

(2) $\Rightarrow$ (1): $0 \neq x \in M$ を固定し、$r \in \sqrt{\operatorname{Ann}_R(x)}$ を示せばよい。しかし命題 1.7 より $\sqrt{\operatorname{Ann}_R(x)} = \bigcap V(\operatorname{Ann}_R(x))$ であった。いま、自然な単射 $R/\operatorname{Ann}_R(x) \hookrightarrow M$ があるので、$\operatorname{Supp}_R R/\operatorname{Ann}_R(x) \subset \operatorname{Supp} M$ であり、よって $V(\operatorname{Ann}_R(x)) = \operatorname{Supp}_R R/\operatorname{Ann}_R(x) \subset \operatorname{Supp} M$ となる。(2) のような r をとると、ゆえに任意の $V(\operatorname{Ann}_R(x))$ の元に含まれる。よって $r \in \sqrt{\operatorname{Ann}_R(x)}$ である。 □

これを使って、M 正則元と、M 上の locally nilpotent 元の対照的な記述ができる。

系 5.4. 可換ネーター環 R 上の加群 $M \in \mathsf{Mod}\, R$ と $r \in R$ について、次が成り立つ:

(1) r が M 正則であることと、r がどの M の associated prime にも属さないことは同値である。
(2) r が M 上 locally nilpotent であることと、r が M のどの associated prime にも属することは同値である。

つまり $\operatorname{reg} M = R \setminus \bigcup \operatorname{Ass} M$ であり、M 上 locally nilpotent な元の集合は $\bigcap \operatorname{Ass} M$ である。

証明. (1) 命題 4.14 である。

(2) r が M 上 locally nilpotent なことと、r が $\operatorname{Supp} M$ のどの元にも属することは同値であった。一方、$\operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Supp} M$ であり、これと補題 4.15 を使うと、このことは r がどの M の associated prime にも属することと同値。 □

この記述を使い、coprimary 性を元で特徴づける。

命題 5.5. R を可換ネーター環、$0 \neq M \in \mathsf{Mod}\, R$ を R 加群とする（無限生成ゆるす）。次は同値。

(1) M は coprimary である、つまり $\operatorname{Ass} M$ は 1 元集合.
(2) R の元は、M 正則であるか M 上 locally nilpotent であるかのいずれかである。

また M が有限生成なら次も同値:

(3) R の元は M 正則であるか M 上 nilpotent であるかのいずれかである。

またこのとき、$\operatorname{Ass} M$ の元 $\mathfrak{p}$ は、M 上 locally nilpotent 元の集合と一致する。さらに M が有限生成なら、$\mathfrak{p} = \sqrt{\operatorname{Ann}_R M}$ である。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2), (3): いま $\operatorname{Ass} M$ が一元集合 $\{\mathfrak{p}\}$ である。よって系 5.4 を使うと、

$$R \setminus \mathfrak{p} = \operatorname{reg} M,$$
$$\mathfrak{p} = \{M \text{ 上 locally nilpotent 元 }\}$$

となるので明らかに (2) が成り立つ。M が有限生成なら、locally nilpotent 元は nilpotent 元なので (3) が成り立つ。

(2) $\Rightarrow$ (1): 系 5.4 を用いると、(2) は

$$\bigcup \operatorname{Ass} M \subset \bigcap \operatorname{Ass} M$$

と同値である。ここから $\operatorname{Ass} M$ が一元集合なことが形式的にでる。

念の為ちゃんとみる。まず $M \neq 0$ より $\operatorname{Ass} M$ は空でない。任意の 2 元 $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} M$ を取ってくると、$\mathfrak{p} \subset \bigcup \operatorname{Ass} M \subset \bigcap \operatorname{Ass} M \subset \mathfrak{q}$ より $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ である。よって対称性より $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ となり、$\operatorname{Ass} M$ は一元集合である。 □

ここから次が分かる、むしろ次のことが普通は primary ideal の定義として使うことが多い。

系 5.6. R を可換ネーター環とする。このときイデアル I が primary であることと、次は同値: $x, a \in R$ について、$xa \in I$ であり $x \notin I$ ならば、ある n が存在して $a^n \in I$. またこのとき、$\sqrt{I}$ は素イデアルであり、I は $\sqrt{I}$-primary である。

証明. これはつまり非 R/I 正則元が必ず R/I 上に nilpotent で作用することの言い換えである。 □

また、一番良く使う $\mathfrak{m}$-primary 性についてまとめておく。

命題 5.7. $(R, \mathfrak{m})$ をネーター局所環、I を R の真のイデアルとしたとき、次は同値である。

(1) I は $\mathfrak{m}$-primary である、つまり $\operatorname{Ass} R/I = \{\mathfrak{m}\}$.
(2) $\mathfrak{m}$ は I を含む素イデアルの中で極小である、つまり $\mathfrak{m} \in \operatorname{Min} R/I$.
(3) $\operatorname{Supp}_R(R/I) = \{\mathfrak{m}\}$.
(4) R/I は R 加群として長さ有限である
(5) $\dim R/I = 0$ となる。
(6) ある n が存在し、$\mathfrak{m}^n \subset I$ となる。

証明. $\operatorname{Max} R = \{\mathfrak{m}\}$ により、(1)(3)(4)(5) は命題 4.23 により同値である。

(1) $\Rightarrow$ (2): 一般に R 加群 M について、$\operatorname{Min} M$ は $\operatorname{Ass} M$ の極小元と一致したので明らか。

(2) $\Rightarrow$ (3): $\operatorname{Supp}_R(R/I) = V(I)$ であったので、$\mathfrak{p} \in V(I)$ とすると $I \subset \mathfrak{p}$ であるが、$I \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ が成り立つので極小性より $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ でなければならない。

以上より (1)-(5) は同値である。(6) については、coprimary の特徴づけ命題 5.5 を使ったらすぐできるし、使わなくても直接証明できる。それぞれ書いておく。

(5) $\Rightarrow$ (6): いま $\dim R/I = 0$ より R/I はアルティンなネーター局所環である（系 4.12 より）。一般にアルティン環の Jacobson 根基は冪零より、ある n があり、$(\mathfrak{m}/I)^n = 0$ であり (6) が従う。

(1) $\Rightarrow$ (6): 加群 R/I が $\mathfrak{m}$-coprimary である。命題 5.5 により、$\mathfrak{m}$ の元は R/I 上にべき零で作用する。よって明らかに $\mathfrak{m}^n \subset I$ なる I が存在する。

(6) $\Rightarrow$ (4): R/I は $\mathfrak{m}^n$ で消えるので、$R/\mathfrak{m}^n$ 上の有限生成加群と見れる。一方、$\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{m}^{n-1} \subset \cdots \subset \mathfrak{m} \subset R$ という列を考えれば、割ったところは有限生成 $R/\mathfrak{m}$ 加群より R 加群として長さ有限。つまり $R/\mathfrak{m}^n$ は長さ有限 R 加群なので、R/I も R 加群として長さ有限である。

(6) $\Rightarrow$ (1): R が局所環より、R の元は可逆元であるか $\mathfrak{m}$ の元であるかのいずれかである。もし可逆元ならば明らかに R/I 正則である。もし $\mathfrak{m}$ の元ならば、(6) より R/I 上にべき零で作用する。よって命題 5.5 により I は primary であり、$\operatorname{Ass} R/I = \{\mathfrak{m}\}$ が分かる。 □

5.2. **Meet-irreducible 部分加群と primary 部分加群.** 準素分解のために、部分加群を他の部分加群の meet で表すことをする。

定義 5.8. Λ を（非可換）環、$M \in \mathsf{Mod}\,\Lambda$ とする。このとき部分加群 $N \leq M$ が *meet-irreducible (meet-irred.)* であるとは、次が成り立つときをいう:
$N = N_1 \cap N_2$ in $\mathsf{L}(M_\Lambda)$ ならば $N = N_1$ または $N = N_2$.

つまり 2 つの部分加群の共通部分として真に表せないときをいう。
まずネーターの仮定のもと、任意の部分加群は meet-irred 部分加群の meet でかける:

命題 5.9. Λ を（非可換）環、M をネーター的な Λ 加群とする。このとき、任意の M の部分加群 N に対して、ある meet-irred. 部分加群 $N_1 \cdots, N_l \leq M$ が存在し、$N = N_1 \cap \cdots \cap N_l$ とかける。

証明. M の部分加群のうち、meet-irred の有限の meet で表せないもの全体を考える。もしこの集合が空でないなら、M がネーターより極大元 N がとれる。N は meet-irred の meet で表せないので、とくに meet-irreducible ではない。つまりある N_1, N_2 という N より真に大きい部分加群で、$N = N_1 \cap N_2$ と表せる。しかし、極大性の仮定より、N_1 も N_2 も、meet-irred の有限の meet で表せる。よって N も表せることになり矛盾。 □

一般にネーター的な束だったら、全ての元は必ず meet-irred の有限の meet で表せることがこの証明みたいにして分かる。

補題 5.10. R を可換ネーター環、$M \in \mathsf{Mod}\,R$ を取る。このとき真の部分加群 $N < M$ について、N が M の meet-irred. 部分加群ならば、N は M の primary 部分加群である。

証明. $N < M$ が primary でないとして、meet-irred でないことを示す。
仮定より $M/N \neq 0$ であり、M/N が primary でないので $\operatorname{Ass} M/N$ は少なくとも 2 元以上を含む。よって相異なる 2 元 $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} M/N$ をとると、M/N の部分加群に $R/\mathfrak{p}$ と $R/\mathfrak{q}$ がある。この 2 つの共通部分はゼロである、なぜなら、$R/\mathfrak{p}$ のゼロでない元の annihilator は $\mathfrak{p}$ なので、交わりがゼロでないなら、その元の annihilator をとれば $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ となってしまうので。
よって $0 = R/\mathfrak{p}_1 \cap R/\mathfrak{p}_2$ という $\mathsf{L}_R(M/N)$ での図式ができるので、部分加群の対応定理によりこれを $\mathsf{L}_R(M)$ にもってくれば、$N = N_1 \cap N_2$ という分解ができる。よって N は M の中で meet-irred. でない。 □

以上のことから次が分かる:

定理 5.11. R を可換ネーター環、M を有限生成 R 加群とする。このとき、M の任意の真の部分加群 N をとると、ある M の primary 部分加群 $N_1, \cdots, N_l$ を用いて、

$$N = N_1 \cap \cdots \cap N_l$$

と書ける。このような書き方のことを N の準素分解 (primary decomposition) という。

次に、無駄のない準素分解を定義し、それを使って $\operatorname{Ass} M/N$ が求まることをみる。

定義 5.12. R を可換ネーター環、M を R 加群とし、その真の部分加群 N の準素分解

$$N = N_1 \cap \cdots \cap N_l$$

が与えられたとする。

(1) この準素分解が**無駄がない** *(irredundant)* とは、どの N_i を除いても N にはならないとき、つまりどの i についても $N \neq \bigcap_{j \neq i} N_j$ となるときをいう。
(2) 無駄がない準素分解が**最短** *(shortest)* であるとは、$\operatorname{Ass} M/N_i$ たちがそれぞれ違う prime からなるときをいう。

もし準素分解が与えられれば、取り除けるものを取り除くことで、明らかに無駄がないようにできる。また、次の補題から、さらに無駄がない準素分解は最短にすることができる。

補題 5.13. R を可換ネーター環、M を R 加群、N_1, N_2 を M の $\mathfrak{p}$-primary 部分加群とする。このとき $N_1 \cap N_2$ も M の $\mathfrak{p}$-primary 部分加群である。

証明. 仮定より $\operatorname{Ass} M/N_1 = \operatorname{Ass} M/N_2 = \{\mathfrak{p}\}$ である。また単射 $M/(N_1 \cap N_2) \hookrightarrow M/N_1 \oplus M/N_2$ があるので、$\operatorname{Ass} M/(N_1 \cap N_2) \subset \operatorname{Ass} M/N_1 \cup \operatorname{Ass} M/N_2 = \{\mathfrak{p}\}$ である。よって $\operatorname{Ass} M/(N_1 \cap N_2) = \{\mathfrak{p}\}$ である。 □

これにより可換ネーター環上の任意の有限生成加群の真の部分加群は、無駄がない最短準素分解を持つ。これについて次が分かる:

定理 5.14. R を可換ネーター環、M を有限生成 R 加群、N を M の真の部分加群、また

$$N = N_1 \cap \cdots \cap N_l$$

を N の M での無駄がない準素分解とする。このとき次が成り立つ:

(1) $\operatorname{Ass} M/N_i = \{\mathfrak{p}_i\}$ と置くと、$\operatorname{Ass} M/N = \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_l\}$ となる（かぶりはありうる)。
(2) さらにこの分解が最短であり、しかも各 $\mathfrak{p}_i$ が $\operatorname{Min}(M/N)$ に入る（M/N の isolated prime）ならば、N_i は一意的である、より明確に、局所化 $\varphi_i \colon M \to M_{\mathfrak{p}_i}$ について、$N_i = \varphi^{-1}(N_{\mathfrak{p}_i})$ である。

証明. 正直いまは (2) は使わないし面倒なので省く。必要になったらやる。

(1) 単射 $M/N \hookrightarrow \bigoplus_i M/N_i$ があるので、$\operatorname{Ass} M/N \subset \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_l\}$ は明らかである。

逆に、$\mathfrak{p}_i$ をとると、$\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass} M/N$ を示す。いま無駄がないことを使うと、

$$0 \neq \big(\bigcap_{j \neq i} N_j\big)/N \hookrightarrow M/N_i$$

というのができ、単射になることが確認できる。よって

$$\varnothing \neq \operatorname{Ass} \big(\bigcap_{j} N_j\big)/N \subset \operatorname{Ass} M/N_i = \{\mathfrak{p}_i\}$$

なので、

$$\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass} \big(\bigcap_{j} N_j\big)/N \subset \operatorname{Ass} M/N$$

が従う。 □

系 5.15. R を可換ネーター環、I を A の真のイデアルとすると、無駄がない準素分解

$$I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_l$$

が存在し、それを一つとれば、$\operatorname{Ass} R/I = \{\sqrt{\mathfrak{q}_1}, \cdots, \sqrt{\mathfrak{q}_l}\}$ となる。

これにより、商環 R/I の associated prime がわかり、包含もみれば minimal prime もわかる！

6. 局所化あたりの性質

socle が消えるかどうかは、極大イデアルでの局所化でチェックできる:

命題 6.1. 可換ネーター環 R 上の加群 $M \in \mathsf{Mod}\, R$ について、次は同値:

(1) $\operatorname{soc} M_R = 0$.
(2) $\operatorname{Max} R \cap \operatorname{Ass} M = \varnothing$.
(3) 任意の $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ に対し、$\operatorname{soc}(M_\mathfrak{m})_{R_\mathfrak{m}} = 0$.

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2): $\operatorname{Ass} M$ の定義より明らか。

(2) $\Rightarrow$ (3): (3) でないとする。ある $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ に対して、$R_\mathfrak{m}$ 加群として $\operatorname{soc} M_\mathfrak{m} \neq 0$ である。つまり $\mathfrak{m}R_\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} M_\mathfrak{m}$ が $\operatorname{Spec} R_\mathfrak{m}$ の元としてなりたつ。これを $\operatorname{Spec} R$ のなかで考えると、命題 4.9 より、$\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} M$ がいえる。よって (2) に矛盾。

(3) $\Rightarrow$ (2): より簡単。(2) でないなら、つまりある $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ と単射 $R/\mathfrak{m} \hookrightarrow M$ がある。これを $\mathfrak{m}$ で局所化すれば、単射 $k(\mathfrak{m}) \hookrightarrow M_\mathfrak{m}$ が得られ、$\operatorname{soc}(M_\mathfrak{m})_{R_\mathfrak{m}} = 0$ と矛盾。 □

7. 可換ネーター局所環上の KRULL 次元有限性

この節では、ネーター局所環の Krull 次元が有限なことを示すことを目標にする。それ以外の次元論のことは後で使わないので、そのうち Appendix にでもまとめる。

7.1. 標高定理.
まず（素）イデアルの高さを定義する。

定義 7.1. R を可換環、$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ とする。
$\operatorname{ht}\mathfrak{p} := \dim R_{\mathfrak{p}}$ と書く。これは $\mathfrak{p}$ に含まれるような素イデアルの chain の長さの最大値である（まだ有限性を示していないことに注意）。
R のイデアル I に対し、$\operatorname{ht} I := \inf\{\operatorname{ht}\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in V(I)\}$ とする。

注意 7.2. R を可換ネーター環とすると、$V(I) = \operatorname{Supp}_R R/I$ の元は必ず $\operatorname{Min} R/I$ の元を含むことを考えれば、
$$\operatorname{ht} I = \inf\{\operatorname{ht}\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Min} R/I\}$$
がすぐに分かる。また $(R, \mathfrak{m})$ が可換局所環なら、定義より $\dim R = \operatorname{ht}\mathfrak{m}$ である。

いわゆる Krull の標高定理を目標にするわけだが、手順としては「素イデアルの symbolic power を使い Krull の単項イデアル定理を出し、それを用いて帰納法で標高定理を証明する」というものを取る。ここらへんはいろんな証明がいっぱいあるらしい。

定義 7.3. R を可換環、$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ をとる。このとき $n \geq 1$ について $\mathfrak{p}^{(n)}$ を、
$$\mathfrak{p}^{(n)} := R \cap (\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})^n = \{a \in R \mid a/1 \in (\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})^n \subset R_{\mathfrak{p}}\}$$
で定め、$\mathfrak{p}$ の *symbolic power* と呼ぶ。つまり R を $\mathfrak{p}$ で局所化して、その環の根基を n 乗して、それを R にまた引き戻したものである。

定理 7.4 (Krull の単項イデアル定理)**.** R を可換ネーター環、$x \in R$ を任意にとる。このとき、$\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} R/(x)$ を任意にとる（つまり x を含む prime のなかで極小なもの）と、$\operatorname{ht}\mathfrak{p} \leq 1$ が成り立つ。つまり「単項イデアル I について $\operatorname{ht} I \leq 1$ である」。

証明. 明らかに、初めから $\mathfrak{p}$ で局所化しておいて、次を示せば十分である :「$(R, \mathfrak{m})$ をネーター局所環として、$\mathfrak{m} \in \operatorname{Min} R/(x)$ ならば、$\dim R \leq 1$ である」

このためには、任意の $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R \setminus \{\mathfrak{m}\}$ に対して $\dim R_{\mathfrak{q}} = 0$ を示したい。戦略的には、$R_{\mathfrak{q}}$ の極大イデアル $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}$ のべきの減少列がとまることを示せばゼロ次元が分かる。そのため R に引き戻して、R における $\mathfrak{q}$ の symbolic power の減少列が減少列がとまることを見る、ということをする。

$x \in \mathfrak{q}$ としてしまうと $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}$ となってしまうので、$x \notin \mathfrak{q}$ にまず注意。

いま (x) と $\mathfrak{m}$ の間に素イデアルはいないので、$R/(x)$ は 0 次元、つまりアルティン環である。このことから、
$$\mathfrak{q}^{(1)} + (x) \supset \mathfrak{q}^{(2)} + (x) \supset \mathfrak{q}^{(3)} + (x) \supset \cdots$$
というイデアルの降鎖列はいつか止まる。つまりある i が存在し、$\mathfrak{q}^{(i)} + (x) = \mathfrak{q}^{(i+1)} + (x)$ である。

(Claim): $\mathfrak{q}^{(i)} = \mathfrak{q}^{(i+1)} + x\mathfrak{q}^{(i)}$ が成り立つ。

なぜなら、右が左に含まれるのは明らか。左から元 a をとると、$\mathfrak{q}^{(i)} \subset \mathfrak{q}^{(i+1)} + (x)$ なことより、$a = b + xc$ with $x \in \mathfrak{q}^{(i+1)}, c \in R$ がとれる。このとき $xc = a - b \in \mathfrak{q}^{(i)}$ であるこれを $R_{\mathfrak{q}}$ へ送ると、$xc/1 \in (\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}})^i$ となるが、$x \notin \mathfrak{q}$ だったので x は $R_{\mathfrak{q}}$ で可逆元。よって $c/1 \in (\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}})^i$ となり、つまり $c \in \mathfrak{q}^{(i)}$ である。よって (Claim) が示せた。

あとは楽です。$x \in \mathfrak{m}$ に注意すると、中山の補題が使えるので、$\mathfrak{q}^{(i)} = \mathfrak{q}^{(i+1)}$ が成り立つ。よって $R_{\mathfrak{q}}$ へ持っていって $(\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}})^i = (\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}})^{i+1}$ が成り立つ。よってまた中山とかより $(\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}})^i = 0$ となり $R_{\mathfrak{q}}$ は 0 次元である。 □

これを使って Krull の標高定理を示す。

定理 7.5 (Krull の標高定理)**.** R をネーター環、$I = (x_1, \cdots, x_m)$ というイデアルを考え、$\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} R/I$ とする。このとき $\operatorname{ht}\mathfrak{p} \leq m$ である。とくに $\operatorname{ht} I \leq m$ である。

証明. m についての帰納法を使う。$m=0$ なら明らか、$m=1$ の場合が単項イデアル定理である。

$m>1$ とし、$m-1$ 以下でこの定理が成り立つとする。まず $\mathfrak{p}$ で局所化することで、次を示せばよい:

(Claim 0): $(R,\mathfrak{m})$ をネーター局所環、$\mathfrak{m}$ を $(x_1,\cdots,x_m)$ 上の極小素イデアルとすると、$\dim R\leq m$ である。

以下 (Claim 0) の状況を仮定し、(Claim 0) を示すため予備的な Claim をいろいろ準備する。

(Claim 1): 任意に素イデアル $\mathfrak{q}\neq\mathfrak{m}$ が与えられると、$\mathfrak{q}$ を含むある素イデアル $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{m}$ が存在し、$\mathfrak{p}\subsetneq\mathfrak{m}$ の間には何も素イデアルが存在しないようなものがとれる。

(Proof of Claim 1). $\mathfrak{q}$ と $\mathfrak{m}$ の間に素イデアルがないなら $\mathfrak{p}:=\mathfrak{q}$ とすればよい。ちがうなら、間に何か $\mathfrak{q}\subsetneq\mathfrak{q}'\subsetneq\mathfrak{m}$ となる。$\mathfrak{q}'$ と $\mathfrak{m}$ の間に素イデアルがないなら $\mathfrak{p}:=\mathfrak{q}'$ とすればよい。もしあるなら $\cdots$ と繰り返すと、R がネーターなのでいつか止まる。

(Claim 2): $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}R\setminus\{\mathfrak{m}\}$ を、$\mathfrak{p}\subsetneq\mathfrak{m}$ の間に素イデアルが存在しないようなものとする。このとき次のような元 $y_1,y_2,\cdots,y_m\in R$ が取れる:「$y_1\notin\mathfrak{p}$ で $y_2,\cdots,y_m\in\mathfrak{p}$ であり、$\mathfrak{m}$ は $y_1,\cdots,y_m$ を含む素イデアルの中で極小」

(Proof of Claim 2). ここが一番めんどくさい。いま $x_1,\cdots,x_m$ が全て $\mathfrak{p}$ に含まれていたなら、$\mathfrak{m}$ の極小性より $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}$ となってしまう。よってどれかは $\mathfrak{p}$ には含まれない。番号つけかえてそれを x_1 としてよく、$y_1:=x_1$ と置く。

いま $\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{m}$ の間に素イデアルがなく、$y_1\notin\mathfrak{p}$ なことより $\mathfrak{p}\subsetneq\mathfrak{p}+(y_1)$ である。よって $\mathfrak{p}+(y_1)$ を含む素イデアルは $\mathfrak{m}$ だけなので、$R/(\mathfrak{p}+(y_1))$ は 0 次元。よってある n が存在し $\mathfrak{m}^n\subset\mathfrak{p}+(y_1)$ となる（命題 4.23 とかを見よ）。

つまり $i=2,\cdots,m$ について、$x_i^n=y_i+y_1z_i$ となるような $y_i\in\mathfrak{p}$ と $z_i\in R$ が存在する。ここで落ち着くと、任意の素イデアル $\mathfrak{q}$ について、もし $\mathfrak{q}$ が $y_1,y_2,\cdots,y_m$ を含むならば、$x_1,x_2^n,\cdots,x_m^n$ を含むので、$x_1,\cdots,x_m$ を含む、よって $\mathfrak{q}=\mathfrak{m}$ となってしまう。よって、$\mathfrak{m}$ は $y_1,\cdots,y_m$ を含む素イデアルの中で極小である。

(Claim 3): $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}R\setminus\{\mathfrak{m}\}$ を、$\mathfrak{p}\subsetneq\mathfrak{m}$ の間に素イデアルが存在しないようなものとする。このとき $\operatorname{ht}\mathfrak{p}\leq m-1$ となる。

(Proof of Claim 3). (Claim 2) のような $y_1,\cdots,y_m$ を取る。このとき $R/(y_2,\cdots,y_m)$ を考えると、ここへの $\mathfrak{m}$ の射影 $\overline{\mathfrak{m}}$ は $\overline{y_1}$ を含む素イデアルのなかで極小である。よって**単項イデアル定理より** $\operatorname{ht}\overline{\mathfrak{m}}\leq 1$ である。しかし $(y_2,\cdots,y_m)\subset\mathfrak{p}\subsetneq\mathfrak{m}$ なことより、$\operatorname{ht}\overline{\mathfrak{m}}=1$ である。つまり $R/(y_2,\cdots,y_m)$ のなかで $\overline{\mathfrak{p}}$ は極小素イデアルである。よって $\mathfrak{p}$ は $(y_2,\cdots,y_m)$ を含む素イデアルの中で極小である。よって**帰納法の仮定より** $\operatorname{ht}\mathfrak{p}\leq m-1$ が成り立つ。

(Proof of Claim 0). もし $\operatorname{Spec}R$ に長さが l の chain $\mathfrak{p}_0\subsetneq\cdots\subsetneq\mathfrak{p}_{l-1}\subsetneq\mathfrak{p}_l=\mathfrak{m}$ があったとして、$l\leq m$ を示す。このとき (Claim 0) により、必要なら $\mathfrak{p}_{l-1}$ と $\mathfrak{m}$ の間にひとつ追加して、「$\mathfrak{p}_{l-1}\subsetneq\mathfrak{m}$ の間に素イデアルがない」と仮定してよい。すると (Claim 3) が使えるので、$\operatorname{ht}\mathfrak{p}_{l-1}\leq m-1$ となる。よって $l-1\leq m-1$ が従い、$l\leq m$ となる。 □

系 7.6. $(R,\mathfrak{m})$ をネーター局所環とすると、$\dim R$ は $\mathfrak{m}$ の生成元の個数で上から抑えられる。とくに $\dim R<\infty$ である。

証明. $\mathfrak{m}=(x_1,\cdots,x_m)$ というような元をとる（R がネーターより $\mathfrak{m}$ は有限生成 R 加群であるので）。このとき明らかに $\mathfrak{m}$ は $(x_1,\cdots,x_m)$ を含む中で極小素イデアルであるので、標高定理により $\operatorname{ht}\mathfrak{m}\leq m$、つまり $\dim R\leq m$ である。 □

7.2. **標高定理の逆・次元の特徴づけ.** 標高定理は、「m 元生成イデアルの高さは m 以下」だったが、逆に「高さ m のイデアルがあったら、その中から高さ m になるよう m 元がとれる」的なことが成り立つ:

命題 7.7 (標高定理の逆). R をネーター環、I を R の真のイデアルで $\operatorname{ht}I=m$ だとする。このとき、ある $x_1,\cdots,x_m\in I$ であって、$\operatorname{ht}(x_1,\cdots,x_i)=i$ が全ての i で成り立つようなものが存在する。

証明. 基本的に prime avoidance 使って帰納的に取っていく。$i \geq 1$ として、$x_1, \cdots, x_{i-1}$ という I の元であって $\mathrm{ht}(x_1, \cdots, x_{i-1}) = i-1$ なる元が取れていたとする（$i=1$ では何も仮定しない）。$I_{i-1} := (x_1, \cdots, x_{i-1})$ とする（$i=1$ では $I_0(0)$ とする）。

このとき、どの I_{i-1} 上の minimal prime にも含まれないような元 x_i が I の中に存在することを示す。背理法。もし取れないとするならば、I の任意の元は必ず I_{i-1} のある minimal prime に含まれる。つまり

$$I \subset \bigcup \mathrm{Min}\, R/I_{i-1}$$

である。ここで R がネーター環なことから $\mathrm{Min}\, R/I_{i-1}$ は空でない有限集合。よって prime avoidance が使えて、ある I_{i-1} の minimal prime $\mathfrak{p}$ が存在し、I は $\mathfrak{p}$ に含まれる。しかし**標高定理により** $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} \leq i-1$ であるので、これは $\mathrm{ht}\, I \leq i-1$ を導き、$\mathrm{ht}\, I = m$ に矛盾する。

以上より x_i がとれる。このとき $\mathrm{ht}(x_1, \cdots, x_i) = i$ となっている。なぜなら、もし違うなら**標高定理により** $\mathrm{ht}(x_1, \cdots, x_i) \leq i-1$ であるはずなので、$x_1, \cdots, x_i$ を含む素イデアル $\mathfrak{p}$ で $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} \leq i-1$ なるものが取れる。しかし $I_{i-1} \subset \mathfrak{p}$ であることから、帰納法の仮定より $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} \geq i-1$ となり、よって $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} = i-1$ である。このことから $\mathfrak{p}$ は I_{i-1} 上の minimal prime でなければならないことがすぐ分かる。しかし x_i はどの I_{i-1} の minimal prime も避けていたので、矛盾する。 □

これを用いて、環や加群の次元について次の同値性が分かる。

定理 7.8. $(R, \mathfrak{m})$ を可換ネーター局所環とすると、次の量は等しい:

(1) ある $x_1, \cdots, x_m \in \mathfrak{m}$ であって、$R/(x_1, \cdots, x_m)$ が長さ有限 R 加群（もしくは 0 次元、つまりアルティン環）となるような m の最小値.
(2) $d := \dim R$.

証明. まず $d := \dim R$ から出発する。つまり $\mathrm{ht}\,\mathfrak{m} = d$ であり、**標高定理の逆**により、ある $x_1, \cdots, x_d \in \mathfrak{m}$ であって、$\mathrm{ht}(x_1, \cdots, x_d) = d$ なるものが存在する。すると、高さを考えれば、明らかに $\mathfrak{m}$ は $(x_1, \cdots, x_d)$ 上の minimal prime でなければならない。よって $R/(x_1, \cdots, x_d)$ には素イデアルが $\mathfrak{m}$ の像しかなく、つまり 0 次元である。よって (1) の量 m について、$m \leq d$ が成り立つ。

逆向きを示したい。$R/(x_1, \cdots, x_m)$ が長さ有限だったとすると、つまり $\mathfrak{m}$ は $(x_1, \cdots, x_m)$ 上の minimal prime である。ここで**標高定理**より $\mathrm{ht}\,\mathfrak{m} \leq m$ となるので、$\dim R = \mathrm{ht}\,\mathfrak{m} \leq m$ つまり $d \leq m$ である。 □

加群の場合を系として出しておく。

系 7.9. $(R, \mathfrak{m})$ を可換ネーター局所環、$0 \neq M$ を有限生成 R 加群とすると、次の量は等しい:

(1) ある $x_1, \cdots, x_m \in \mathfrak{m}$ があって $M/M(x_1, \cdots, x_m)$ が長さ有限 R 加群となるような m の最小値 m。
(2) $d := \dim_R M$.

また、$d := \dim M$ に対して、$M/M(x_1, \cdots, x_d)$ が長さ有限になるもの（が上よりとれる）を、M の *system of parameters (s.o.p)* と呼ぶ。

証明. $I := \mathrm{Ann}_R M$ とすると、上の量は「$x_1, \cdots, x_m \in \mathfrak{m}$ があって $R/(I + (x_1, \cdots, x_m))$ が長さ有限となる m の最小値」であり、つまり R/I についての先程の (1) と等しい。また (2) も $\dim M = \dim R/I$ であり、先程の (2) と等しい。よって先程の定理より従う。 □

個人的には、Krull 次元は素イデアルの列とかいう抽象的なもので定義されておりよくわからないが、この定理により M の次元は「M をどれだけの元で割ったら長さ有限（0 次元）におちるか」を測っているものだという解釈でき、こっちのほうがしっくりくる。

また、正則元で割ると次元がちょうど一つ落ちることを書いておく。

命題 7.10. $(R, \mathfrak{m})$ を可換ネーター局所環、$0 \neq M$ を有限生成加群とする。このとき任意の $r \in \mathfrak{m}$ について、

$$\dim M - 1 \leq \dim M/Mr \leq \dim M$$

が成り立つ。もし r がどの M の minimal prime も避けていれば $\dim M/Mr = \dim M - 1$ となり、とくに r が M 正則の場合この等号が成り立つ。

証明. $\dim M/Mr \leq \dim M$ は $\operatorname{Supp} M/Mr \subset \operatorname{Supp} M$ なことから明らか。

$\dim M \leq \dim M/Mr + 1$ について。いま $t := \dim M/Mr$ とおくと、系 7.9 より M/Mr の s.o.p. がとれ、それを $x_1, \cdots, x_t$ とする。つまりこのとき $M/M(r, x_1, \cdots, x_t)$ が長さ有限 R 加群であるので、また系 7.9 により、$\dim M \leq t + 1$ が従う。

ここで r が M のどの minimal prime も避けているとする。$t := \dim M/Mr$ なことより (r) を含む $\operatorname{Supp} M$ での列 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_t (= \mathfrak{m})$ が取れるが、$r \in \mathfrak{p}_0$ なことから $\mathfrak{p}_0$ は M の minimal prime ではない。よって $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}_0$ なる $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ がとれる。よって $\dim M \geq t + 1$ が従うが、すでに示した不等号 $\dim M \leq t + 1$ と比べると $\dim M = t + 1$ でなければならない。

最後の主張。もし $r \in \operatorname{reg} M$ なら、$\operatorname{reg} M = R \setminus \bigcup \operatorname{Ass} M \subset R \setminus \bigcup \operatorname{Min} M$ よりおっけー。 □

一応局所を仮定しない場合も書いておく。

系 7.11. R を可換ネーター環、$M \in \mathsf{mod}\, R$ を $\dim M < \infty$ な加群とする。このとき任意の $r \in \operatorname{reg} M$ について、$\dim M/Mr = \dim M - 1$ が成り立つ。

8. 可換環に対する Serre 条件とか周辺

定義 8.1. 可換ネーター環 R が *generically Gorenstein* であるとは、任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} R$ について $R_\mathfrak{p}$ が Gorenstein であるときをいう。

9. Cohen-Macaulay 環・加群

9.1. depth について.

定義 9.1. 可換ネーター局所環 $(R, \mathfrak{m})$ と $0 \neq M \in \mathsf{mod}\, R$ に対して、その *depth* を以下で定義:

$$\operatorname{depth}_R M := \min\{i \mid \operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M) \neq 0\}$$

つまり $\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M)$ がゼロにならないような最小の i と定める。$M \neq 0$ でない限りこの値が有限であることは後で示す。

注意 9.2. 定義からすぐ、$M \in \mathsf{mod}\, R$ について $\operatorname{depth}_R M \geq 1 \Leftrightarrow \operatorname{soc}_R M \neq 0$ が分かる。

いわゆる正則列との関係について。

定義 9.3. 可換ネーター局所環 $(R, \mathfrak{m})$ 上の $M \in \mathsf{Mod}\, R$ について、$x_1, x_2, \cdots, x_r \in \mathfrak{m}$ が M **正則列**であるとは、

(1) $M_i := M/M(x_1, \cdots, x_i) \neq 0$ が全ての i について成り立つ。
(2) $x_i \in \operatorname{reg} M_{i-1}$ が成り立つ、つまり x_i 倍写像は M_{i-1} 上で単射である（もちろん $M_0 := M$ とする）

を満たすときいう。

正則列は順番も考慮する。以下よく $x = x_1, \cdots, x_r$ を元の列、M を R 加群としたとき $Mx := M(x_1, \cdots, x_r)$ とかく。まず必ず止まることをみる。

命題 9.4. R を可換ネーター環とすると、$0 \neq M \in \mathsf{Mod}\, R$ について任意の M 正則列は伸ばしていって必ずそれ以上伸ばせないとこまでいける。

証明. $x_1, x_2, x_3, \cdots$ と無限に M 正則列が取れたとする。このとき $x_1, x_2, \cdots$ で生成される R のイデアルは、R がネーターなので有限生成、つまりある i があって $x_i \in (x_1, x_2, \cdots, x_{i-1})$ となってしまう。しかし明らかにこうなると M_{i-1} 上で x_i 倍写像はゼロ写像で、$M_{i-1} \neq 0$ より単射とならない。よって矛盾。 □

実は極大な正則列の長さがちょうど depth に等しいことを見ていく。まず depth 0 の場合が実質、系 4.25 であり、そこから帰納的に出す。

命題 9.5. 可換ネーター局所環 $(R, \mathfrak{m})$ と有限生成加群 $M \in \operatorname{\mathsf{mod}} R$ について次は同値。

(1) $\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, M) \neq 0$、つまり $\operatorname{depth} M = 0$.
(2) $\operatorname{soc} M_R \neq 0$.
(3) $\mathfrak{m}$ の中に M 正則元がない、つまり $\mathfrak{m} \cap \operatorname{reg} M = \varnothing$、つまり M 正則列の長さはゼロ。

証明. $\operatorname{soc} M_R = \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, M)$ より (1) $\Leftrightarrow$ (2) は明らか。(1) $\Leftrightarrow$ (3) は系 4.25 より。 □

主張していた、depth の定義の同値性が分かる。後でネーター代数で同じ証明するので、そっちを見てください（定理 17.13）。基本的に命題 9.5 と、長完全列を使った帰納法で回るので、各自練習問題としてもよい。

定理 9.6. 可換ネーター局所環 $(R, \mathfrak{m}, k)$ と有限生成加群 $M \in \operatorname{\mathsf{mod}} R$ について、極大 M 正則列 $x_1, \cdots, x_r$ をとる。このとき

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}^i_R(k, M) &= \operatorname{Hom}_R(k, M/M(x_1, \cdots, x_i)) \\ &= \begin{cases} 0 & (i < r) \\ \text{non-zero} & (i = r) \end{cases} \end{aligned}$$

が全ての $0 \leq i \leq r$ で成り立つ。とくに、極大 M 正則列の長さは全て一定であり、$\operatorname{depth}_R M$ に等しい。

証明. 定理 17.13 より。 □

あとで injective resolution をやると思うが、そこでの直感を書いておくと、「M の inj. resol. とったとき、depth 番目までの入射加群の底には $\mathfrak{m}$ がおらず、ちょうど depth 番目で $\mathfrak{m}$ がでてくる！」

また定理 17.13 と命題 17.10 の特別な場合として、次が分かる:

命題 9.7. $T \to R$ を可換環の射で、T も R もネーター局所環であり、R は T 加群として有限生成なものとする。このとき任意の $M \in \operatorname{\mathsf{mod}} R$ について、次が成り立つ:

(1) $\operatorname{depth}_T M = \operatorname{depth}_R M$.
(2) $\dim_T M = \dim_R M$.

よくやるのは、R のネーター正規化をとって、正則局所な部分環 T をとり、そこ上で depth やら次元やら CM 性やらを判定する。

9.2. **Bass 数、Bass の補題.** いわゆる Cohen-Macaulay 性や、Bass による Gorenstein 環の特徴付けなどをやる上で、次の *Bass* **の補題**が非常に便利である。ネーター代数で同じ証明をやるが、ちょっと見にくくなるので、可換環の場合でも繰り返してやっておく。そのうち injective resolution の構造を見るときにも非常に便利である。

Bass の補題を述べたり、のちに inj resol や CM や Gorenstein での話を見るために、いわゆる *Bass* **数** *(Bass number)* を使ったほうが直感的でわかりやすいので、それを定義する。

定義 9.8. R を可換ネーター環、$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ とし $M \in \operatorname{\mathsf{Mod}} R$ をとる。このとき、M **の** $\mathfrak{p}$ **についての** i **番目の** *Bass* **数** $\mu^i_R(\mathfrak{p}, M)$ を次で定める:

$$\mu^i_R(\mathfrak{p}, M) := \ell_{R_\mathfrak{p}} \operatorname{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), M_\mathfrak{p}) = \ell_{R_\mathfrak{p}} \operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p}, M)_\mathfrak{p}$$

ここで ℓ は加群の長さをさす。$k(\mathfrak{p})$ は $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ で消えるので、上の Ext 群は $k(\mathfrak{p})$ ベクトル空間であり、$\ell_{R_\mathfrak{p}}$ は結局 $k(\mathfrak{p})$ ベクトル空間としての次元である。M が有限生成なときは各 Bass 数は有限の自然数である。無限も一応許す。また R が明らかなときは $\mu^i(\mathfrak{p}, M)$ とも書く。

あとで見るように、$\mu^i(\mathfrak{p}, M)$ は「M の移入分解の i 番目の項の底に $\mathfrak{p}$ がいくつ住んでいるか」という定義ができる。

注意 9.9. $(R, \mathfrak{m})$ を可換ネーター局所環、$M \in \mathsf{mod}\, R$ とすると、加群の depth は定義より、Bass 数を使ってこうかける:

$$\operatorname{depth}_R M := \min\{i \mid \mu^i(\mathfrak{m}, M) \neq 0\}$$

つまり $\mathfrak{m}$ で測った Bass 数が消えていないような最小のとこである。

補題 9.10 (Bass の補題)**.** R を可換ネーター環、$M \in \mathsf{mod}\, R$ とする。また $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ を、間に（包含で）何も無いような $\operatorname{Spec} R$ の二元とする（つまり $\dim R_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} = 1$）。また $i \geq 0$ とする。
この設定のもとで、次が成り立つ: もし $\mu^i(\mathfrak{p}, M) \neq 0$ ならば、$\mu^{i+1}(\mathfrak{q}, M) \neq 0$ である。

有用性がまだ分かりづらいので、Bass の補題から従うことを先に書く。

系 9.11. R を可換ネーター局所環、$M \in \mathsf{mod}\, R$ とする。このとき $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ を任意にとると、

$$\operatorname{depth}_R M \leq \dim R/\mathfrak{p}$$

が成り立つ。とくに、$\operatorname{depth}_R M \leq \dim M$ が成り立つ。

証明. $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ をとると、何回かやったように $\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{p}, M)_\mathfrak{p} \neq 0$ である（補題 4.13）、つまり $\mu^0(\mathfrak{p}, M) \neq 0$。いま $\dim R/\mathfrak{p} = d$ とすると、$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_d = \mathfrak{m}$ という saturated chain をとる。すると Bass の補題 9.10 より、$\mu^1(\mathfrak{p}_1, M) \neq 0$ が従い、くり返し使えば $\mu^d(\mathfrak{p}_d, M) \neq 0$、つまり $\operatorname{Ext}_R^d(R/\mathfrak{m}, M) \neq 0$ となり、depth の定義から $\operatorname{depth}_R M \leq d$ となる（$R/\mathfrak{m}$ からの Ext が消えない最小番目が depth だったので）。 □

このように、加群の depth は必ず次元で上から抑えられる。よって明らかに $\operatorname{depth}_R M \leq \dim M \leq \dim R$ である。

とりあえず Bass の補題を証明してしまおう。

Proof of Lemma 9.10. 仮定のように、R を可換ネーター環、$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ を間に何もない prime の列、M を有限生成 R 加群とし、$\operatorname{Ext}_R^i(R/\mathfrak{p}, M)_\mathfrak{p} \neq 0$ と仮定する。このとき $\operatorname{Ext}_R^{i+1}(R/\mathfrak{q}, M)_\mathfrak{q} \neq 0$ を示す。

局所化して考える。もとの環 R を $\mathfrak{q}$ で局所化してやる。すると $R_\mathfrak{q}$ というネーター局所環ができ、$M_\mathfrak{q} \in \mathsf{mod}\, R_\mathfrak{q}$ で、$\mathfrak{q}$ より下の素イデアルしか考えない状況になる。ちゃんと状況が保存されるか念の為見ると、$\operatorname{Ext}_{R_\mathfrak{q}}^i(R_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{q}, M_\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{q}} = \operatorname{Ext}_R^i(R/\mathfrak{p}, M)_\mathfrak{q} \neq 0$ であり、示したいのは $\operatorname{Ext}_{R_\mathfrak{q}}^{i+1}(k(\mathfrak{q}), M_\mathfrak{q}) = \operatorname{Ext}_R^{i+1}(R/\mathfrak{q}, M)_\mathfrak{q} \neq 0$ である。よって初めから次の状況を示せばよい:

(Claim): $(R, \mathfrak{m}, k)$ **を可換ネーター局所環、**$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ **で** $\dim R/\mathfrak{p} = 1$ **であり、**$M \in \mathsf{mod}\, R$ **について、もし** $\operatorname{Ext}_R^i(R/\mathfrak{p}, M)_\mathfrak{p} \neq 0$ **なら、**$\operatorname{Ext}_R^{i+1}(k, M) \neq 0$ **である。**

このときまず $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ より、$x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}$ が取れるので、これを固定する。すると次のような $\mathsf{mod}\, R$ での短完全列ができる

$$0 \longrightarrow R/\mathfrak{p} \xrightarrow{\ x\ } R/\mathfrak{p} \longrightarrow R/(\mathfrak{p} + xR) \longrightarrow 0.$$

初めの写像が単射なのは、$\mathfrak{p}$ が素イデアルなことと $x \notin \mathfrak{p}$ からすぐ分かる。他の完全性も作り方から明らかである（x 倍写像のイメージで割っただけ）。これにいつもみたいに $(-, M)$ 考えて長完全列伸ばして i 付近をみると、

$$\operatorname{Ext}_R^i(R/\mathfrak{p}, M) \xrightarrow{\ x\ } \operatorname{Ext}_R^i(R/\mathfrak{p}, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{i+1}(R/(\mathfrak{p} + xR), M)$$

勘のいいかたならもう証明できると思う。今 $R/(\mathfrak{p} + xR)$ を考えると、$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p} + xR \subset \mathfrak{m}$ というイデアルの包含になっているが、$\dim R/\mathfrak{p} = 1$ つまり $\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{m}$ の間には素イデアルがない！よって $\operatorname{Supp}_R R/(\mathfrak{p} + xR) = V(\mathfrak{p} + xR) = \{\mathfrak{m}\}$ である、よって命題 4.11 により $R/(\mathfrak{p} + xR)$ は R 加群として長さ有限である。

しかし長さ有限 R 加群は必ず k を有限回拡大して得られる。ここでもし（背理法で）$\operatorname{Ext}_R^{i+1}(k, M) = 0$ だったとすると、拡大で Ext の vanish は変わらないので、$\operatorname{Ext}_R^{i+1}(R/(\mathfrak{p} + xR), M) = 0$ となる。つまり

$$\operatorname{Ext}_R^i(R/\mathfrak{p}, M) \xrightarrow{x} \operatorname{Ext}_R^i(R/\mathfrak{p}, M) \to 0$$

が完全。よって、$x \in \mathfrak{m}$ に注意すると、中山の補題により $\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p}, M) = 0$ となってしまう（この加群は有限生成 R 加群なことにも注意)。よって局所化してもちろん $\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p}, M)_\mathfrak{p} = 0$ となってしまい、矛盾である。

以上より $\operatorname{Ext}^{i+1}_R(k, M) \neq 0$ でなければならない。 □

Bass の補題を使った次の不等式は非常に有用であり、あとで何回か使う。

命題 9.12. $(R, \mathfrak{m})$ をネーター局所環、M を有限生成 R 加群、$\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ を取ると、次が成り立つ:

$$\operatorname{depth}_R M \leq \operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} + \dim R/\mathfrak{p} \leq \dim_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} + \dim R/\mathfrak{p} \leq \dim M$$

とくに M が CM 加群ならば、上のすべての量は等しい。

証明. 一般に $\operatorname{depth}_R M \leq \dim M$ が成り立つことを系 9.11 で示しているので、最初の不等号のみ示せればあとは明らかに従う。

まず記号を準備：

$$t = \operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$$
$$d = \dim R/\mathfrak{p}$$

このとき $\operatorname{depth}_R M \leq t + d$ を示したいのであるが、depth の定義により $\mu^{t+d}_R(\mathfrak{m}, M) \neq 0$ を示せばよい。Bass の補題つかって登ってやる戦略を取る。

まず $\operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} = t$ なことより、$\mu^t_{R_\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p}) \neq 0$ である。定義に戻れば分かるように、これは $\mu^t_R(\mathfrak{p}, M) \neq 0$ とも同じである。以下 Bass 数の基礎環はすべて R でとる。

次に $\dim R/\mathfrak{p} = d$ なことより、$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_d = \mathfrak{m}$ という saturated chain が取れる（実は、$\dim R/\mathfrak{p} = d$ より弱く、d はどんな $\mathfrak{p}$ から $\mathfrak{m}$ への saturated chain の長さでもよい！）よって Bass の補題を帰納的に使うと、$\mu^{t+d}(\mathfrak{m}, M) = \mu^{t+d}(\mathfrak{p}_d, M) \neq 0$ が従い、主張が示された。 □

よって次の定義は自然である:

定義 9.13. R を可換ネーター局所環、$M \in \operatorname{mod} R$ とする。

(1) R が局所環のとき、M が *Cohen-Macaulay* **加群** (略して CM) であるとは、$M = 0$ であるか、$\operatorname{depth}_R M = \dim M$ が成り立つときをいう。
(2) M が**極大** *Cohen-Macualay* 加群（略して MCM）であるとは、$M = 0$ であるか、$\operatorname{depth}_R M = \dim M = \dim R$ が成り立つときをいう。これは $\operatorname{depth}_R M = \dim R$ とも同値である。
(3) MCM な R 加群のなす圏を $\mathsf{CM}\, R$ と書く（極大に限っていることに注意)。
(4) R が *Cohen-Macaulay* 環とは、R が R 加群とみて CM であるときをいう（つまり $R \in \mathsf{CM}\, R$)。

9.3. **local な場合の CM 加群や CM 環の性質.** Bass の補題を使うと、CM 加群は associated prime について次のような良い性質を持つことがとりあえず分かる:

命題 9.14. R をネーター局所環、M を有限生成 R 加群とする。このとき M が（極大と限らない）CM 加群ならば、$\operatorname{Assh} M = \operatorname{Min} M = \operatorname{Ass} M$ が成り立つ。つまり $\operatorname{Ass} M$ の元は全て isolated prime であり（embedded prime がない)、さらにどの prime のところで割ってもちょうど次元が出てくる。

証明. 一般に $\operatorname{Assh} M \subset \operatorname{Min} M \subset \operatorname{Ass} M$ であったので、任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ について $\dim R/\mathfrak{p} = \dim M$ であればよい。しかし系 9.11 より全ての $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ について $\operatorname{depth}_R M \leq \dim R/\mathfrak{p} \leq \dim M$ が成り立ち、M の CM 性より $\operatorname{depth}_R M = \dim M$ である。よって自動的に $\dim R/\mathfrak{p} = \dim M$ が成り立つ。 □

また *CM* **性が局所化で保たれる**ことを示す。これは他の本だと、正則列をつかってよく分からん方法をしているが、Bass の補題（を使った命題 9.12）を使えばすぐだと思う。

定理 9.15. R を可換ネーター局所環、$M \in \operatorname{mod} R$ とし、$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ を任意にとる。次が成り立つ。

(1) M が CM 加群ならば、$M_\mathfrak{p}$ も CM な $R_\mathfrak{p}$ 加群であり、$M_\mathfrak{p} \neq 0$ なら次が成り立つ:

$$\dim_R M = \dim_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} + \dim R/\mathfrak{p}$$

(2) M が MCM 加群ならば、$M_{\mathfrak{p}}$ も MCM な $R_{\mathfrak{p}}$ 加群である。
(3) R が CM（局所）環ならば、$R_{\mathfrak{p}}$ も CM 局所環であり、次の等式が成り立つ:

$$\dim R = \dim R_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} \quad (= \operatorname{ht}\mathfrak{p} + \dim R/\mathfrak{p}).$$

証明. (1) 命題 9.12 により、M が CM なので次の等式が成り立つ:

$$\operatorname{depth}_R M = \operatorname{depth}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = \dim_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = \dim M$$

とくに $\operatorname{depth}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = \dim_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}$ なので $M_{\mathfrak{p}}$ は CM である。
(2) 命題 9.12 の不等式を、後半をちょっと変えると

$$\operatorname{depth}_R M \leq \operatorname{depth}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} \leq \dim_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} \leq \dim R_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} \leq \dim R$$

という不等式が成り立つ。よって M が MCM つまり $\operatorname{depth} M = \dim R$ ならば、これらの量は全て等しくなり、とくに $\operatorname{depth}_{R_{\mathfrak{p}}} = \dim R_{\mathfrak{p}}$ となり $M_{\mathfrak{p}}$ は MCM である。
(3) は (1) や (2) の系である。 □

また実用上使いやすいものとして、正則元で割って CM 環をつくるというものがある。

命題 9.16. $(R, \mathfrak{m})$ を可換ネーター局所環とし、M を有限生成 R 加群とする。このとき次が成り立つ。

(1) M 正則な $\mathfrak{m}$ の元 x を取ると、

$$\operatorname{depth}_{R/(x)} M/Mx = \operatorname{depth}_R M/Mx = \operatorname{depth}_R M - 1$$

が成り立つ。
(2) M 正則な $\mathfrak{m}$ の元 x について、M が i 次元 CM 加群であることと、M/Mx が $R/(x)$ 加群とみて $i-1$ 次元 CM 加群であることは同値（R 加群とみても同じである）。
(3) M 正則かつ R 正則な $\mathfrak{m}$ の元 x について、M が MCM な R 加群であることと、M/Mx は $R/(x)$ 加群とみて MCM 加群であることは同値。
(4) R 正則な $\mathfrak{m}$ の元 x について、R が d 次元 CM 環であることと $R/(x)$ が $d-1$ 次元 CM 環であることは同値。

証明. (1) depth の定義を「極大な正則列の長さ」と定義すれば、x から初めて M 正則列を伸ばして極大にすることができ、その長さが $\operatorname{depth}_R M$ であるので、それは明らかに $\operatorname{depth}_{R/(x)} M/Mx$ よりちょうど一つだけ大きい。
(2)(3)(4) これは (1) と命題 7.10 より、正則元で割ると次元も depth もちょうど 1 つ落ちることから明らか。 □

次に MCM 加群のなす圏の簡単な性質を述べる。

命題 9.17. $(R, \mathfrak{m}, k)$ を d 次元可換ネーター局所環とする。このとき、$\mathsf{mod}\,R$ での任意の短完全列

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

について、次が成り立つ:

(1) $L, N \in \mathsf{CM}\,R$ ならば $M \in \mathsf{CM}\,R$、つまり $\mathsf{CM}\,R$ は $\mathsf{mod}\,R$ の中で拡大で閉じている。
(2) $M, N \in \mathsf{CM}\,R$ ならば $L \in \mathsf{CM}\,R$、つまり $\mathsf{CM}\,R$ は $\mathsf{mod}\,R$ の中で epikernel で閉じている。
(3) この完全列が分裂してるならば、$M \in \mathsf{CM}\,R$ なら $L, N \in \mathsf{CM}\,R$、つまり $\mathsf{CM}\,R$ は直和因子で閉じている。

とくに $\mathsf{CM}\,R$ は、$\mathsf{mod}\,R$ から誘導される自然な完全圏構造を持つ。

証明. ともに $\operatorname{Ext}^i_R(k, -)$ で消えるかどうかを考えればすぐ分かる。
(1) 示したいのは $\operatorname{Ext}^{<d}_R(k, M) = 0$ なことなので、長短完全列考えればすぐ分かる（一般にこういう消滅条件は拡大で閉じる）

(2) こちらも同じやり方。同じく $\mathrm{Ext}_R^{<d}(k,L)=0$ を示したいが、$i<d$ について、$i>0$ では長完全列

$$\mathrm{Ext}_R^{i-1}(k,N)\to\mathrm{Ext}_R^i(k,L)\to\mathrm{Ext}_R^i(k,M)$$

があり、左と右がMCMより消えている。ので真ん中も消える。$i=0$ では $\mathrm{Hom}_R(k,L)\hookrightarrow\mathrm{Hom}_R(k,M)$ という単射があるのでオッケーである。

(3) Ext の消滅は直和因子に遺伝するので明らか。 □

よって $\mathsf{CM}\,R$ は完全圏である。R が CM なときは、より強く、resolving になることが言える。

定義 9.18. Enough proj なアーベル圏 $\mathcal{A}$ の部分圏 $\mathcal{E}$ が *resolving* であるとは次をいう:

(1) $\mathcal{E}$ は拡大と直和因子と epi-kernel で閉じている。
(2) $\mathcal{A}$ の任意の射影対象は $\mathcal{E}$ に含まれる

定義からすぐ次分かる。

命題 9.19. Enough proj なアーベル圏 $\mathcal{A}$ の部分圏 $\mathcal{E}$ が resolving であるとき、$\mathcal{E}$ は完全圏とみて enough proj. であり、$\mathcal{E}$ での射影対象は $\mathcal{A}$ でのそれに一致する。また $\mathcal{E}$ はべき等完備である。

CM 環では $R\in\mathsf{CM}\,R$ なので、$\mathsf{CM}\,R$ が resolving になる:

命題 9.20. R を可換 CM 局所環としたとき、$\mathsf{CM}\,R$ は $\mathsf{mod}\,R$ の resolving 部分圏である。とくに $\mathsf{CM}\,R$ はべき等完備で enough proj. な完全圏であり、射影対象はちょうど有限生成射影 R 加群である（実はこれは有限生成自由加群とも同じ）

証明. $R\in\mathsf{CM}\,R$ なことと、$\mathsf{CM}\,R$ は有限直和や直和因子で閉じることから、すべての $\mathsf{mod}\,R$ の射影的対象は $\mathsf{CM}\,R$ に含まれる。あとは明らかである。 □

9.4. **加群に付随する不変量（極小生成系の個数と type）.** ネーター局所環上の有限生成加群 M に対しては、$\mu(M)$ と $r(M)$ という 2 つの量が定まり、これらは（CM 圏の場合は）正準加群での双対のもとで対応する双対概念である。前者は M の極小生成系の個数、後者は *type* と呼ばれる。Bass 数と記号がかぶっているが標準的な記法なので許してください。

有限次元多元環の直感でいうと、$\mu(M)$ は「top に何個 simple がいるか＝射影被覆に何個の直既約射影加群がいるか」で、$r(M)$ は「socle に何個 simple がいるか＝移入包絡に何個の直既約移入加群がいるか」を測っている。このうち、$\mu(M)$ の方はそのままこれが定義にできるが、type の方は加群の depth が上がると定義を修正しなければならない。なぜなら、socle は simple からの Hom であるが、depth が 1 以上ならそれはゼロになってしまうからである。

$r(M)$ の定義の妥当性・有用性は、CM 圏上の正準加群による自己双対によって保証されるのでしばらく待ってほしい。

定義 9.21. $(R,\mathfrak{m},k)$ を可換ネーター局所環とし、$M\in\mathsf{mod}\,R$ について $t:=\mathrm{depth}_R\,M$ と置く。このとき次の自然数 $\mu(M),r(M)$ を定義する（ここで $\dim_k$ は k ベクトル空間としての次元である）。

(1) $\mu(M):=\dim_k M/M\mathfrak{m}=\dim_k \mathrm{top}\,M$。この量は、$M$ の射影被覆 $R^n\twoheadrightarrow M$ をとったときの n の値である（局所環は semiperfect なので射影被覆がある）、つまり M の生成系の最小の値である。
(2) $r(M):=\dim_k\mathrm{Ext}_R^t(k,M)=\mu^t(\mathfrak{m},M)$。この量を M の *type* と呼ぶ。つまり $\mathfrak{m}$ についての M の Bass 数のうち、消えていない一番小さい次数での値である（depth の定義より）。

$\mu(M)$ は計算が簡単であるが（top を計算する、つまり M を $M\mathfrak{m}$ で割れば良いので）、type の方はそのままの定義では Ext の計算になってしまう、しかし次のように、M 正則列をとって depth 0 に落としたときの socle の次元で調べられる（これが type の定義の妥当性の根拠の 1 つである）。

命題 9.22. $(R,\mathfrak{m},k)$ を可換ネーター局所環とし、$0\neq M\in\mathsf{mod}\,R$ とする。このとき $t:=\mathrm{depth}_R\,M$ とし、$\mathfrak{m}$ の中の M 正則元 $x_1,\cdots,x_t$ をとると、

$$r(M)=\dim_k\mathrm{Hom}_R(k,M/M(x_1,\cdots,x_t))=\dim_k\mathrm{soc}\,M/M(x_1,\cdots,x_t)$$

が成り立つ。とくに、任意の M 正則元 x について、

$$r_R(M) = r_{R/(x)}(M/Mx)$$

が成り立つ。

証明. 定理 9.6 の等号の言い換えである。後半は、x から始まる極大 M 正則列を取ればよい。 □

9.5. **global な CM 環の基本性質.** CM は、まず local に定義して、次に global には各極大イデアルごとに局所化して定義するのが普通である。

定義 9.23. R を可換ネーター環、$M \in \mathsf{mod}\, R$ とする。

(1) M が *CM* **加群**であるとは、任意の $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ について $M_\mathfrak{m}$ が $R_\mathfrak{m}$ 加群として CM のときをいう。つまり $\operatorname{depth}_{R_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m} = \dim_{R_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m}$ である。
(2) M が *MCM* **加群**であるとは、任意の $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ について $M_\mathfrak{m} \in \mathsf{CM}\, R_\mathfrak{m}$ となるときをいう。
(3) MCM な R 加群のなす圏を $\mathsf{CM}\, R$ とかく。
(4) R が Cohen-Macaulay 環であるとは、$R \in \mathsf{CM}\, R$ なときをいう。

注意 9.24. CM 性が局所化で保たれるという定理 9.15 により、上の「任意の $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ について」は全て「任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ について」と置き換えても同値である。あとでこっちも使うかもしれない。

CM 環が環論的によい性質を持つことを示す。

定義 9.25. 可換ネーター環 R が鎖状 *(catenary)* であるとは、任意の素イデアルの包含 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ に対して、$\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ を結ぶ素イデアルの saturated chain $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_l = \mathfrak{q}$ の長さ l が等しいときをいう。

注意 9.26. ネーター環を考えているので、標高定理により、$\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ を結ぶ chain の長さには上限 $\operatorname{ht}_{R/\mathfrak{q}} \mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ がある。よって任意の chain は必ず有限な saturated chain へと細分できるが、その saturated chain はもしかしたらこの上限より長さが短いかもしれない。それが起こらないことを保証しているのが catenary である。

まず鎖状性を導く次の等式がある:

補題 9.27. 可換ネーター環 R について、任意の素イデアルの包含 $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ に対し

$$\operatorname{ht} \mathfrak{q} = \operatorname{ht} \mathfrak{p} + \operatorname{ht}_{R/\mathfrak{q}} \mathfrak{p}/\mathfrak{q}$$

が成り立つならば、R は鎖状である。

証明. 任意に $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_l = \mathfrak{q}$ という saturated chain をとったとき、$l = \operatorname{ht}_{R/\mathfrak{q}} \mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ を示せば十分である。しかし saturated の条件より明らかに $\operatorname{ht}_{R/\mathfrak{p}_{i-1}} \mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_{i-1} = 1$ であるので各 $\mathfrak{p}_{i-1} \subset \mathfrak{p}_i$ に仮定を使ってやれば、帰納的に $\operatorname{ht} \mathfrak{q} = \operatorname{ht} \mathfrak{p} + l$ が従うのでよい。 □

定理 9.28. Cohen-Macaulay 環は鎖状である。

証明. 任意の素イデアルの包含 $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ を取る。$R_\mathfrak{q}$ は CM 環の定理 9.15 により CM 局所環であり、

$$\dim R_\mathfrak{q} = \dim R_\mathfrak{p} + \dim R_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{q}$$

が成り立つ、つまり

$$\operatorname{ht} \mathfrak{q} = \operatorname{ht} \mathfrak{p} + \dim R_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{q}$$

である。 □

また、次の補題はよく用いる（*Depth lemma* と呼ぶ）。

補題 9.29. R を d 次元可換ネーター環とする。このとき $\mathsf{mod}\, R$ での次の完全列

$$0 \to M_d \to X_{d-1} \to \cdots \to X_0 \to M \to 0$$

が当たられたとき、各 X_i が MCM であるならば、M_d は必ず MCM である。

証明. 任意の $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ を取って局所化すれば、次を示せばよいことがすぐ分かる:

$(R, \mathfrak{m}, k)$ を d 次元可換ネーター局所環とすると、任意の $\operatorname{mod} R$ での短完全列

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

について、Y が MCM ならば、$\operatorname{depth} X = \min\{d, \operatorname{depth} Z + 1\}$ である。

実際、$i = \operatorname{depth} Z$ とする。このとき $\operatorname{Ext}_R^{<i}(k, Z) = 0$ が $\operatorname{depth} Z = i$ より成り立ち、また $i \leq d$ よりもちろん $\operatorname{Ext}_R^{<i}(k, Y) = 0$ も $\operatorname{depth} Y = d$ より成り立つ。なので長完全列を伸ばせばすぐ $\operatorname{Ext}_R^{<i}(k, X) = 0$ が従う。なので $\operatorname{depth} X \geq i$ である。

まず $i = d$ のときは、$\operatorname{depth} X \leq \dim R = d$ なので $\operatorname{depth} X = d$ が従う。次に $i < d$ のときは、

$$\operatorname{Ext}_R^i(k, Y) \to \operatorname{Ext}_R^i(k, Z) \to \operatorname{Ext}_R^{i+1}(k, X)$$

という長完全列があるが、$i < d = \operatorname{depth} Y$ より最初の項はゼロ。一方、$\operatorname{depth} Z = i$ なので真ん中の項はゼロでない。よって $\operatorname{Ext}_R^{i+1}(k, X) \neq 0$ でなければならない。よって $\operatorname{depth} X = i + 1$ である。 □

命題 9.30. R を可換 1 次元 Cohen-Macaulay 環とする。このとき、$M \in \operatorname{mod} R$ について、次は同値:

(1) $M \in \mathsf{CM}\, R$.
(2) $\operatorname{soc} M_R = 0$.
(3) M は torsion-free.

証明. (1) ⇒ (2): $\operatorname{soc} M \neq 0$ とする。このときある $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ に対して $R/\mathfrak{m} \hookrightarrow M$ という単射がある。局所化して $k(\mathfrak{m}) \hookrightarrow M_{\mathfrak{m}}$ という $\operatorname{mod} R_{\mathfrak{m}}$ での射を得る。ここで R が CM より $\mathcal{R}_{\mathfrak{m}}$ も CM 環。 □

10. 移入加群の構造について

いわゆる Matlis の理論周辺をやります。非可換でいくとこは非可換でやる。

10.1. uniform 加群と直既約移入加群.

定義 10.1. Λ を非可換環、$0 \neq M \in \operatorname{Mod} \Lambda$ をとる。これが *uniform* 加群であるとは、M の任意の 2 つの non-zero 部分加群について、その共通部分も必ず non-zero なときをいう。

有限次元多元環の人にとっては、これはつまり simple socle を持つことと同じである。また essential submodule を知っている人は、「すべての non-zero 部分加群が essential であるような加群」である。というか essential をすぐ使うのでやる。

補題 10.2. 環 Λ 上の加群 $M \in \operatorname{Mod} \Lambda$ について次が成り立つ。

(1) M が単純ならば uniform である。
(2) M が uniform ならば直既約である。
(3) M が uniform ならば、任意の non-zero 部分加群も uniform である。
(4) M が uniform なことと、M は任意の non-zero 部分加群の本質拡大であること（つまり任意の non-zero 部分加群が本質部分加群であること）は同値である。
(5) M が uniform 加群 N の本質拡大ならば M も uniform である。

つまり uniform 加群は、部分加群をとる操作や本質拡大を取る操作で閉じている。

証明. (1),(2),(3) は明らかである。(4) も本質拡大の定義より明らかである。

(5) だけ示す。$0 \neq L_1, L_2 \leq M$ をとると、N が M の中で本質的なことから $N \cap L_1, N \cap L_2 \neq 0$ である。また N が uniform なことから、$(N \cap L_1) \cap (N \cap L_2) \neq 0$ である。よって $L_1 \cap L_2 \neq 0$ である。 □

また次も定義からすぐ分かる:

命題 10.3. 環 Λ 上の加群 $M \in \operatorname{Mod} \Lambda$ について次は同値である:

(1) M は uniform.
(2) M は任意の non-zero 部分加群の本質拡大。
(3) M はある uniform 加群の本質拡大。
(4) ある Λ の右イデアル I で Λ/I が uniform なものがあり、M は Λ/I の本質拡大。

証明. (4) 結局 M が uniform なら、M の中のゼロでない元を適当に選んで、それで生成される部分加群を考えれば、それは Λ/J と同型なのでよい。 □

注意 10.4. 加群が uniform かどうかは部分加群のなす束だけで決まるので、一般のアーベル圏上でも uniform object の概念は定義できる。一般のアーベル圏上で上の定理の (4) 以外は成り立つ（はず)。

一般の環では、「射影加群よりも移入加群のほうがよく振る舞う」ことが多く、次のようなことが言える（projective だとぜんぜん嘘)（移入包絡の存在とか、以下でやる直既約性など)。「移入包絡」とは単に移入加群への本質拡大だったことを思い出してほしい。

定理 10.5. Λ を任意の環、$E \neq 0$ を移入的な Λ 加群とすると次は同値:

(1) E は uniform。
(2) $\mathrm{End}_\Lambda(E)$ が局所環。
(3) E_Λ は直既約。
(4) 任意の部分加群 $0 \neq N \leq L$ に対して L は N の移入包絡。
(5) E はある uniform 加群 M の移入包絡。
(6) ある Λ の右イデアル J で Λ/J が uniform 加群であるようなものがあり、M は Λ/J の移入包絡。

証明. すぐ上の命題より、(1)(4)(5)(6) は同値である。

(1) $\Rightarrow$ (2) これは移入性を使う（逆に、dual の議論もなりたつので、双対的な命題が射影加群についてもなりたつ)。

局所環の特徴づけの一つである次を示す:

(Claim): $f, g \in \mathrm{End}_\Lambda(E)$ **がともに非同型ならば** $f+g$ **も非同型である.**

まず E が直既約（uniform より）で移入的なことに注意すると、「$f \in \mathrm{End}_\Lambda(E)$ について、f が非同型なことと、f が単射でないことは同値」である。これには非同型ならば単射でないことを示せばよいが、単射だったとしたら、E が移入的より f は分裂してしまい、E が直既約なことより f は同型になってしまう。

よって、f と g は単射ではない、つまり $\operatorname{Ker} f, \operatorname{Ker} g \neq 0$ である。uniform 性を使えば、$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \neq 0$ となるので、ここから $f+g$ も単射でないことが従う、実際 $\operatorname{Ker}(f+g) \supset \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \neq 0$ なので。

(2) $\Rightarrow$ (3): 一般に加群について「End 環が局所環ならば直既約」が言える。

(3) $\Rightarrow$ (4): あれ、と思う方がいるかも知れない、直接 uniform 性を示すのではなく、移入包絡になることを示す。**ここの部分の証明は、「任意の加群が移入包絡を持つ」ことを用いるので、双対的な議論は成り立たない！**ここが移入性がきくところである（しかし後で書くように、移入包絡の存在が分かっているアーベル圏ならこの同値が回る）

実際、アーベル群として $\mathbb{Z}$ は直既約射影対象だが、uniform 性の双対は満たさず、また End 環も local でない！

証明に戻る。$0 \neq M \leq E$ という部分加群をとる。このとき「M は移入包絡を持つ」ので、それを $E(M)$ とすると次の図式ができる:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & E(M) \arrow[d, "\iota"] \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & E \end{tikzcd}$$

ここで移入包絡性より、ι は単射になるが、$E(M)$ が移入的より ι は section になる。しかし E が直既約だったことから、ι は同型でなければならない。よって実は E は M の移入包絡になっている！

こういうちょっとずるい議論をする。 □

注意 10.6. 上で述べたように、「uniform 性」の双対として、「任意の真の部分加群の和もまた真の部分加群になる」という条件で uniform 性の双対概念が定義できる（有限次元多元環ではつまり top が simple なものである）。これについても上の命題が、射影加群について成り立つのではと予想されるが、なりたたない！その原因は、加群は必ず射影被覆を持つとは限らないからであり、その対称性の破れは、加群圏が Grothendieck 圏なことから来ている。

10.2. **可換の場合の、直既約移入加群の構造.** 定理 10.5 により、直既約移入加群を分類するには、Λ/J が uniform となるような右イデアルを探せば良い。可換の場合にこれを考え、実は可換ネーター環では直既約移入加群と素イデアルが一対一対応するという基本的な結果をめざす。

実は、Λ/J が uniform という条件は、すでに出てきていて、J が Λ の meet-irred. な部分加群であることと明らかに同値である（定義 5.8)。ここらへんを整理すると次のようになる。

命題 10.7. R を可換ネーター環とし、I を R の真のイデアルとする。次の条件を考える:

(1) I は素イデアル。
(2) I は R の meet-irred. なイデアル、つまり R/I が uniform な R 加群。
(3) I は primary イデアル、つまり $\operatorname{Ass} R/I$ が一元集合。

このとき (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) が成り立つ。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): $I = \mathfrak{p}$ とし、$\mathfrak{p} \subsetneq I_1, I_2$ なるイデアルに対して $\mathfrak{p} \subsetneq I_1 \cap I_2$ を示せばよい。実際、$x_i \in I_i \setminus \mathfrak{p}$ を取れば、$\mathfrak{p}$ が素イデアルより $x_1x_2 \notin \mathfrak{p}$ だが、明らかに $x_1x_2 \in I_1 \cap I_2$ なので $\mathfrak{p} \subsetneq I_1 \cap I_2$ である。

(2) $\Rightarrow$ (3): 補題 5.10 である。 □

補題 5.10 では、より強く「uniform 加群は coprimary である」が示せていたことに注意されたい。以上から次のことが分かる:

定理 10.8. R を可換ネーター環とすると、次の全単射がある:

$$\begin{array}{rcl} \{\text{直既約移入的 } R \text{ 加群の同型類}\} & \xleftrightarrow{1:1} & \operatorname{Spec} R \\ E & \longmapsto & \operatorname{Ass}_R E \text{ の（unique な）元} \\ E(R/\mathfrak{p}) & \longleftarrow\!\shortmid & \mathfrak{p} \end{array}$$

ここで $E(R/\mathfrak{p})$ とは R 加群 $R/\mathfrak{p}$ の移入包絡である。

証明. (well-defined): まず直既約移入加群 E をとると、定理 10.5 により E は uniform であるので、補題 5.10 により E は coprimary、つまり $\operatorname{Ass}_R E$ は一元集合。なので左から右の写像が定義できる。

逆に右から $\mathfrak{p}$ を取ると、$R/\mathfrak{p}$ は命題 10.7 により uniform であり、よって定理 10.5 により $E(R/\mathfrak{p})$ は直既約移入加群である。

(左から取ってもとに戻るか): 直既約移入加群 E を取り、その associated prime $\mathfrak{p}$ をとる。すると $R/\mathfrak{p}$ は E の部分加群になっているが、定理 10.5 により、E は自動的に $R/\mathfrak{p}$ の移入包絡 $E(R/\mathfrak{p})$ に一致している。

(右から取ってもとに戻るか): $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ をとる。このとき $R/\mathfrak{p}$ は $E(R/\mathfrak{p})$ の部分加群である。しかし $\{\mathfrak{p}\} = \operatorname{Ass} R/\mathfrak{p} \subset \operatorname{Ass} E(R/\mathfrak{p})$ なことと $\operatorname{Ass} E(R/\mathfrak{p})$ が一元集合なことより、$\operatorname{Ass} E(R/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$ である。 □

10.3. **非可換ネーター環上の移入加群の構造.** 実はネーター環上では、移入加群は直既約移入加群の（無限）直和で書けるという構造定理が成り立つ。これも射影加群では一般には無理（なはず）で、移入加群の性質の良さを示している。

まず、ネーター環では移入加群の無限直和も移入加群である。一般に移入加群は直積で保たれるが、直和で保たれるとは限らなかったことに注意されたい。実は「移入加群が無限直和で閉じる」が右ネーター性を逆に特徴づけたりするらしい。

後で使いやすいように、より一般的な形でまず移入次元の判定を述べる。実はネーター代数ではより便利な判定法がある。

命題 10.9. Λ を任意の環、$M \in \mathsf{Mod}\,\Lambda$ を取る。このとき次は同値である:

(1) $\mathsf{id}\, M_\Lambda \leq n$ である、つまり M の移入次元が n 以下である。
(2) 任意の $X \in \mathsf{Mod}\,\Lambda$ について $\mathrm{Ext}_\Lambda^{>n}(X, M) = 0$ である。
(3) 任意の $X \in \mathsf{Mod}\,\Lambda$ について $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(X, M) = 0$ である。
(4) 任意の有限生成 Λ 加群 X について $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(X, M) = 0$ である。
(5) 任意の Λ の右イデアル A について $\mathrm{Ext}_\Lambda^{n+1}(\Lambda/A, M) = 0$ である。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5): 明らか。

(5) $\Rightarrow$ (1): 基本的に Baer の判定法に帰着させる。M の移入分解の $n-1$ 項目まで考えて、

$$0 \to M \to E^0(M) \to E^1(M) \to \cdots \to E^{n-1}(M) \to X \to 0$$

という完全列で、各 $E^i(M)$ が移入的であるようなものをとる(極小であってもいいしなくてもいい)。このとき X が移入的なことを示せばよい。$n = 0$ のときは $X = M$ としている。

任意の Λ の右イデアル A をとる。このとき Baer の判定法より、包含 $A \hookrightarrow \Lambda$ から誘導される写像 $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, X) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, X)$ が全射であればいいが、Ext の完全列考えると、このためには $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(\Lambda/A, X) = 0$ であればよい。

先の移入分解に Ext の長完全列を適応して、帰納的にすぐ $\mathrm{Ext}_\Lambda^1(\Lambda/A, X) = 0$ が出る。よって上に述べた Baer の判定法より X は移入的である。 $\square$

移入性については基本的に Baer の判定法から進歩していないが、ネーター性の仮定では右イデアルが有限生成であることを用いて、次が示せる。(ネーター性の特徴づけはそんなテクニカルじゃなかったので、やったことなかったがついでにやる。でも面倒なことには変わりないので、読むときは飛ばしていいです。)

命題 10.10. Λ を環としたとき次は同値である。

(1) Λ は右ネーター環である。
(2) 任意の移入的右 Λ 加群の族 $E_i \in \mathsf{Mod}\,\Lambda$ $(i \in I)$ に対して、$\bigoplus_{i \in I} E_i$ も移入的である。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) Baer の判定法により、Λ の任意の右イデアル M に対して、包含 $M \hookrightarrow \Lambda$ が誘導する下の上の写像が全射ならよい。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, \bigoplus_i E_i) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(M, \bigoplus_i E_i) \\
\bigoplus_i \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, E_i) \arrow[r] \arrow[u, "\simeq"] & \bigoplus_i \mathrm{Hom}_\Lambda(M, E_i) \arrow[u, "\simeq"]
\end{tikzcd}$$

ここで Λ が**右ネーターより**、M(と Λ)は有限生成なので、縦の自然な写像は同型である。下の直和の各成分は E_i の移入性より全射であるので、その直和として下の射は全射。よって従う。

(2) $\Rightarrow$ (1): Λ の右イデアルの上昇列 $M_1 \leq M_1 \leq M_n \leq \cdots$ を取り、$M := \bigcup M_i$ とする。この M はまた右イデアルことがすぐに分かる。

ここで、$E(\Lambda/M_i)$ を Λ/M_i の移入包絡とする。*(2)* **の仮定より** $\bigoplus_i E(\Lambda/M_i)$ は移入的である。ここで次の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \Lambda \arrow[dl, dashed, "\overline{\varphi}"] \\
& \bigoplus_i E(\Lambda/M_i) &
\end{tikzcd}$$

この φ をどう作るかか鍵である。自然な写像 $M \hookrightarrow \Lambda \to \prod_i(\Lambda/M_i)$ を考える。この像で各 $x \in M$ を取ると、$x \in M_i$ なる i が定義より存在するので、その i 以上では x は上の写像でゼロに飛ぶ。つまりこの写像 $M \to \prod_i(\Lambda/M_i)$ の像は $\bigoplus_i(\Lambda/M_i)$ に入っている！

あとはこの $M \to \bigoplus_i(\Lambda/M_i)$ に包含 $\bigoplus_i(\Lambda/M_i) \hookrightarrow \bigoplus_i E(\Lambda/M_i)$ を合成したものを φ とする。以下 Λ/M_i を $E(\Lambda/M_i)$ の部分集合とみなしておく。するとつまり $\varphi(x)$ の i 成分は単に $x+M_i$ である。

このように φ を定義すると、$\bigoplus_i E(\Lambda/M_i)$ の移入性より上を可換にする $\overline{\varphi}$ が存在する。しかし Λ は有限生成であることから、（1 の行き先とか考えれば）ある j が存在し、$\overline{\varphi}$ の像は j 以上のところではゼロである。よって φ の像もある j 以上ではゼロとなる。

つまり、この j に対して、任意の $x \in M$ の φ での像 $\varphi(x)$ の j 以上の成分はゼロ、とくに j 成分だけに注目すれば $x + M_j = M_j$、つまり $x \in M_j$ が従っている。落ち着けばこれは、$M = M_j$ を意味し、よって最初にとった上昇列は止まっている。よって Λ は右ネーターである。 □

よってネーター環では移入加群が無限直和で保たれるのであるが、そのある意味逆として、任意の移入加群が直既約移入加群の（無限）直和となることを示す。（実はこれが成り立てばネーター性も従うらしい…）

準備としてネーター加群の場合を先に示す。

補題 10.11. Λ を環、M をネーター的右 Λ 加群とする。このとき、M の移入包絡 $E(M)$ は直既約移入加群の有限直和と同型である。

証明. かけないとしてネーター性と違反させる（ネーター加群がかならず直既約分解をもつことの証明と全く同じ！）まず最初に、$E(M)$ における M の本質性より、「$E(M)$ のゼロでない部分加群は必ず M との共通部分がゼロでない」ことを思い出す。

$E(M)$ 自身が直既約であれば終わり。もし違うなら、非自明な直和分解 $E(M) = E_1 \oplus E'$ が取れる。もし両方が直既約ならそこで終わり。E' が直既約でないとしてよい。よって $E' = E_2 \oplus E''$ と直和分解され、つまり $E(M) = E_1 \oplus E_2 \oplus E''$ である。もし E_2 と E'' がともに直既約なら終わり $\cdots$

この操作を繰り返すと、ゼロでない M の直和因子 $E_1, E_2, \cdots$ ができる。しかし各 $M_i := M \cap E_i$ はゼロでなく、明らかに各 M_i たちは直和になっている。よって M の部分加群の真の無限上昇列 $M_1 < M_1 \oplus M_2 < M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 < \cdots$ ができ、M のネーター性に矛盾する。 □

単に M が有限生成という仮定だけでは上の証明は回らないことに注意されたい。

命題 10.12. Λ を右ネーター環、E を移入的右 Λ 加群とすると、

$$E = \bigoplus_{i \in I} E_i$$

という直和分解であり、各 E_i が直既約移入加群であるものが存在する。

証明. Zorn と補題を使えばすぐ。

まずそもそも E が直既約な直和因子を持つことを示す。E はもちろん有限生成な部分加群 $M \neq 0$ をもつ（たとえば $x \neq 0$ を適当に E から選んで $M := x\Lambda$ とでもすればよい）。その移入包絡 $E(M)$ を考えると、

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, hook] & E(M) \arrow[dl, dashed] \\ & E & \end{tikzcd}$$

となり、$M \hookrightarrow E(M)$ が本質拡大なことから点線は単射、$E(M)$ が移入的より点線は分裂単射。よって $E(M)$ が直既約な直和因子を含めばよい（もし考えているのが可換ネーター環なら、M の associated prime をとればここで証明がおわる）。しかし Λ が右ネーターなことから M もネーター的より、$E(M)$ は直既約移入加群の直和より大丈夫。

以上より「E の直既約な直和因子（E の部分加群として固定してみなす）全体」を $E_i\,(i \in I)$ とすると、「I の部分集合のうち、対応する E_i たちが直和になるようなもの全体」という集合 X を考える。まず I は上のことから空でないので、一つのみからなるものを考えれば X は空でない。また、

I の部分集合としての包含を考えて X に順序を入れると poset になり、明らかに Zorn の補題の適応条件を満たす。よって Zorn の補題より X に極大元 $\mathcal{I}$ が存在する。

このとき $E' := \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} E_i$ という E の部分加群があるが、Λ が右ネーターよりこれは移入加群である。よって包含を考えれば明らかに、E' は E の直和因子となっている。つまり $E = E' \oplus E''$ となる。

しかしもし $E'' \neq 0$ とすると、最初の議論より E'' は直既約な直和因子を持つ。よってそれを $\mathcal{I}$ に付け加えてやれば明らかに極大性に矛盾する。よって $E'' = 0$ でなければならない。 □

11. Bass 数の、極小移入分解での解釈

可換ネーター環上の移入加群は、すでにやったことから次のような構造をしている:

系 11.1. R を可換ネーター環とすると、$E \in \mathsf{Mod}\, R$ が移入加群であることと、

$$E \cong \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec} R} E(R/\mathfrak{p})^{\oplus n_{\mathfrak{p}}}$$

という同型がある（$n_{\mathfrak{p}}$ は 0 以上の自然数）ことは同値である。

証明. 定理 10.8 と命題 10.12 より。 □

つまり移入加群を指定するには、各素イデアルについて $E(R/\mathfrak{p})$ が何個直和しているかという情報を決めればよい。これが実は加群の Bass 数と関係している（というかそっちを Bass 数の定義にしたりもする）ことをみていく。

念の為に極小移入分解を定義しておく。

定義 11.2. Λ を非可換環、M を Λ 加群とすると、

$$0 \to M \to E^0(M) \to E^1(M) \to E^2(M) \to \cdots$$

が M の**極小移入分解**であるとは、$E^0(M)$ が M の移入包絡であり、その包含 $M \to E^0(M)$ の余核の移入包絡が $E^1(M)$ であり、、、というものをいう。これらの $E^i(M)$ は M のみから同型を除いて一意的に定まる（極小移入分解の一意性）より、以下単に $E^i(M)$ と書いたら、M の極小移入分解の i 番目の移入加群を指すこととする。また $E(M) := E^0(M)$ とよく書く。

重要なのは、**非可換環上の任意の加群は、必ず移入包絡を持つ**ことであり、これは総対概念である射影被覆がそうと限らないことと対照的である。よってどんな環上の加群 M に対しても、一意的に $E^i(M)$ という移入加群の系列が定まる。

本節の目標を先に書いておく:

定理 11.3. R を可換ネーター環、M を有限生成 R 加群とする。このとき、

$$E^i(M) = \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec} R} E(R/\mathfrak{p})^{\oplus\mu^i(\mathfrak{p},M)}$$

が成り立つ、ここで $\mu^i(\mathfrak{p}, M)$ は M の $\mathfrak{p}$ での Bass 数（定義 9.8）

$$\mu^i(\mathfrak{p}, M) = \ell_{R_{\mathfrak{p}}} \operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{p}, M)_{\mathfrak{p}}$$

であり、とくに 0 以上の自然数である。

つまり、何度もほのめかしてきたとおり、Bass 数を決定することと、加群の極小移入分解の表示を求めることは同等である！

これの証明は各素イデアルで局所化するが、そのために極小移入分解の局所化もまた極小移入分解であることなどを示していく。

11.1. 極小移入分解の局所化. ネーター代数の一般性でやるので証明はそちらを参照してもらうが、一応ステートメントだけ可換環でやる。

命題 11.4. R を可換ネーター環とし、S をその積閉集合とすると次が成り立つ:

(1) 任意の R 加群 E に対して、E が移入的 R 加群ならば、E_S は移入的 R_S 加群である。
(2) より一般に、任意の R 加群 E に対して次の等式が成り立つ:

$$\begin{aligned}\mathsf{id}_R E &= \sup\{\mathsf{id}_{R_\mathfrak{m}} E_\mathfrak{m} \mid \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R\} \\ &= \sup\{\mathsf{id}_{R_\mathfrak{p}} E_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R\}\end{aligned}$$

(3) $\mathsf{Mod}\, R$ での本質拡大 $M \hookrightarrow E$ を局所化した $M_S \hookrightarrow E_S$ も $\mathsf{Mod}\, R_S$ での本質拡大である。
(4) $\mathsf{Mod}\, R$ での移入包絡 $M \hookrightarrow E(M)$ を局所化した $M_S \hookrightarrow E(M)_S$ は $\mathsf{Mod}\, R_S$ での移入包絡である。
(5) $\mathsf{Mod}\, R$ での極小移入分解

$$0 \to M \to E^0(M) \to E^1(M) \to \cdots$$

が与えられると、その局所化

$$0 \to M_S \to E^0(M)_S \to E^1(M)_S \to \cdots$$

は $\mathsf{Mod}\, R_S$ での極小移入分解である。

証明. 命題 19.1 より。 □

また、次のように $R/\mathfrak{m}$ からの Ext は移入分解への Hom で計算できる。

命題 11.5. R を可換環、M を R 加群とし、M の極小移入分解

$$0 \to M \to E^0 \to E^1 \to E^2 \to \cdots$$

を取る（常に取れる）。このとき任意の $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ と $i \geq 0$ に対して、

$$\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M) \cong \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, E^i)$$

という同型が存在する。

証明. 命題 19.2 より。 □

また $E(R/\mathfrak{p})$ という加群の局所化について次を見ておく:

補題 11.6. R を可換ネーター環、$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ とすると、

$$\operatorname{Supp}_R E(R/\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q} \mid \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}\}$$

が成り立ち、更に $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{p})$ に対して同型

$$E(R/\mathfrak{p})_\mathfrak{q} \cong E_{R_\mathfrak{q}}(R_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{q})$$

が成り立つ、ここで右辺は $R_\mathfrak{q}$ 加群としての移入包絡である。

証明. 前半は、定理 10.8 より $E(R/\mathfrak{p})$ は $\mathfrak{p}$-coprimary であり、系 4.19 より従う。
後半は、移入包絡

$$0 \to R/\mathfrak{p} \to E(R/\mathfrak{p})$$

を局所化しても移入包絡であること（命題 11.4）より従う。 □

以上のもとで Bass 数の特徴付けができるはずである。また次のことは Matlis 双対でも使うので書いておく。

補題 11.7. $(R,\mathfrak{m},k)$ を可換ネーター局所環とすると、$\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}R$ について、

$$\operatorname{Hom}_R(k,E(R/\mathfrak{p}))=\operatorname{soc}_R E(R/\mathfrak{p})=\begin{cases}k & (\mathfrak{p}=\mathfrak{m})\\ 0 & (\mathfrak{p}\neq\mathfrak{m})\end{cases}$$

が成り立つ。

証明. $\operatorname{Ass}E(R/\mathfrak{p})=\{\mathfrak{p}\}$ なこと（定理 10.8）より、$\mathfrak{p}\neq\mathfrak{m}$ なときに $\operatorname{soc}E(R/\mathfrak{p})=0$ が成り立つ。

よって $\operatorname{soc}E(k)=k$ を示せばよい。k は $E(k)$ の部分加群とみなしていて、また任意の $E(k)$ の単純部分加群は、本質拡大性よりこの k と交わる、よってこの k に一致しなければばならない。ゆえに $\operatorname{soc}E(k)=k$ が従う。 □

基本的に、局所環の極大イデアルの場合に帰着させるので、その場合を始めに証明する:

補題 11.8. $(R,\mathfrak{m},k)$ を可換ネーター局所環、M を R 加群とする。このとき $E^i(M)$ の中での $E(k)$ の重複度は $\mu^i(\mathfrak{m},M)$ に等しい。

証明. まず Bass 数を計算すると（ここで dim は k ベクトル空間としての次元）、

$$\begin{aligned}\mu^i(\mathfrak{m},M)&=\dim_k\operatorname{Ext}^i_R(k,M)\\&=\dim_k\operatorname{Hom}_R(k,E^i)\\&=\dim_k\operatorname{soc}_R E^i\end{aligned}$$

ここで二番目の等号に命題 11.5 を使った。

一方

$$E^i:=\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}R}E(R/\mathfrak{p})^{\oplus n^i_\mathfrak{p}}$$

と定めると、

$$\begin{aligned}\operatorname{soc}_R E^i&=\operatorname{soc}_R\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}R}E(R/\mathfrak{q})^{\oplus n^i_\mathfrak{p}}\\&=\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}R}\operatorname{soc}_R E(R/\mathfrak{p})^{\oplus n^i_\mathfrak{p}}\end{aligned}$$

であるが、補題 11.7 を使えば、まとめて

$$\begin{aligned}\mu^i(\mathfrak{m},M)&=\dim_k\operatorname{soc}_R E(R/\mathfrak{m})^{\oplus n^i_\mathfrak{m}}\\&=\dim_k k^{\oplus n^i_\mathfrak{m}}\\&=n^i_\mathfrak{m}\end{aligned}$$

が成り立つ。 □

Proof of 定理 *11.3.* R を可換ネーター環、M を R 加群とし、M の極小移入分解の i 番目を

$$E^i:=\bigoplus_{\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}R}E(R/\mathfrak{q})^{\oplus n^i_\mathfrak{q}}$$

とおく。i と $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}R$ を固定し、$n^i_\mathfrak{p}=\mu^i(\mathfrak{p},M)$ であることを示す。

まず命題 11.4 により、$E^i_\mathfrak{p}$ は $R_\mathfrak{p}$ 加群としての $M_\mathfrak{p}$ の極小移入分解の i 項目である。一方、

$$E^i_\mathfrak{p}=\bigoplus_{\mathfrak{q}\in V(\mathfrak{p})}E(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{p})^{\oplus n^i_\mathfrak{q}}$$

が補題 11.6 より従う。

ここでネーター局所環 $(R_\mathfrak{p},\mathfrak{p}R_\mathfrak{p})$ 上の加群 $M_\mathfrak{p}$ に補題 11.8 を使えば、

$$\mu^i_{R_\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}R_\mathfrak{p},M_\mathfrak{p})=n^i_\mathfrak{p}$$

だが、$\mu_{R_\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}R_\mathfrak{p},M_\mathfrak{p})^i=\mu^i_R(\mathfrak{p},M)$ が定義より成り立つ。よって証明終わり。 □

また Bass 数が消えているかどうかを気にすることは、次のように、極小移入分解の associated prime を考えるのと同じである。これは補題 4.13 の「高次元化」であることに注意。

命題 11.9. R を可換ネーター環、M を有限生成 R 加群、

$$0 \to M \to E^0(M) \to E^1(M) \to \cdots$$

を極小移入分解とする。このとき $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ と $i \geq 0$ について次は同値:

(1) $\mu^i(\mathfrak{p}, M) \neq 0$ である。
(2) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} E^i(M)$ である。

証明. もちろん定理 11.3 からも出せるが、直接証明するほうが楽で手っ取り早い。

$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ を固定する。与えられた極小移入分解を $\mathfrak{p}$ で局所化すると $R_\mathfrak{p}$ 加群としての $M_\mathfrak{p}$ の極小移入分解が得られる（命題 11.4）ことを思い出そう。次の同値で主張が従う。

$$\mu^i(\mathfrak{p}, M) \neq 0 \iff \operatorname{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), M_\mathfrak{p}) \neq 0 \overset{\text{命題 11.5}}{\iff} \operatorname{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), E^i(M)_\mathfrak{p}) \neq 0 \overset{\text{補題 4.13}}{\iff} \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} E^i(M)$$

ここで最初の同値は Bass 数の定義であり、2 番めは $E^i(M)_\mathfrak{p}$ が $M_\mathfrak{p}$ の極小移入分解の i 項目より。 □

11.2. **移入次元有限な加群.** 次に、移入次元が有限な加群について考察する。後に Gorenstein 環について考察するときの基礎づけでもある。

まず depth と移入次元について簡単にわかる不等式がある。

命題 11.10. $(R, \mathfrak{m}, k)$ を可換ネーター局所環、$0 \neq M$ を有限生成 R 加群とする。このとき

$$\operatorname{depth}_R M \leq \dim M \leq \mathsf{id}_R M$$

が成り立つ（$\mathsf{id}_R M = \infty$ の場合も許す）。

証明. 初めの不等号については系 9.11 から。またそこの証明では、Bass の補題を使って、$d := \dim M$ としたときに $\operatorname{Ext}^d_R(k, M) \neq 0$ が示されている。よって落ち着けば $\mathsf{id}\, M \geq d$ が成り立つ。 □

まずネーター環上の加群の移入次元については一般に命題 10.9 があったことを思い出してもらいたい。それによれば、R/I という形の加群からの Ext を調べればよいが、実はネーター局所環ではもっと簡単である。まったく同じ証明をネーター代数の場合もあとでやる。

命題 11.11. $(R, \mathfrak{m}, k)$ を可換ネーター局所環とし、M を有限生成 R 加群とする。このとき $d \geq 0$ について、$\operatorname{Ext}^{>d}_R(k, M) = 0$ なことと $\mathsf{id}\, M_R \leq d$ なことは同値である。とくに、

$$\mathsf{id}\, M_R = \sup\{i \geq 0 \mid \operatorname{Ext}^i_R(k, M) \neq 0\} = \sup\{i \geq 0 \mid \mu^i(\mathfrak{m}, M) \neq 0\}$$

証明. 落ち着けば、$\operatorname{Ext}^{>d}_R(k, M) = 0 \Leftrightarrow \mathsf{id}\, M_R \leq d$ のみを示せばよい。($\Leftarrow$) は明らかである。

($\Rightarrow$) $\operatorname{Ext}^{>d}_R(k, M) = 0$ だとする。このとき M の極小移入分解

$$0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \cdots \to E^d \to E^{d+1} \to \cdots$$

を取る。$E^{d+1} = 0$ を示せばよい。

背理法で、$E^{d+1} \neq 0$ とする。すると定理 11.3 により、$\mu^{d+1}(\mathfrak{p}, M) \neq 0$ なる $\mathfrak{p}$ が取れる。ここで $\dim R/\mathfrak{p} = l$ とする（局所環は有限次元！）と、$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_l = \mathfrak{m}$ という saturated chain が取れる。よって Bass の補題 9.10 より $\mu^{d+1+l}(\mathfrak{m}, M) \neq 0$ であり、つまり $\operatorname{Ext}^{d+1+l}_R(k, M) \neq 0$ となる。これは仮定に矛盾する。 □

これによると、M の移入次元の有限性をみるには全ての大きい i について $\operatorname{Ext}^i_R(k, M) = 0$ となっているかを見なければならないが、実は十分大きい一つの i について消えていれば十分なことを見る（命題 11.16）

また depth の定義に戻ると、次のようにまとめられる。**極大イデアルからの *Bass* 数は、*depth* と移入次元の情報を持っていてちょうど対称的な状況である。**

系 11.12. $(R, \mathfrak{m}, k)$ を可換ネーター局所環、$0 \neq M$ を有限生成加群とする。このとき、$\mu^i(\mathfrak{m}, M)$ が消えない、つまり $\mathrm{Ext}^i_R(k, M)$ が消えない $i \geq 0$ 全体考えると、

(1) そのような i の中で最小なものが $\mathrm{depth}_R M$ であり、
(2) そのような i の中で最大なものがあれば $\mathsf{id}_R M$ であり、なければ $\mathsf{id}_R M = \infty$ である。

実は、可換ネーター局所環においては、移入次元有限な有限生成加群の移入次元は常に一定で、環の depth に等しい、というすごい結果が成り立つ。ネーター代数においても成り立つが、その場合は局所性の仮定が必要である（じゃないと有限次元代数で移入次元有限な加群が全て移入加群になっちゃうし）。

まず射影次元について、有限生成加群の圏ではかっても変わらないことを保証しておく。

命題 11.13. Λ を右ネーター環、$M \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ を有限生成 Λ 加群とする。このとき $n \geq 0$ について次は同値である:

(1) $\mathsf{pd}\, M_\Lambda \leq n$ である、つまり M の射影次元が n 以下である。
(2) 任意の $X \in \mathsf{Mod}\,\Lambda$ について $\mathrm{Ext}^{>n}_\Lambda(M, X) = 0$ である。
(3) 任意の $X \in \mathsf{Mod}\,\Lambda$ について $\mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(M, X) = 0$ である。
(4) 任意 $X \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ について $\mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(M, X) = 0$ である。

証明. 移入加群の場合の対応する命題 10.9 と比較すると、Baer の判定法が使えないので若干弱くなっていることに注意されたい。(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) は明らかなので、(4) $\Rightarrow$ (1) を示せば良い。

いま Λ が右ネーターで M が有限生成であるから、

$$0 \to \Omega^n M \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

という完全列であって、P_i は有限生成射影加群、$\Omega^n M$ は有限生成加群であるようなものが取れる（$n = 0$ では $\Omega^0 X := M$ とする）。ここで $\Omega^n M$ が射影加群であることを示せばよい。

すると Ext の長完全列より、任意の $X \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ について $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Omega^n M, X) = \mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(M, X) = 0$ が成り立つ。ここで

$$0 \to \Omega^{n+1} M \to P_n \to \Omega^n M \to 0$$

という短完全列であって P_n が有限生成射影加群であるものをとれば、$\Omega^{n+1} M$ も（Λ が右ネーターより）有限生成である。よってこの完全列に $(M, -)$ で長完全列を伸ばせば、任意の $\Omega^n M \to \Omega^n M$ は必ず P_n のほうへ lift する。とくに恒等写像を考えれば、上の短完全列は分裂している。よって $\Omega^n M$ は射影加群である。 □

実は可換ネーター局所の場合や一般に semiperfect ring の場合は X として $\Lambda/\mathcal{J}$ を取れば十分なことが知られており、そのうちやるかもしれない。

次に補題として、正則列で割ったときの射影次元を見ていく。

補題 11.14. $(R, \mathfrak{m})$ を可換ネーター局所環、$0 \neq M$ を有限生成加群とする。このとき、$\mathfrak{m}$ の中の M 正則列 $x_1, \cdots, x_t$ に対して、

$$\mathsf{pd}_R\, M/M(x_1, \cdots, x_t) = \mathsf{pd}_R\, M + t$$

が成り立つ。とくに、$\mathfrak{m}$ の中の R 正則列 $x_1, \cdots, x_t$ に対して

$$\mathsf{pd}_R\, R/(x_1, \cdots, x_t) = t$$

である。射影次元を図る基礎環は変えていないことに注意。

証明. 明らかに $t = 1$ の場合に示せば十分である。x を M 正則な $\mathfrak{m}$ の元とする。このためにまず次の 2 つが任意の $i \geq 0$ について同値であることを示す。

(1) $\mathsf{pd}_R\, M \leq i$ である。
(2) $\mathsf{pd}_R\, M/Mx \leq i + 1$ である。

いつものように短完全列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x} M \longrightarrow M/Mx \longrightarrow 0$$

がある。

(1) ⇒ (2) 命題 11.13 により、任意の $N \in \mathsf{mod}\, R$ について $\mathrm{Ext}_R^{i+2}(M/Mx, N) = 0$ を示せばよい。先の短完全列に $(-, N)$ して長完全列伸ばせば、

$$\mathrm{Ext}_R^{i+1}(M, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{i+2}(M/Mx, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{i+2}(M, N)$$

(1) の仮定より $\mathrm{Ext}_R^{>i}(M, N) = 0$ なことから、上の完全列の両端はゼロである。よって真ん中もゼロ。

(2) ⇒ (1) 命題 11.13 により、任意の $N \in \mathsf{mod}\, R$ について $\mathrm{Ext}_R^{i+1}(M, N) = 0$ を示せばよい。まず $\mathsf{pd}_R\, M/Mx \leq i$ より $\mathrm{Ext}_R^{i+2}(M, N) = 0$ である。先の短完全列に $(-, N)$ して長完全列伸ばせば、

$$\mathrm{Ext}_R^{i+1}(M, N) \xrightarrow{x} \mathrm{Ext}_R^{i+1}(M, N) \longrightarrow 0$$

という完全列ができる、つまり $\mathrm{Ext}_R^{i+1}(M, N)$ 上で x 倍写像が全射である。ここでネーター性や有限生成性より $\mathrm{Ext}_R^{i+1}(M, N)$ は有限生成 R 加群なので、中山の補題が使えて $\mathrm{Ext}_R^{i+1}(M, N) = 0$ である。

以上より (1) と (2) が同値である。これで $\mathsf{pd}_R\, M/Mx = \mathsf{pd}_R\, M + 1$ はほとんど示せている（落ち着けば分かる、どちらかが無限の場合でも大丈夫）しかし一つだけ確認しなければいけないことがある。それは $\mathsf{pd}_R\, M = 0$ のときに $\mathsf{pd}_R\, M/Mx \neq 0$ なことである（上から出るのは $\mathsf{pd}_R\, M/Mx \leq 1$ だけ）。これを示そう。

もし $\mathsf{pd}_R\, M/Mx = 0$ であったと仮定すると、任意の $N \in \mathsf{mod}\, R$ について次の完全列ができる:

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{x} \mathrm{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(M/Mx, N) = 0$$

よって同じく中山の補題より $\mathrm{Hom}_R(M, N) = 0$ が出てしまう。これは例えば $N = M$ を代入すれば、$M = 0$ となってしまい命題の仮定に反する。 □

定理 11.15. $(R, \mathfrak{m}, k)$ を可換ネーター局所環、$0 \neq M$ を有限生成 R 加群とする。このときもし $\mathsf{id}_R\, M$ が有限ならば、

$$\mathrm{depth}\, R = \mathsf{id}_R\, M$$

が成り立つ。

証明. $t := \mathrm{depth}\, R$, $d := \mathsf{id}_R\, M$ とする。$x_1, \cdots, x_t$ を R 正則列とする。

($t \leq d$ について) ここは元をとらないといけない。またもちろんこちらの不等号には $d < \infty$ の仮定は不要である。$\mathrm{Ext}_R^t(R/(x_1, \cdots, x_t), M) \neq 0$ を示せば、$t \leq d$ が従う。

実際ここはいわゆる Koszul 複体の理論を知っていると、Ext が簡単に計算でき、上の Ext は実は $M/M(x_1, \cdots, x_t)$ と同型になっていて、中山の補題よりこれはゼロでない、となる。松村や Bruns-Herzog ではそうやっているが、とりあえず Koszul 複体を使わない議論をしておく（Ext があああけること自体は実は導来圏にもっていけば Koszul 複体とか言わなくても出来たりする）。

$0 \leq i \leq t$ について帰納法で $\mathrm{Ext}_R^i(R/(x_1, \cdots, x_i), M) \neq 0$ を示す。$i = 0$ のときは $\mathrm{Hom}_R(R, M) = M \neq 0$ より成り立つ。$i > 0$ とし $i - 1$ で成り立つとする。

$$0 \longrightarrow R/(x_1, \cdots, x_{i-1}) \xrightarrow{x_i} R/(x_1, \cdots, x_{i-1}) \longrightarrow R/(x_1, \cdots, x_i) \longrightarrow 0$$

という短完全列がある。これに $(-, M)$ で長完全列のばせば、

$$\mathrm{Ext}_R^{i-1}(R/(x_1, \cdots, x_{i-1}), M) \xrightarrow{x_i} \mathrm{Ext}_R^{i-1}(R/(x_1, \cdots, x_{i-1}), M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^i(R/(x_1, \cdots, x_i), M)$$

という完全列ができる。もし $\mathrm{Ext}_R^i(R/(x_1, \cdots, x_i), M) = 0$ になってしまえば、中山の補題より $\mathrm{Ext}_R^{i-1}(R/(x_1, \cdots, x_{i-1}, M) = 0$ でなければならず、帰納法の仮定に違反する。よって示された。

($t = d$ について) 以下 $d = \mathsf{id}_R\, M$ が有限を仮定する。すでに $t \leq d$ を示しているので、$t < d$ として矛盾を示す。

今 $\operatorname{depth}_R R = t$ なことから、$\operatorname{depth}_R R/(x_1, \cdots, x_t) = 0$ である、つまり $R/(x_1, \cdots, x_t)$ は単純部分加群を持つ。よって R が局所なことより単純加群は $R/\mathfrak{m} = k$ のみであるので、

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow R/(x_1, \cdots, x_t) \longrightarrow W \longrightarrow 0$$

という短完全列がとれる。よって $(-, M)$ で長完全列のばすと、

$$\operatorname{Ext}_R^d(R/(x_1, \cdots, x_t), M) \to \operatorname{Ext}_R^d(k, M) \to \operatorname{Ext}_R^{d+1}(W, M) \to \operatorname{Ext}_R^{d+1}(R/(x_1, \cdots, x_t), M)$$

という完全列が得られる。しかし補題 11.14 により $\mathsf{pd}_R R/(x_1, \cdots, x_t) = t$ なので、$t < d$ に注意すれば $\operatorname{Ext}_R^{\geq d}(R/(x_1, \cdots, x_t), M) = 0$ である。よって

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^d(k, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{d+1}(W, M) \longrightarrow 0$$

という完全列ができる。しかし命題 11.11 より $d = \mathsf{id}\, M$ から $\operatorname{Ext}_R^d(k, M) \neq 0$ のはずである。よって $\operatorname{Ext}_R^{d+1}(W, M) \neq 0$ が従い、これは $\mathsf{id}\, M = d$ に矛盾する。 □

先に述べた、移入次元の有限性の判定法について。

命題 11.16. $(R, \mathfrak{m}, k)$ を可換ネーター局所環、$0 \neq M$ を有限生成 R 加群とすると次は同値である。

(1) $\mathsf{id}_R M < \infty$ である。
(2) 全ての $i > \operatorname{depth}_R R$ について $\operatorname{Ext}_R^i(k, M) = 0$ つまり $\mu^i(\mathfrak{m}, M) = 0$ である。
(3) 全ての $i > \dim R$ について $\operatorname{Ext}_R^i(k, M) = 0$ つまり $\mu^i(\mathfrak{m}, M) = 0$ である。
(4) ある $i > \dim R$ について $\operatorname{Ext}_R^i(k, M) = 0$ つまり $\mu^i(\mathfrak{m}, M) = 0$ である。

証明. (1) ⇒ (2): 定理 11.15 より従う。

(2) ⇒ (3): これは $\operatorname{depth}_R R \leq \dim R$（系 9.11）より従う。

(3) ⇒ (4): 明らか。

(4) ⇒ (1): ここが非自明なパートである。$d := \dim R$ についての帰納法で次の主張を示せばよい:

(Claim): $(R, \mathfrak{m})$ を d 次元ネーター局所環、M を有限生成 R 加群とする。このとき $\mathsf{id}_R M = \infty$ であれば、任意の $i \geq d$ について $\mu^i(\mathfrak{m}, M) \neq 0$ が成り立つ。ここで $i = d$ の場合も許しているが、(4) ⇒ (1) の証明には影響ないことに注意されたい。

まず M の極小移入分解

$$0 \to M \to E^0 \to E^1 \to E^2 \to \cdots$$

をとる。$\mathsf{id}\, M = \infty$ の仮定より上の加群は全てゼロでない。

$d = 0$ の場合、つまり $\operatorname{Spec} R = \{\mathfrak{m}\}$ である。任意に $i \geq 0$ をとると、いま E^i たちはゼロでないので命題 4.2 より必然的に $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} E^i$ となる。よって命題 11.9 により $\mu^i(\mathfrak{m}, M) \neq 0$ である。

$d > 0$ の場合。任意に $i \geq d$ をとり固定する。このとき $\mu^i(\mathfrak{m}, M) \neq 0$ なこと、つまり $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} E^i$ を示す（命題 11.9 より二つは同値)。次のように場合分けする。

(1) 全ての $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \setminus \{\mathfrak{m}\}$ について $\mathsf{id}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} < \infty$ の場合。
(2) ある $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \setminus \{\mathfrak{m}\}$ について $\mathsf{id}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} = \infty$ の場合。

(1) このとき、$\operatorname{Ass} E^i \subset \operatorname{Supp} E^i$ を考える。任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \setminus \{\mathfrak{m}\}$ を取ると、局所化 $M_\mathfrak{p}$ は仮定より移入次元有限 $R_\mathfrak{p}$ 加群より、定理 11.15 により $\mathsf{id}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} = \operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}} R_\mathfrak{p} \leq \dim R_\mathfrak{p} < d \leq i$ となる。ここで、与えられた M の極小移入分解を $\mathfrak{p}$ で局所化すれば $M_\mathfrak{p}$ の $\mathsf{Mod}\, R_\mathfrak{p}$ での極小移入分解になる（命題 11.4）ことから、$E_\mathfrak{p}^{> \mathsf{id}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}} = 0$ となる。よって $E_\mathfrak{p}^i = 0$ である。

以上のことから、$i \geq d$ に対しては $\operatorname{Supp} E^i \subset \{\mathfrak{m}\}$ でなければならない。このことと、E^i は全てゼロでないことから命題 4.2 により $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} E^i$ が従う。

(2) このような $\mathfrak{p}$ を一つとる。このとき $\dim R_\mathfrak{p} < d$ なことより、帰納法の仮定が使えて、全ての $j \geq \dim R_\mathfrak{p}$ に対して $\mu^j(\mathfrak{p}, M) \neq 0$ である。何回もやった、Bass の補題を使って登っていくやり方をする。$s := \dim R/\mathfrak{p}$ とすると、$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_s = \mathfrak{m}$ という saturated chain が取れる。よって、Bass の補題 9.10 を繰り返し使って、

$$\mu^{s+j}(\mathfrak{m}, M) \neq 0$$

が全ての $j \geq \dim R_\mathfrak{p}$ について成り立つ。ここで、$s + \dim R_\mathfrak{p} = \dim R/\mathfrak{p} + \dim R_\mathfrak{p} \leq \dim R = d$ であるので、落ち着けば、上の式が成り立つ $s + j$ の範囲は、「d 以上の自然数」を含む。よって任意の $i \geq d$ について $\mu^i(\mathfrak{m}, M) \neq 0$ である。 □

12. Gorenstein 環

ようやく Gorenstein 環について述べることができる。

定義 12.1. 可換ネーター環 R が *Gorenstein* 環であるとは、$\mathsf{id}_R R < \infty$ のとき、つまり R 自身の移入次元が有限であるときをいう。

注意 12.2. 文献によっては（というかたいていの文献は）、R が Gorenstein 環であることを、任意の素イデアル（極大イデアル）での局所化が Gorenstein 局所環であることと定義している。この場合は $\mathsf{id} R = \infty$ がありえる（らしい）。しかしホモロジー代数的には、$\mathsf{id} R < \infty$ というふうに定義するほうが自然に思えるのでここではそうした。食い違いに注意されたい。

12.1. Gorenstein 環の基本性質.

まず局所化についての振る舞いについて。

命題 12.3. 可換ネーター環 R が Gorenstein ならば、任意の R の積閉集合 S について R_S も Gorenstein 環である。特に任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ について $R_\mathfrak{p}$ は Gorenstein 局所環である。

証明. 「移入分解の局所化は移入分解である」という命題 11.4 から直ちに従う。なぜなら、R が Gorenstein ならば R の長さ有限の移入分解がとれ、それを S で局所化すれば R_S の長さ有限移入分解が作れるので。 □

次にまず局所の場合に、Gorenstein 環の次元や CM 性について。

定理 12.4. $(R, \mathfrak{m})$ を可換 Gorenstein 局所環とすると、

$$\operatorname{depth}_R R = \dim R = \mathsf{id}_R R$$

が成り立つ。つまり R の Krull 次元と R の移入次元と R の depth は等しい。とくに R は Cohen-Macaulay である。

証明. まず不等式 $\operatorname{depth} R \leq \dim R \leq \mathsf{id} R$ が命題 11.10 であり、一方 $\mathsf{id}_R R < \infty$ ならば $\mathsf{id}_R R = \operatorname{depth} R$ が定理 11.15 である。そこから 3 つの量は等しい。 □

また局所でない場合は、次のように特徴づけられる。

系 12.5. R を可換ネーター環とすると、次は同値である。

(1) R は本稿の意味で Gorenstein である、つまり $\mathsf{id}_R R < \infty$ である。
(2) $\dim R < \infty$ であり、任意の $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ について $R_\mathfrak{m}$ は Gorenstein 局所環である。

またこのとき $\dim R = \mathsf{id}_R R$ が成り立つ。(2) の条件の $\dim R < \infty$ を外したものを一般的には Gorenstein 環と呼ばれる。

証明. (1) ⇒ (2): 移入分解の局所化についての命題 11.4 より

$$\mathsf{id} R = \sup\{\mathsf{id}_{R_\mathfrak{m}} R_\mathfrak{m} \mid \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R\}$$

であった。よって左辺が有限なことから、全ての $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ について $\mathsf{id}_{R_\mathfrak{m}} R_\mathfrak{m}$ は有限である。つまり $R_\mathfrak{m}$ は Gorenstein 局所環なので定理 12.4 から $\mathsf{id}_{R_\mathfrak{m}} R_\mathfrak{m} = \dim R_\mathfrak{m}$ が従う。よって、等式の右辺は

$$\sup\{\dim R_\mathfrak{m} \mid \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R\}$$

に等しい。一方この量は明らかに $\dim R$ に等しい。なので等号 $\mathsf{id} R = \dim R$ が成り立つ。とくに $\dim R$ は有限である。

(2) ⇒ (1): こちらも命題 11.4 より

$$\mathsf{id} R = \sup\{\mathsf{id}_{R_\mathfrak{m}} R_\mathfrak{m} \mid \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R\}$$

が成り立つが、各 $R_\mathfrak{m}$ が仮定より Gorenstein 環であるので、定理 12.4 から $\mathsf{id}_{R_\mathfrak{m}} R_\mathfrak{m} = \dim R_\mathfrak{m}$ が従う。よって等式の右辺は

$$\sup\{\dim R_\mathfrak{m} \mid \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R\}$$

になり、この量は明らかに $\dim R$ に等しい。いま $\dim R < \infty$ という仮定をしていたので、$\mathsf{id}\, R = \dim R$ は有限である。よって R は本稿の意味で Gorenstein である。 □

12.2. **Gorenstein 局所環の特徴づけ.** 次に Gorenstein 環の Bass 数について述べる。このへんは非常に綺麗な構造をしている。

定理 12.6. R を Krull 次元有限なネーター環とする。このとき次は同値である。

(1) R は Gorenstein である。
(2) 任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ について、$\mu^{\neq \operatorname{ht}\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}, R) = 0$ である。
(3) 任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ について、$\mu^{> \operatorname{ht}\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}, R) = 0$ である。
(4) 任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ についてある n が存在し、$\mu^{>n}(\mathfrak{p}, R) = 0$ である。
(5) 任意の $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ についてある n が存在し、$\mu^{>n}(\mathfrak{m}, R) = 0$ である。
(6) 任意の $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ についてある $i > \operatorname{ht}\mathfrak{m}$ が存在し $\mu^{i}(\mathfrak{m}, R) = 0$ である。

証明. (2) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒ (5) ⇒ (6): 明らか。

(6) ⇒ (1): 任意の $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ について $R_\mathfrak{m}$ が Gorenstein 環であればよい。しかし (6) の条件から、命題 11.16 により $\mathsf{id}_{R_\mathfrak{m}} R_\mathfrak{m} < \infty$ が出るので $R_\mathfrak{m}$ は Gorenstein である。

(1) ⇒ (2): $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ を任意にとると、$R_\mathfrak{p}$ も Gorenstein 環なこと（命題 12.3）を考えれば、次を示せば十分である:

(Claim): $(R, \mathfrak{m})$ を d 次元可換 *Gorenstein* 局所環とすると、$i \neq d$ に対しては $\mu^i(\mathfrak{m}, R) = 0$。

実際、定理 12.4 により $\operatorname{depth} R = d$ であるから、depth の定義により $\mu^{<d}(\mathfrak{m}, M) = 0$ である。また定理 12.4 により $\mathsf{id}\, R = d$ であるので、$\mu^{>d}(\mathfrak{m}, R) = 0$ も明らかである。 □

よって Gorenstein 環の Bass 数は $\mu^{\operatorname{ht}\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}, R)$ 以外はゼロになる。実はこの値は 1 になることが証明できる（系**??**）。そのために、Gorenstein 環の type（定義 9.21）を調べ、正則元で割っていってゼロ次元に帰着させる。が、正準加群についての一般論をやってからのほうが見通しがよいので、証明はあとで行う。

まず正則元での商について Gorenstein 性は同値である:

命題 12.7. $(R, \mathfrak{m})$ を可換ネーター局所環、$x \in \mathfrak{m}$ を R 正則元とすると、R が Gorenstein であることと $R/(x)$ が Gorenstein であることは同値である。

証明. 移入次元と正則元での商についての振る舞い（系 21.7）を用いると、

$$\mathsf{id}_R R = \mathsf{id}_{R/(x)} R/(x) + 1$$

より、とくに $\mathsf{id}_R R$ が有限である（R が Gorenstein である）ことと $\mathsf{id}_{R/(x)} R/(x)$ が有限である（R/Rx が Gorenstein である）ことは同値である。 □

これは Gorenstein 環の例を作るときに有用である、つまり Gorenstein 局所環（例えば正則局所環、つまりべき級数環）を正則元（たとえば整域なら任意のゼロでない元）でわれば Gorenstein 環ができる。

13. 正準加群

Gorenstein 環 R のよいところは、$\mathsf{CM}\, R$ が Frobenius 完全圏になる、つまり R 自身が $\mathsf{CM}\, R$ においては移入余生成子になっていることである。

一般に $\mathsf{CM}\, R$ の移入余生成子のことを**正準加群** *(canonical module)* と呼ぶ（正確な定義はすぐ下で述べる）。

とりあえず可換環で標準的な定義に基づいて正準加群を定義する。

定義 13.1. $(R, \mathfrak{m}, k)$ を d 次元可換 CM 局所環とし。このとき有限生成 R 加群 ω が**正準加群** *(canonical module)* であるとは次を満たすときをいう:

(1) ω は極大 CM 加群である、つまり $\operatorname{depth} \omega = d$ が成り立つ。
(2) ω は移入次元有限である、つまり定理 11.15 により $\mathsf{id}_R\, \omega = d$ が成り立つ。
(3) ω は type 1 である、つまり $\operatorname{Ext}_R^d(k, \omega)$ が k ベクトル空間として 1 次元である。

定義から、正準加群の極大イデアルについての Bass 数は強い成約を受ける。

命題 13.2. $(R, \mathfrak{m}, k)$ を d 次元 CM 局所環とする。このとき $\omega \in \mathsf{mod}\, R$ について次は同値である:

(1) ω は正準 R 加群である。
(2) 次が成り立つ:

$$\mu^i(\mathfrak{m}, \omega) = \begin{cases} 1 & (i = d) \\ 0 & (i \neq d) \end{cases}.$$

証明. 落ち着けば次から従う:

- ω が MCM である $\Leftrightarrow \mu^{<d}(\mathfrak{m}, \omega) = 0$（depth と Bass 数の定義より）。
- $\mathsf{id}_R\, \omega$ が有限である $\Leftrightarrow \mu^{>d}(\mathfrak{m}, \omega) = 0$（定理 11.11 と命題 11.11）
- MCM 加群 ω について、$r(\omega) = 1 \Leftrightarrow \mu^d(\mathfrak{m}, \omega) = 1$

□

実は極大イデアルの Bass 数だけでなく、任意の素イデアルでの Bass 数が同じような成約を受ける（系 14.8）。このことには正準加群が localize することを示す必要があり、系 14.8 で示す。

13.1. **0 次元ネーター環の場合.** 今まであまり 0 次元の可換ネーター環について特別な話はしてこなかった。可換 CM 環の理論では正則元で割ることで 0 次元に帰着させることも多いので、正準加群あたりについてこの機会にまとめておく。系 4.12 により、ゼロ次元ネーター環はアルティン環だったことに注意。また Matlis 双対についての Appendix の事柄を使い、$(-)^\vee$ で Matlis 双対を表す。

また射影生成子や移入余生成子については 1.1 の記法のところを参照してください。あと、命題 10.9 により、「$\mathsf{mod}\, R$ での移入的対象」は「有限生成な移入的 R 加群」と同じものであることに注意。

命題 13.3. $(R, \mathfrak{m}, k)$ を 0 次元ネーター局所環とすると次が成り立つ:

(1) R は Cohen-Macaulay 環であり、$\mathsf{CM}\, R = \mathsf{mod}\, R = \mathsf{fl}\, R$ が成り立つ。
(2) k の移入包絡 $E := E(k)$ は長さ有限 R 加群であり、Matlis 双対 $(-)^\vee$ は $\mathsf{mod}\, R$ の自己双対を与える。
(3) 自然な写像 $R \to \operatorname{End}_R(E)$ は環同型である。とくに $\operatorname{End}_R(E)$ は局所環であり E は直既約である。
(4) E は type 1 である。
(5) $\mathsf{mod}\, R$ は完全圏として射影生成子 R と移入余生成子 E を持つ。
(6) $X \in \mathsf{mod}\, R$ について次は同値である:
 (a) X は E と同型である。
 (b) X は $\mathsf{mod}\, R$ における直既約移入的対象である（つまり直既約移入加群である）。
 (c) X は正準加群である（つまり X は移入加群で type 1 である）。
 (d) X は type 1 であり忠実加群である。
 (e) X は移入次元有限（つまり移入的）であり、自然な写像 $R \to \operatorname{End}_R(X)$ が同型である。

とくに正準加群は同型を除いて一意的に定まる。

証明. (1) 一般に $0 \leq \operatorname{depth} R \leq \dim R$ であるので、$\dim R = 0$ から自動的に R は CM 環になる。また有限生成加群 $M \neq 0$ について、$0 \leq \operatorname{depth} M \leq \dim M \leq \dim R = 0$ なので M は MCM 加群になる。あとは命題 4.11 より明らか。

(2) 長さ有限加群についての Matlis 双対（定理 A.6）を用いる。今 $E = E(k)$ に対する $\operatorname{Hom}_R(-, E)$ が $\mathsf{fl}\, R$ の双対を与える。いま R がアルティン環なので $R \in \mathsf{fl}\, R$ となり、双対に R を代入すれば $E \in \mathsf{fl}\, R$

が従う（より簡単に言うなら、E の定義より $\mathrm{Hom}_R(k, E) = k$ が成り立ち、R は R 加群として k の有限回拡大でかけるので、帰納的に R を突っ込んでも長さ有限）。

後半の主張は Matlis 双対の定理 A.6 である。

(3) 双対性のもと R と E が対応するので、自己準同型環は等しいので、$R \cong \mathrm{End}_R(R) = \mathrm{End}_R(E)$ となる。後半の主張は、一般に自己準同型環が局所環なら加群は直既約なので従う（もちろん定理 10.8 からも従う）。

(4) 今 $\mathsf{mod}\, R$ は射影生成子 R を持つ。よって (2) の自己双対により R は $\mathsf{mod}\, R$ の移入余生成子にうつるので、E は $\mathsf{mod}\, R$ の移入余生成子である。

(5) これは補題 11.7 より $\mathrm{Hom}_R(k, E) = k$ から従う。

(6) 同値性を証明していく。まず (a) から各条件が出るのはこれまでのことよりすべて明らかである（E が忠実なのは、Matlis 双対で annihilator が不変なことがチェックできるので従う）。よって各条件から (a) を出す。

(b) $\Rightarrow$ (a): 直既約移入加群は定理 10.8 により E しかない（いま $\mathrm{Spec}\, R = \{\mathfrak{m}\}$ なので）。

(c) $\Rightarrow$ (a): まず X の移入次元が有限なので、定理 11.15 によりその値はゼロ、つまり X は有限生成移入加群である。一方 X は type 1 より simple socle を持つので直既約加群である。よって X は直既約移入加群であるが、これは E しかないので $X = E$ となる。

(d) $\Rightarrow$ (a): X が type 1 より simple socle k を持つ。よって X を $E = E(k)$ に埋め込むことができ、

$$0 \to X \to E \to Y \to 0$$

という $\mathsf{fl}\, R$ での短完全列がある。これを Matlis 双対とると、

$$0 \to Y^\vee \to R \to X^\vee \to 0$$

となるが、X が忠実より $X^\vee$ も忠実。なので $Y^\vee = 0$ でなければならず、よって $Y = 0$ であり $X \cong E$ が従う。

(e) $\Rightarrow$ (a) まず (c) $\Rightarrow$ (a) の証明のように、X は E の有限直和となり、$X = E^n$ と書ける。しかし (3) から $\mathrm{End}_R(E) = R$ なので、$\mathrm{End}_R(X) = M_n(R)$ と行列環になるので、これが R と同型になるのは（可換性より明らかに）$n = 1$ の場合、つまり $X = E$ の場合に限られる。 □

13.2. **Gorenstein 環と正準加群.** 以上の準備のもとで、Gorenstein 環の type が 1 であることや、正準加群との関係が明らかになる。

まず環自身の type について考察する。

命題 13.4. $(R, \mathfrak{m}, k)$ をネーター局所環、$x \in \mathfrak{m}$ を R 正則元とすると次が成り立つ:

$$r_R(R) = r_{R/(x)}(R/(x))$$

つまり $R/(x)$ の $R/(x)$ 加群としての type は $r(R)$ と等しい。

証明. 命題 9.22 により。 □

これを用いて Gorenstein 環の type を用いた特徴付けがわかる。

定理 13.5. $(R, \mathfrak{m}, k)$ を d 次元ネーター局所環とすると、次は同値である:

(1) R は Gorenstein 環である。
(2) R は Cohen-Macaulay 環であり type が 1 である、つまり $\mu^d(\mathfrak{m}, R) = 1$ である。
(3) R は Cohen-Macaulay 環であり R 自身が正準加群である。

証明. まず R 正則元 $x \in \mathfrak{m}$ を取ると、R が (1) を満たすことと $R/(x)$ が (1) を満たすことが命題 12.7 より同値。また R が (2) を満たすことと $R/(x)$ が (2) を満たすことが、命題 9.16 により同値。また (3) の条件は正準加群の定義をみれば、$\mathsf{id}\, R < \infty$ かつ $r(R) = 1$ と同値なので、つまり (3) は (1) かつ (2) と同値である。なので (3) についても R が (3) を満たすことと $R/(x)$ が (3) を満たすことは同値。

また (1) と (2) と (3) のどちらを仮定したとしても、R は CM になる（定理 12.4 より）なので、どちらの仮定のもとでも R 正則列 $x_1, \cdots, x_d$ が取れて、$\dim R/(x_1, \cdots, x_d) = 0$ である。

以上のことから落ち着けば、$\dim R = 0$ の場合に (1) と (2) と (3) の同値性を示せばよい。以下 $\dim R = 0$ とする。このとき各条件がどうなるか考える。

(1) これは R が 0 次元 Gorenstein 環であること、つまり定理 12.4 により「R が移入加群」となる（つまり R が自己移入環）。

(2) これは「R が type 1 である」ことと同値である。

(3) これは「R が正準加群である」ことと同値である。

この考察と、R 自身は常に忠実で直既約な R 加群であることを用いれば、命題 13.3 からこれらの同値性が従う。 □

系として、Gorenstein 環の Bass 数の計算ができる。

系 13.6. R を Gorenstein 環（局所と限らない）とすれば、任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ に対して

$$\mu^i(\mathfrak{p}, R) = \begin{cases} 1 & (i = \operatorname{ht} \mathfrak{p}) \\ 0 & (i \neq \operatorname{ht} \mathfrak{p}) \end{cases}.$$

証明. ほとんど定理 12.6 で述べたが、一応関連項目を復習する。$d := \operatorname{ht} \mathfrak{p}$ とすると、$R_\mathfrak{p}$ は命題 12.3 により i 次元 Gorenstein 局所環である。よって定理 12.4 により $R_\mathfrak{p}$ は CM 環であり $\mathsf{id}_{R_\mathfrak{p}} R_\mathfrak{p} = i$ である。

まず CM 性より $\mu^{<i}_{R_\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}) = \mu^{<i}(\mathfrak{p}, R) = 0$ である。また移入次元 i なことから、Bass 数の定義を落ち着いて思い出せば $\mu^{>i}_{R_\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}) = \mu^{>i}(\mathfrak{p}, R) = 0$ である。

よって $\mu^i(\mathfrak{p}, R) = 1$ を示せばよいが、これは $R_\mathfrak{p}$ が Gorenstein なので type 1 であること（命題 13.5）から従う。 □

14. 正準加群の性質と CM 圏

正準加群について詳しい性質を調べ、それと CM 圏との関わりを調べる。とくに「正準加群による双対が CM 圏の自己双対を与える」という非常に重要な結果を目標にする（正直自分の正準加群のモチベはこの事実のみである）。

そのために、正則元で割って議論する（*reduction* する）ことが多いので、その議論をいろいろする。

14.1. 正準加群の同値な定義.

まず環の正則元と加群の正則元とについて、CM 局所環では次が保証される。

補題 14.1. $(R, \mathfrak{m})$ を d 次元可換 CM 局所環、M を極大 CM 加群とする。このとき $\operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Ass} R$ が成り立つ。特に、任意の R 正則元 $x \in \mathfrak{m}$ は自動的に M 正則でもある。

証明. 命題 9.14 により $\operatorname{Assh} R = \operatorname{Min} R = \operatorname{Ass} R$ で $\operatorname{Assh} M = \operatorname{Min} M = \operatorname{Ass} M$ だったことを思い出そう。$\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ を取る。このとき M が MCM だったので $\dim M = d$ なので $\dim R/\mathfrak{p} = d$ である（$\mathfrak{p} \in \operatorname{Assh} M$ より）。しかし $\dim R = d$ なので、$\mathfrak{p} \in \operatorname{Assh} R$ でもある。よって $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} R$ である。

以上より $\operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Ass} R$ である。後半の主張は、命題 4.14 より従う。つまり R 正則元 x は、どの $\operatorname{Ass} R$ の元も避けているので、包含からどの $\operatorname{Ass} M$ の元も避ける。よって x は M 正則になる。 □

この補題により、R 正則元 x をとってしまえば、MCM 加群によらずに x がすべての MCM 加群の正則元になるので便利である。

まず最初の目標は、正準加群の type 1 の条件を自己準同型環についての条件に置き換えることである。

定理 14.2. R を d 次元可換 CM 局所環、有限生成 R 加群 ω をとる。このとき、ω が正準加群であることと次が成り立つことは同値である:

(1) ω は MCM である。

(2) ω は移入次元有限である、よって移入次元 d である。
(3) 自然な写像 $R \to \mathrm{End}(\omega_R)$ は同型である。

Type 1 の条件は、実は局所化と相性が悪く、また正準加群を用いた CM 圏の双対性を議論するときにも、上の「自己準同型環がもとの環に戻る」という条件は有用である。よって理論的な意味では使い勝手がよい（計算上は type の計算のほうが楽そうである）。

この定理は、0 次元の場合は命題 13.3 で示されている。よって正則元で割っていって 0 次元に帰着させる議論をするが、そのときにいろいろ微妙な議論を必要とする。

まず移入次元について。証明は整環の文脈で命題 21.9 で述べたが、可換の場合を述べておく。

命題 14.3. R を可換 d 次元 CM 環で等余次元とする。このとき $0 \neq N \in \mathsf{CM}\, R$ について次は同値。
(1) $\mathsf{id}\, N_R < \infty$ である。
(2) $\mathsf{id}\, N_R = d$ である。
(3) N は完全圏 $\mathsf{CM}\, R$ での移入的対象である。つまり任意の $M \in \mathsf{CM}\, \Lambda$ に対して、$\mathrm{Ext}_R^{>0}(M, N) = \mathrm{Ext}_R^1(M, N) = 0$ が成り立つ。

証明. 命題 21.9 より。 □

次に、正準加群の type 1 の定義は正則元での reduction と相性がよい（しかし局所化と相性が悪い）ので、reduction して定理 14.2 を示すために、ある条件のもとでは同型が reduction に対してうまく振る舞うことを見る。

命題 14.4. $(R, \mathfrak{m})$ を可換 CM 局所環とし、R 正則元 $x \in \mathfrak{m}$ を固定する。また $0 \neq M, N \in \mathsf{CM}\, R$ を取る。このとき $\mathsf{id}\, N = \dim R$ とすると（$\mathsf{id}\, N < \infty$ と同値だった）、自然な写像

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \otimes_R R/(x) \to \mathrm{Hom}_{R/(x)}(M/Mx, N/Nx)$$

は同型である。

証明. まず補題 14.1 により x は M 正則かつ N 正則でもあることに注意。よって短完全列

$$0 \to N \xrightarrow{x} N \to N/Nx \to 0$$

ができる。これに $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ で長完全列のばすと、

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{x} \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(M, N/Nx) \to \mathrm{Ext}_R^1(M, N)$$

が完全。しかし $\mathsf{id}\, N < \infty$ なことと $M \in \mathsf{CM}\, R$ なことから、命題 14.3 により $\mathrm{Ext}_R^1(M, N) = 0$ である。よって、上は短完全列になる。

一方、$\mathrm{Hom}_R(M, N/Nx) \cong \mathrm{Hom}_{R/(x)}(M/Mx, N/Nx)$ なことが、$-\otimes_R R/(x)\colon \mathsf{Mod}\, R \to \mathsf{Mod}\, R/(x)$ が忘却関手の左随伴なことから分かる。まとめると、

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{x} \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_{R/(x)}(M/Mx, N/Nx) \to 0$$

という短完全列が得られたので示された。 □

命題 14.5. $(R, \mathfrak{m})$ を可換ネーター局所環する。また $x \in \mathfrak{m}$ と $\mathsf{mod}\, R$ の射 $f\colon M \to N$ をとり、誘導される写像を $\overline{f}\colon M/Mx \to N/Nx$ と書く。このとき x が N 正則だと仮定すると、$\overline{f}$ が同型なことと f が同型なことは同値である。

証明. 明らかに f が同型なら $\overline{f}$ は同型である（$\otimes_R R/(x)$ は関手なので）。よって以下 $\overline{f}$ が同型だと仮定する。

まず f が全射なことを示す。次の可換図式がある:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads] & N \arrow[d, two heads] \\ M/Mx \arrow[r, "\overline{f}"] & N/Nx \end{tikzcd}$$

いま $\overline{f}$ が全射より、落ち着けば $N = f(M) + Nx$ が分かるので、$x \in \mathfrak{m}$ と $N \in \operatorname{mod} R$ に注意して中山の補題により $N = f(M)$ つまり f は全射である（こちら側に、x が N 正則であることはいらない）。

次に f が単射なことを示す。K を f の核とし、次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "x"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"] & N \arrow[r] \arrow[d, "x"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & K/Kx \arrow[r] \arrow[d] & M/Mx \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d] & N/Nx \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

これは縦も横も全て完全である（x が N 正則なことと、$\otimes_R R/(x)$ が右完全なことより）。よって蛇の補題より

$$0 \to K/Kx \to M/Mx \xrightarrow{\overline{f}} N/Nx \to 0$$

が完全になる。仮定より $\overline{f}$ が単射なので $K/Kx = 0$ が出て、中山の補題より $K = 0$、つまり f は単射である。 □

以上の 2 つから、正則元での reduction と Hom 集合や同型について、次のようにまとめられる。

系 14.6. R を可換 d 次元局所 CM 環とし、R 正則元 $x \in \mathfrak{m}$ と $0 \neq M, N \in \mathsf{CM}\, R$ を取る。

(1) $f\colon M \to N$ が与えられたとき、f が同型であることと、誘導される写像 $\overline{f}\colon M/Mx \to N/Nx$ が同型であることは同値である。

さらに $\operatorname{id} N = d$ とすると、次も成り立つ:

(2) M/Mx と N/Nx が同型ならば、その同型は M と N との同型に lift する。
(3) $\operatorname{End}_R(N) \otimes_R R/(x) \cong \operatorname{End}_{R/(x)}(N/Nx)$ という環同型がある。
(4) 自然な写像 $R \to \operatorname{End}_R(N)$ が同型であることと、自然な写像 $R/(x) \to \operatorname{End}_{R/(x)}(N/Nx)$ が同型であることは同値である。

証明. (1) これは補題 14.1 と命題 14.5 よりすぐ（x が N 正則でもあるので）。

以下 $\operatorname{id} N = d$ を仮定する。よって命題 14.4 が使える。

(2) 命題 14.4 により、同型 $\overline{f}\colon M/Mx \to N/Nx$ は必ずある $f\colon M \to N$ から誘導されるものと一致している。よって (1) を使えば、f が同型が従う（写像が lift することに $\operatorname{id} N = d$ が必要）。

(3) 命題 14.4 より。

(4) 次の可換図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \operatorname{End}_R(N) \arrow[d, two heads] \\
R/(x) \arrow[r] \arrow[dr] & \operatorname{End}_R(N) \otimes_R R/(x) \arrow[d, "\simeq"] \\
 & \operatorname{End}_{R/(x)}(N/Nx)
\end{tikzcd}$$

ここで上の写像は全部自然な写像で、可換なことはすぐチェックできる。また $\operatorname{End}_R(N) \otimes_R R/(x) \cong \operatorname{End}_{R/(x)}(N/Nx)$ なことも使った。よって主張は (1) より従う。 □

以上の準備のもとで正準加群についての定理 14.2 が証明できる。証明しやすい形で述べておく。

定理 14.7. $(R, \mathfrak{m})$ を d 次元 CM 局所環とする。$0 \neq \omega \in \mathsf{CM}\, R$ をとり、これが $\mathsf{id}_R\, \omega = d$（$\mathsf{id}_R\, \omega < \infty$）を満たすとすると、次の 2 つは同値である:

(1) ω が type 1 である、つまり $\mathrm{Ext}^d_R(k, \omega) = 1$ である。
(2) 自然な写像 $R \to \mathrm{End}_R(\omega)$ が同型である。

証明. d についての帰納法で示す。
$d = 0$ のとき。命題 13.3 より従う。
$d > 0$ とする。このとき R 正則元 $x \in \mathfrak{m}$ を固定する（$\operatorname{depth} R = d > 0$ より取れる）。$\overline{R} := R/(x), \overline{\omega} = \omega/\omega x$ と書くと、まず命題 9.16 により $\overline{R}$ は $d-1$ 次元 CM 局所環である。また x は R 正則なので自動的に ω 正則でもあり（補題 14.1）、よって命題 9.16 により $\overline{\omega} \in \mathsf{CM}\, \overline{R}$ である。さらに、系 21.7 により $\mathsf{id}_{\overline{R}}\, \overline{\omega} = \mathsf{id}_R\, \omega - 1 = d - 1$ が分かるので、$\overline{\omega} \in \mathsf{CM}\, \overline{R}$ はこの定理の状況を満たしている。
(1) $\Rightarrow$ (2): ω が (1) を満たすので、命題 9.22 により、$\overline{\omega}$ は $\overline{R}$ 加群として type 1 である。よって帰納法の仮定により自然な写像 $\overline{R} \to \mathrm{End}_{\overline{R}}(\overline{\omega})$ は同型である。ここで系 14.6 により、自然な写像 $R \to \mathrm{End}_R(\omega)$ が同型、つまり (2) が従う。
(2) $\Rightarrow$ (1): ω が (2) を満たすので、系 14.6 により $\overline{R} \to \mathrm{End}_{\overline{R}}(\overline{\omega})$ は同型である。よって帰納法の仮定により $\overline{\omega}$ は type 1 である。よって命題 9.22 により ω も type 1 である。 □

これにより定理 14.2 が示された。ここから直ちに、局所化で正準加群が保たれることが従い、Bass 数を用いた特徴づけも得られる:

系 14.8. R を可換 CM 局所環とし、ω を正準 R 加群とする。このとき任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ について、$\omega_\mathfrak{p}$ は正準 $R_\mathfrak{p}$ 加群である。とくに次が成り立つ:

$$\mu^i(\mathfrak{p}, \omega) = \begin{cases} 1 & (i = \operatorname{ht} \mathfrak{p}) \\ 0 & (i \neq \operatorname{ht} \mathfrak{p}) \end{cases}.$$

証明. 定理 14.2 の各条件が局所化で保たれるかを見ればよい。

(1) ω が MCM なので、$\omega_\mathfrak{p}$ は定理 9.15 により MCM な $R_\mathfrak{p}$ 加群である。
(2) $\mathsf{id}_R\, \omega < \infty$ なので、命題 11.4 により $\mathsf{id}_{R_\mathfrak{p}}\, \omega_\mathfrak{p} < \infty$ である。
(3) 自然な写像 $R \to \mathrm{End}_R(\omega)$ が同型であるので、局所化して $R_\mathfrak{p} \to \mathrm{End}_R(\omega)_\mathfrak{p}$ が同型だが、$\mathrm{End}_R(\omega)_\mathfrak{p} = \mathrm{End}_{R_\mathfrak{p}}(\omega_\mathfrak{p})$ が補題 3.11 より従う。よって自然な写像 $R_\mathfrak{p} \to \mathrm{End}_{R_\mathfrak{p}}(\omega_\mathfrak{p})$ は同型である。

以上より $\omega_\mathfrak{p}$ は定理 14.2 の条件を満たすので、$R_\mathfrak{p}$ 加群として正準加群である。
後半の Bass 数についての主張は命題 13.2 と上のことから従う。 □

また実は以上の準備から、正準加群の一意性も従う。

命題 14.9. R を可換 d 次元 CM 局所環とする。このとき ω_1 と ω_2 がともに正準加群ならば、$\omega_1 \cong \omega_2$ が成り立つ。

証明. d についての帰納法で示す。
$d = 0$ のとき。命題 13.3 より従う。
$d > 0$ のとき。R 正則元 x をとる（$\operatorname{depth} R = d > 0$ より取れる）。このとき定理 14.7 の証明により明らかに $\omega_i/\omega_i x$ は $R/(x)$ 加群として正準加群である。よって帰納法の仮定により $\omega_1/\omega_1 x \cong \omega_2/\omega_2 x$ が成り立つ。ここで系 14.6(2) を適応でき、$\omega_1 \cong \omega_2$ が従う。 □

14.2. **CM 圏の正準双対.** 正準加群のありがたみは、　**正準加群での双対が CM 圏の自己双対を与え、とくに正準加群が CM 圏の移入余生成子を与える**ことである。このことについて示す。

命題 14.10. R を可換 CM 局所環とし、ω を正準 R 加群とする。

(1) $(-)^\dagger := \mathrm{Hom}_R(-, \omega)$ という関手は $\mathsf{CM}\, R$ 上の自己反変関手になっている、つまり $M \in \mathsf{CM}\, R$ について $M^\dagger \in \mathsf{CM}\, R$ が成り立つ。

(2) $(-)^\dagger \colon \mathsf{CM}\,R \to \mathsf{CM}\,R$ は完全関手である。
(3) $\mathsf{CM}\,R$ 上で $(-)^{\dagger\dagger} \simeq \mathsf{id}_{\mathsf{CM}\,R}$ という自然同値がある、つまり $(-)^\dagger$ は $\mathsf{CM}\,R$ の完全圏としての自己双対である。

証明. (1) $M \in \mathsf{CM}\,R$ を任意に取る。このとき $\mathsf{CM}\,R$ は射影的に豊富（射影対象はちょうど $\mathsf{proj}\,R$）だったことから、次の $\mathsf{CM}\,R$ での短完全列たち

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,\\
&0 \longrightarrow M_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0,\\
&\qquad\vdots\\
&0 \longrightarrow M_d \longrightarrow P_{d-1} \longrightarrow M_{d-1} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

で $P_i \in \mathsf{proj}\,R$ となるものが取れる。一方命題 14.3 により $\omega \in \mathsf{CM}\,R$ は $\mathsf{CM}\,R$ の移入対象だったため $(-)^\dagger$ は $\mathsf{CM}\,R$ の短完全列を（とりあえず $\mathsf{mod}\,R$ の）短完全列に移す。よって、次の $\mathsf{mod}\,R$ の短完全列たちが得られる：

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow M^\dagger \longrightarrow P_0^\dagger \longrightarrow M_1^\dagger \longrightarrow 0,\\
&0 \longrightarrow M_1^\dagger \longrightarrow P_1^\dagger \longrightarrow M_2^\dagger \longrightarrow 0,\\
&\qquad\vdots\\
&0 \longrightarrow M_{d-1}^\dagger \longrightarrow P_{d-1}^\dagger \longrightarrow M_d^\dagger \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

よって次が完全である：

$$0 \to M^\dagger \to P_0^\dagger \to P_1^\dagger \to \cdots \to P_{d-1}^\dagger$$

いっぽう、$P_i \in \mathsf{proj}\,R = \mathsf{add}\,R$ だったため $P_i^\dagger \in \mathsf{add}\,R^\dagger = \mathsf{add}\,\omega$ となり（$R^\dagger = \omega$ より）、とくに $P_i^\dagger$ は MCM である。よって depth lemma 補題 9.29 により $M^\dagger \in \mathsf{CM}\,R$ である。

(2) 関手の well-defined 性は (1) であり、完全性は ω が $\mathsf{CM}\,R$ の移入対象なこと（命題 14.3）より従う。

(3) 一般論から自然な射 $\alpha_M \colon M \to M^{\dagger\dagger}$ が得られるが、これが $M \in \mathsf{CM}\,R$ のときに同型を示せばよい。これは次の事実から形式的に従う：

- $(-)^\dagger \colon \mathsf{CM}\,R \to \mathsf{CM}\,R$ が完全関手である。
- 自然な射 $R \to \mathrm{End}_R(\omega)$ が同型である。

詳しくやろう。

まず α_R **は同型である**。なぜなら、次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\alpha_R"] \arrow[dr, "\varphi"'] & R^{\dagger\dagger} = \mathrm{Hom}_R(R,\omega)^\dagger \arrow[d, "\simeq"] \\
& \omega^\dagger = \mathrm{Hom}_R(\omega,\omega)
\end{tikzcd}$$

ここで、φ は自然な R 倍写像で、縦の同型は $\omega \cong \mathrm{Hom}_R(R,\omega)$ から誘導されるもの（可換性は落ち着いてチェックするだけ）。で斜めの射 φ が同型なことがまさに正準加群の同値な定義での条件である（定理 14.2）。よって α_R は同型である。（これが使いたいから、type 1 の定義よりも End 環についての条件のほうが多分表現論的には相性がいいのです）

次に、一般論から任意の $P \in \mathsf{proj}\,R$ について α_P が同型が分かる。最後に任意の $M \in \mathsf{CM}\,R$ を考えると、$\mathsf{CM}\,R$ が射影的に豊富（射影対象が $\mathsf{proj}\,R$）だったことから、2 回つかって

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow \Omega M \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,\\
&0 \longrightarrow \Omega^2 M \longrightarrow P_1 \longrightarrow \Omega M \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

という $\mathsf{CM}\,R$ での完全列で $P_0, P_1 \in \mathsf{proj}\,R$ なるものが取れる。つまり $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ が完全である。一方上の 2 つの短完全列を $(-)^{\dagger\dagger}$ で送ると、(2) より送った先も短完全列で、よって次の可換図式で横が完全列であるものができる：

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{P_1}"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{P_0}"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_M"] & 0 \\
P_1^{\dagger\dagger} \arrow[r] & P_0^{\dagger\dagger} \arrow[r] & M^{\dagger\dagger} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ここですでに見たことから左 2 つは同型なので α_M も同型である。 □

この自己双対を一応名前付けておく。

定義 14.11. R を正準加群 ω を持つ可換 CM 局所環としたとき、$(-)^\dagger := \mathrm{Hom}_R(-, \omega)$ という完全圏 $\mathsf{CM}\,R$ の自己双対を**正準双対** *(canonical dual)* と呼ぶ。

この正準双対は強力で、例えば CM 圏が移入的に豊富なことが分かり、正準加群の新たな特徴づけも与える。

系 14.12. R を正準加群 ω を持つ可換 CM 局所環とする。このとき $\mathsf{CM}\,R$ は移入的に豊富であり、その移入対象はちょうど $\mathsf{add}\,\omega$ の元である。またさらに $X \in \mathsf{CM}\,R$ について次が同値である：

(1) $X \cong \omega$ である。
(2) X は $\mathsf{CM}\,R$ の直既約移入対象である。

証明. 前半は、正準双対が完全圏 $\mathsf{CM}\,R$ の自己双対なことと、$\mathsf{CM}\,R$ が射影的に豊富で射影対象は $\mathsf{proj}\,R$ に一致することと、$R^\dagger \cong \omega$ なことから直ちに従う。

後半は X に対して、(1) ならば (2) は明らかであり（ω は End が R と同型なので局所環より直既約である）、(2) ならば (1) は、一度正準双対をとれば「直既約射影対象は R と同型」という主張から従う。 □

上の一意性はちょうど命題 14.9 の（完全圏論からの）別証明を与えていることに注意されたい。すなわち**正準加群は（存在すれば）CM 圏の直既約移入対象として特徴づけられる**のである！

（こういう非常に基本的な事実すらまともにちゃんと明記して証明してある文献が可換環にはなくて悲しい）

よりもっと欲張って、正準加群を「CM 圏の自己双対を与えるような加群」として特徴づけておく。

命題 14.13. R を可換 CM 局所環、$X \in \mathsf{mod}\,R$ とする。このとき次は同値である。

(1) X は正準加群である。
(2) $\mathrm{Hom}_R(-, X)$ という関手が完全圏 $\mathsf{CM}\,R$ 上の完全自己関手であり、通常の二回双対への自然変換 $\alpha_M \colon M \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, X), X)$ が任意の $M \in \mathsf{CM}\,R$ 上同型である。

証明. (1) ⇒ (2): すでに命題 14.10 で見た。

(2) ⇒ (1): 正準加群の定義を定理 14.2 のもので採用する。

- $X \in \mathsf{CM}\,R$ なこと。これは関手 $\mathrm{Hom}_R(-, X) \colon \mathsf{CM}\,R \to \mathsf{CM}\,R$ が well-defined だという仮定に、R を代入すれば $\mathrm{Hom}_R(R, X) = X \in \mathsf{CM}\,R$ から従う。
- X の移入次元が有限なこと。これは $\mathrm{Hom}_R(-, X)$ が $\mathsf{CM}\,R$ 上完全関手であるという仮定から、X は $\mathsf{CM}\,R$ の移入対象であり、よって命題 14.3 より従う。
- 自然な写像 $R \to \mathrm{End}_R(X)$ が同型なこと。これは、上でも現れた可換図式

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\alpha_R"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(R, X), X) \arrow[d, "\simeq"] \\
& \mathrm{Hom}_R(X, X)
\end{tikzcd}$$

で φ が自然な写像になっていることと α_R が同型なことから従う。

□

15. 整拡大の上昇やら次元の普遍性やら

正直ここらへんが可換環で苦手、できるだけ元をとらずにいきたい。

定義 15.1. 可換環の単射 $R \hookrightarrow S$ を考える。

(1) $x \in S$ が R **上整** *(integral)* であるとは、R と x で生成される S の部分環 $R[x]$ が有限生成 R 加群になるときをいう。
(2) S が R の**整拡大**であるとは、S の任意の元が R 上整であるときをいう。
(3) この拡大が**有限拡大** *(finite extension)* であるとは、S が R 加群として有限生成なときをいう。

命題 15.2. 可換環の単射 $R \hookrightarrow S$ と $x \in S$ について次は同値:

(1) x は R 上整。
(2) ある R 係数のモニック多項式が存在し、x はその根になっている。

この (2) のような x についての関係式のことを integral relation と呼ぶ。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): いま S の部分環 $R[x] \subset S$ が R 上有限生成加群である。ここで、$R \subset R + xR \subset R + xR + x^2R \subset \cdots$ という $R[x]$ の R 部分加群の上昇列があり、union をとったら $R[x]$ に一致する。よって $R[x]$ の有限生成性よりどこかで $R[x]$ に一致している。つまりある $n \geq 1$ が存在し、$R[x]$ は R 加群として $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ で生成される。ここで $x^n \in R[x]$ を考えると、これが $1, x, \cdots, x^{n-1}$ で生成されることから、x は n 次モニック R 係数多項式の根である。

(2) $\Rightarrow$ (1): (2) の条件より、ある $n \geq 1$ が存在し、x^n は $1, \cdots, x^{n-1}$ の和で書けている。よって帰納的に x のべきは全て $(n-1)$ 次以下のべきに書き直せる。つまり $R[x]$ は R 加群として $1, x, \cdots, x^{n-1}$ で生成されており有限生成。 □

普通は整の定義はモニック多項式とかで定義するが、有限生成加群といったほうが自分にとっては分かった気になる。

他の本にあるようなことを一応なぞっておく。

補題 15.3. 可換環の単射 $R \hookrightarrow S$ と $x \in R$ に対して、次は同値である:

(1) x は R 上整である。
(2) ある S の部分環 T で $R[x] \subset T \subset S$ なるものがあり（つまり x と R を含む S の部分環）、R 加群として T は有限生成である。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): T として $R[x]$ を取れば命題 15.2 よりよい。

(2) $\Rightarrow$ (1): **まず R が可換ネーター環の場合は証明が一瞬で終わる！**条件より T なる有限生成 R 加群があり、もし R がネーターなら、$R[x]$ は T の部分加群より有限生成である。よって定義より x は R 上整である。

R がネーターだと仮定しない場合には行列式のトリックを使いすごくめんどくさい！x の integral relation を、行列式トリックでがんばってつくる。T の R 加群としての生成系を $a_1, \cdots, a_n$ とし、これに x を当てる。$Tx \subset T$ なことから、各 $a_i x$ はまた a_i たちの R 線形和で書ける。かいてやって、

$$\begin{aligned} a_1 x &= a_1 r_{11} + a_2 r_{21} + \cdots + a_n r_{n1} \\ a_2 x &= a_1 r_{12} + a_2 r_{22} + \cdots + a_n r_{n2} \\ &\vdots \\ a_n x &= a_1 r_{1n} + a_2 r_{2n} + \cdots + a_n r_{nn} \end{aligned}$$

となるような $r_{ij} \in R$ が存在する。行列でかくと、

$$[a_1, \cdots, a_n]x = [a_1, \cdots, a_n] \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ r_{n1} & & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

つまり、r_{ij} たちの行列を A とすると、

$$[a_1, \cdots, a_n](xE_n - A) = 0$$

ここで E_n は単位行列。よって、$(xE_n - A)$ の余因子行列を右から掛けることで、

$$[a_1, \cdots, a_n] \cdot \det(xE_n - A) = 0$$

となる。よって $\det(xE_n - A) \in R[x]$ は T を殺す。いま $1 \in T$ であることから、1 にかけてやることで、$\det(xE_n - A) = 0$ となる。$\det(xE_n - A)$ を展開すると R 係数のモニック多項式に x を代入した形になっているので示された。 □

ここから、次はすぐ分かる:

系 15.4. 有限拡大は整拡大である。

またいわゆる整閉包が well-defined になる:

系 15.5. 可換環の単射 $R \hookrightarrow S$ において、S の元で R 上整なもの全体を $\overline{R}$ とすると、$\overline{R}$ は S の部分環となり、S の中で R を含む最大の整拡大となっている。

証明. $\overline{R}$ が和差と積について閉じていればよい。$x, y \in S$ を R 上整とする。このとき $R[x, y]$ が有限生成 R 加群なことを示せば、$x + y, x - y, xy$ が整なことが補題 15.3 より従う。

x が R 上整より $R[x]$ は有限生成 R 加群であり、y は R 上整なのでもちろん $R[x]$ 上でも整である。よって $R[x, y] = R[x][y]$ は有限生成 $R[x]$ 加群となるので、有限生成 R 加群である。 □

この証明と同様の議論を繰り返して、次が分かる:

系 15.6. 可換環の単射 $R \hookrightarrow S$ において、$c_1, \cdots, c_n \in S$ が R 上整とする。このとき、S の部分環 $R[c_1, \cdots, c_n]$ は R の有限拡大であり、とくに整拡大である。

次に整拡大で次元とかが変わらないこと。これは CM 性が基礎環のとり方によらないこととか、非可換でもネーター代数のときとかで使う。

まず次元について。いわゆる上昇下降定理とかだと思う。ここらへんは元をとるので嫌い。

補題 15.7. 整拡大 $R \subset S$ について、S が整域のとき、次は同値:

(1) R が体。
(2) S が体。

証明. (1) ⇒ (2): S の任意の元 $x \neq 0$ をとると、$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ in S となるような $a_i \in R$ が存在する。ここで、定数項 a_n がゼロなら、x でくくりだして、「R が整域なので」くくったほうがゼロとなる。これを繰り返して、$a_n \neq 0$ としてよい。すると、x でくくって、$x \cdot b = a_n$ という $b \in S$、$0 \neq a_n \in R$ とできる。「R が体より」a_n は可逆であるので、ここからすぐ x が S で可逆となる。

(2) ⇒ (1): $0 \neq x \in R$ をとる。$1/x \in S$ が取れるので、この y の integral relation を書くと、$1/x^n + a_1/x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}/x + a_n = 0$ in S となる $a_i \in R$ がとれる。これに x^{n-1} をかけると、

$$1/x + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-2} + a_n x^{n-1} = 0$$

が S で成り立つ。よって移項すれば $1/x \in R$ が従う。 □

命題 15.8. $R \subset S$ を整拡大とするとき、次が成り立つ:

(1) $P \in \operatorname{Spec} S$ について、$R \cap P \in \operatorname{Max} R$ と $P \in \operatorname{Max} S$ は同値。とくに、$R \cap (-) : \operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$ は写像 $\operatorname{Max} S \to \operatorname{Max} R$ を誘導する。

(2) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max} R$ をとると、ある $P \in \operatorname{Max} S$ が存在して $\mathfrak{p} = R \cap P$ となる。つまり上の写像 $\operatorname{Max} S \to \operatorname{Max} R$ は全射となる。

つまり次の可換図式があり、集合論的に pullback になっている:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Max} S \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \operatorname{Max} R \arrow[d, hook] \\
\operatorname{Spec} S \arrow[r, "R\cap(-)"'] & \operatorname{Spec} R
\end{tikzcd}$$

証明. (1) $\mathfrak{p} := R \cap P$ とすると、単射 $R/\mathfrak{p} \hookrightarrow S/P$ ができる。$P \in \operatorname{Spec} S$ より S/P は整域。また、$R \subset S$ が整拡大なことから $R/\mathfrak{p} \subset S/P$ も整拡大なことが（integral relation 書いて）すぐ分かる。よって補題 15.7 より、S/P が体なことと $R/\mathfrak{p}$ が体なことは同値。つまり $P \in \operatorname{Max} S$ と $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max} R$ は同値。

(2) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max} R$ をとる。$\mathfrak{p}S$ という S のイデアルを考える（$\mathfrak{p}$ で生成される S のイデアル）。このとき、$\mathfrak{p}S \neq S$ を示せさえすれば、$\mathfrak{p}S$ を含む S の極大イデアル P をとれば、$\mathfrak{p} = P \cap R$ となる。なぜなら、$\mathfrak{p} \subset P \cap R \in \operatorname{Spec} S$ であり、$\mathfrak{p}$ は極大イデアルだから。

よって以下がんばって、$\mathfrak{p}S \neq S$ を示す !! また行列式のトリック使う ;; $\mathfrak{p}S = S$ を仮定して矛盾を示す。まず有限拡大にとりかえるみたいなことをする。

$1 \in S = \mathfrak{p}S$ により、$1 = r_1 c_1 + \cdots + r_n c_n$ with $r_i \in \mathfrak{p}$ で $c_i \in S$ となるものが取れる。このとき、$T := R[c_1, \cdots, c_n]$ を考える。系 15.6 により T は R の有限拡大である。

このとき、$\mathfrak{p}T$ は明らかに 1 を含む T のイデアルなので、$\mathfrak{p}T = T$ である（これで、有限拡大の場合の持っていけたような状況）。ここから、T の R 加群としての生成系をとり行列式のトリックする。

つまり $\mathfrak{p}T = T$ なことから、T の生成系を $\mathfrak{p}$ かける T の生成系、という形でかき、引き算していろいろやると、結局、$\mathfrak{p}$ 係数のある行列 A について $\det(E_n - A)$ が T を殺す。いま T は 1 を含むので、$\det(E_n - A) = 0$ となる。しかし展開すると、$1 + \mathfrak{p}$ の元 $= 0$ となり、$1 \in \mathfrak{p}$ となり矛盾する。 □

すごくめんどくさかった。でもここを超えればあとはこれに帰着できる。次が整拡大の重要な性質（むしろ以降これしか使わない）。

定理 15.9. $R \hookrightarrow S$ を整拡大とし、対応する射 $R \cap (-) \colon \operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$ を考える。

(1) (Lying-over) $\operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$ は全射である。

(2) (Incomparability) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ を固定し、これに飛ぶような $\operatorname{Spec} S$ の素イデアルたちの間には、決して包含関係がない。

(3) (Going-up) $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ という $\operatorname{Spec} R$ での包含と、$R \cap P_1 = \mathfrak{p}_1$ なる $P_1 \in \operatorname{Spec} S$ が任意に与えられたとする。このとき、ある $P_2 \in \operatorname{Spec} S$ であり、$P_1 \subset P_2$ かつ $R \cap P_2 = \mathfrak{p}_2$ なるものが取れる。

証明. (1) 極大イデアルに帰着させる！$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ をとり、R 加群として $R \hookrightarrow S$ を局所化すると、単射 $R_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow S_{\mathfrak{p}} := S \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$ ができ、これは環準同型である。少し怖いが、$S_{\mathfrak{p}}$ は結局、S の積閉集合 $R \setminus \mathfrak{p}$ による S の局所化なので大丈夫！また、$S_{\mathfrak{p}}$ は $R_{\mathfrak{p}}$ の整拡大である！なぜなら、$S_{\mathfrak{p}}$ の任意の元は x/a with $x \in S$, $a \in R \setminus \mathfrak{p}$ とかけて、x の元の R 上の integral relation をかいてやって、a の何乗かで割ってやれば x/a の $R_{\mathfrak{p}}$ 上の integral relation ができる！

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Max} S_{\mathfrak{p}} \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \operatorname{Max} R_{\mathfrak{p}} = \{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}\} \arrow[d, hook] \\
\operatorname{Spec} S_{\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \operatorname{Spec} R_{\mathfrak{p}} \arrow[d, hook] \\
\operatorname{Spec} S \arrow[r] & \operatorname{Spec} R
\end{tikzcd}$$

このような可換図式ができて、命題 15.8 より一番上が全射！なことより、$\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Max} R_{\mathfrak{p}}$ に対応する何らかの左上の元ができる。これを左下まで落とせば、右にいくと可換性より $\mathfrak{p}$ になり全射である。

(2) 上の図式と pullback 性とかより直感的には、$\mathfrak{p}$ に飛ぶものは全て $\operatorname{Max} S_{\mathfrak{p}}$ から来ているので包含関係はない。念の為ちゃんという。局所化 $S \to S_{\mathfrak{p}}$ により $\operatorname{Spec} S_{\mathfrak{p}}$ を $\operatorname{Spec} S$ の部分集合だと思うと、$P \in \operatorname{Spec} S$ が $\operatorname{Spec} S_{\mathfrak{p}}$ に属することは、$P \cap (R \setminus \mathfrak{p}) = \varnothing$ なことと同値、つまり $R \cap P \subset \mathfrak{p}$ と同値。（以上のことから、下の四角も集合論的に pullback だとわかる）

ここで、$P_1, P_2 \in \operatorname{Spec} S$ について $R \cap P_1 = \mathfrak{p} = R \cap P_2$ だとする。上のことから $P_1, P_2 \in \operatorname{Spec} S_{\mathfrak{p}}$ と思える。よって命題 15.8 より $P_1, P_2 \in \operatorname{Max} S_{\mathfrak{p}}$ である。よって包含関係はない！

(2) $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ in $\operatorname{Spec} R$ と $R \cap P_1 = \mathfrak{p}_1$ なる $P_1 \in \operatorname{Spec} S$ が与えられたとする。このとき、$R \hookrightarrow S$ は $R/\mathfrak{p}_1 \hookrightarrow S/P_1$ という単射を誘導する。またこれは明らか整拡大（S の元の R 上の integral relation を剰余におとせばよい）。次の可換図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} S/P_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\simeq"] & \operatorname{Spec} R/\mathfrak{p}_1 \arrow[d, "\simeq"] \\
V(P_1) \arrow[r] \arrow[d, hook] & V(\mathfrak{p}_1) \arrow[d, hook] \\
\operatorname{Spec} S \arrow[r, two heads] & \operatorname{Spec} R
\end{tikzcd}$$

これは可換であり、一番上（と一番下）は (1) より全射。よって、$\mathfrak{p}_2 \in V(\mathfrak{p}_1)$ に対応する元が $V(P_1)$ から取れるので、それを P_2 とすればよい。 □

ここから、整拡大では次元が変わらないことが分かる（実質、lying-over と going-up と incomparability しか使わない）。

系 15.10. $R \subset S$ を可換環の整拡大とすると、$\dim R = \dim S$ である。

証明. まず $\operatorname{Spec} R$ において真の増大列 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ があったとする。すると lying-over と going-up を順次 $\operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$ で使えば、$\operatorname{Spec} S$ における増大列 $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$ であって $R \cap P_i = \mathfrak{p}_i$ となるものが取れる。ここでこの増大列は真の増大列である、なぜならどこかで等しかったら $\mathfrak{p}$ のほうでも等しくなっちゃうので。よって、「$\operatorname{Spec} R$ に長さ n の chain があるならば、$\operatorname{Spec} S$ に長さ n の chain ができる」ことから、$\dim R \leq \dim S$ が従う（$\dim R = \infty$ のときでも大丈夫）。

逆に、$\operatorname{Spec} S$ における真の増大列 $P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$ があったとする。このとき $R \cap (-) \colon \operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$ で送ることで、$\mathfrak{p}_i := R \cap P_i$ とすれば、とりあえず列 $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$ ができる。これが真の増大列であることを示す。もしある i について $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_{i+1}$ になってしまったとすると、P_i と P_{i+1} はともに同じ $\operatorname{Spec} R$ の元にとぶ。よって incomparability より、P_i と P_{i+1} に包含関係はないことになり矛盾。よってこれは真の増大列である。よって、「$\operatorname{Spec} S$ に長さ n の chain があるならば、$\operatorname{Spec} R$ に長さ n の chain ができる」ことから、$\dim S \leq \dim R$ が従う（$\dim S = \infty$ のときでも大丈夫）。

以上のことから $\dim R = \dim S$ である。 □

また、有限生成加群の次元は、少なくとも有限拡大なら、基礎環のとり方によらない。あとでネーター代数でもまたやる。

命題 15.11. $R \subset S$ を可換環の有限拡大、$M \in \operatorname{\mathsf{mod}} S$ としたとき、$\dim M_R = \dim M_S$ である。とくに $\dim S = \dim S_R$ となる。

証明. M が有限生成 S 加群で、$R \subset S$ が有限拡大なことより、M は有限生成 R 加群なことに注意（整拡大だとこれがまずい??）。よって $\dim M_R = \dim(R/\operatorname{Ann}_R M)$ で $\dim M_S = \dim(S/\operatorname{Ann}_S M)$ となる（左は加群としての Krull 次元、右は環としての Krull 次元）。一方、$R \subset S$ は単射 $R/\operatorname{Ann}_R M \hookrightarrow S/\operatorname{Ann}_S M$ を誘導することが分かる（落ち着けば、$\operatorname{Ann}_R M = R \cap \operatorname{Ann}_S M$ なので）。これは明らかに有限拡大であるので、とくに整拡大で、2 つの環の Krull 次元は一致する。よって $\dim M_R = \dim(R/\operatorname{Ann}_R M) = \dim(S/\operatorname{Ann}_S M) = \dim M_S$ である。 □

これが有限拡大を整拡大に緩めたり、有限生成の仮定を排除したらどうなるかは知らない。

Part 2. 非可換、とくにネーター代数あたり

16. 半局所環について

定義 16.1. （非可換）環 Λ が半局所 **(semilocal)** であるとは、$\Lambda/\mathcal{J}$ が半単純環なときをいう、ここで $\mathcal{J} := \mathcal{J}_\Lambda = \operatorname{rad}\Lambda$: Jacobson 根基。

いろんな同値な言い換えがある。可換の場合はもっと楽。

命題 16.2. （非可換）環 Λ について、次は同値、また条件の「右」を全て「左」に置き換えても同値。

(1) $\Lambda/\mathcal{J}$ が半単純環。
(2) $\Lambda/\mathcal{J}$ が右アルティン環。
(3) $\Lambda/\mathcal{J}$ が有限余生成。
(4) ある有限個の Λ の極大右イデアル $M_1, \cdots, M_n$ を用いて $\mathcal{J} = M_1 \cap \cdots \cap M_n$ とかける。
(5) $\Lambda/\mathcal{J}$ を右 Λ 加群と見ると（有限生成）半単純加群。
(6) 任意の右 Λ 加群 $M \in \mathsf{Mod}\,\Lambda$ について、$\operatorname{soc} M = \{x \in M \mid x \cdot \mathcal{J} = 0\} \cong \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M)$.
(7) 半単純右 Λ 加群の（無限）直積も半単純加群。
(8) 単純右 Λ 加群の（無限）直積は半単純加群。

証明. (1)-(5) はスタンダード。(6) の性質はよく使う。あとはまあ知らなくていい。

(1) $\Rightarrow$ (2): 半単純環の定義を、「右加群として半単純加群」とすれば、$\Lambda/\mathcal{J}$ は有限生成半単純加群より長さ有限、とくにアルティン。よって $\Lambda/\mathcal{J}$ は右アルティン。

(2) $\Rightarrow$ (3): アルティン加群は常に有限余生成（加群 M が有限余生成の定義は、$0 = \cap N_i$ と部分加群 $N_i \leq M$ を用いて表せるなら、左辺はゼロのままで、この共通部分を有限個に取り替えられること）。

(3) $\Rightarrow$ (4):

$$\mathcal{J} = \bigcap\{M \mid M \text{ は極大右イデアル }\}$$

に $\Lambda/\mathcal{J}$ が有限余生成使うと、(4) のように取り替えられる。

(4) $\Rightarrow$ (5): $\mathcal{J} = M_1 \cap \cdots \cap M_n$ と極大右イデアル M_i たちを使って書くと、

$$\Lambda/\mathcal{J} \hookrightarrow \Lambda/M_1 \oplus \cdots \Lambda/M_n$$

というふうに、$\Lambda/\mathcal{J}$ が半単純加群の部分加群となる。よって $\Lambda/\mathcal{J}$ は半単純右加群。

(5) $\Rightarrow$ (1): 半単純環の定義の一つ。

(6)-(8) は調べてて初めて知った。(6) は割とすぐ：

(1) $\Rightarrow$ (6): $\operatorname{soc} M$ は半単純加群より、$\mathcal{J}$ で消える。よって $(\operatorname{soc} M) \cdot \mathcal{J} = 0$ より、$\operatorname{soc} M \subset \{x \in M \mid x \cdot \mathcal{J} = 0\}$ (こちらの包含は仮定何もいらない)。逆に $x \cdot \mathcal{J} = 0$ だとすると、$x\Lambda \leq M$ という Λ 部分加群を考える。これは、$(x\Lambda)\mathcal{J} \subset x\mathcal{J} = \{0\}$ となるので、$\mathcal{J}$ かけて消える、つまり $\Lambda/\mathcal{J}$ 加群、よって (1) よりこれは半単純加群。なので $x\Lambda \subset \operatorname{soc} X$ より $x \in \operatorname{soc} X$。

(6) $\Rightarrow$ (5): $\operatorname{soc}(\Lambda/\mathcal{J}) = \Lambda/\mathcal{J}$ が (6) の公式から出る。よって $\Lambda/\mathcal{J}$ は半単純加群。

(6) $\Rightarrow$ (7): 「$\mathcal{J}$ かけて死ぬことと半単純加群が同値」が (6) から言えるので、直積考えても元をとればすぐ半単純の直積が半単純が出る。

(7) $\Rightarrow$ (8): 明らか。

(8) $\Rightarrow$ (5): $\mathcal{J}$ の定義から、

$$\Lambda/\mathcal{J} \hookrightarrow \prod\{\Lambda/M \mid M \text{ は極大右イデアル }\}$$

という単射があり、各 Λ/M は単純右加群。よって (8) よりこの直積も半単純加群。半単純加群の部分加群は半単純より、$\Lambda/\mathcal{J}$ は半単純加群。 $\square$

半局所環の重要な性質。

命題 16.3. Λ を半局所環とする。$\Lambda/\mathcal{J}$ は右加群として半単純だが、$\Lambda/\mathcal{J} = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ と書けていたとする。このとき、任意の単純右 Λ 加群は必ずこの S_i のどれかと同型。つまり、単純右加群の同型類は有限個しかない。

証明. S を単純加群とすると、$\mathcal{J}$ の定義により $\Lambda/\mathcal{J} \twoheadrightarrow S$ という全射がとれる（半局所いらない）。ここで $\Lambda = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ と単純加群の和に分かれていたので、（例えば Jordan-Hölder の組成因子の一意性なり、半単純加群の話より、なりから、）S は S_i のどれかと同型。 □

可換の場合。

命題 16.4. 可換環 R について次は同値。

(1) R は半局所、つまり $R/\mathcal{J}_R$ が半単純環。
(2) 単純 R 加群の同型類が有限個しかない。
(3) $\operatorname{Max} R$ は有限集合。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): 命題 16.3 より。
(2) $\Leftrightarrow$ (3): 「可換」環 R では、$\operatorname{Max} R$ と、単純 R 加群の同型類の集合に全単射がある。極大イデアル M については R/M が単純加群だし、逆に単純加群 S については $\operatorname{Ann} S$ が極大イデアルになる。これが全単射なことはすぐ確認できる（可換性に注意！）
(3) $\Rightarrow$ (1): 命題 16.2 の (4) が満たされるので R は半局所。 □

例 16.5. 次は半局所環の例。

- 可換ネーター局所環。
- 可換ネーター半局所環 R 上のネーター R 代数（命題 17.5）。
- 右アルティン環・左アルティン環。
- semiperfect ring (半完全環)。

証明. 右アルティン環 Λ が半局所を示す。自分自身 Λ_Λ はアルティン加群であり、その商 $\Lambda/\mathcal{J}$ もアルティン加群である。よって命題 16.2 から Λ は半局所である。または、右アルティン $\Rightarrow$ 右完全環 $\Rightarrow$ 半完全環 $\Rightarrow$ 半局所、とやってもいい（オーバーキル気味）。 □

つぎに、加群の根基と環の根基との関係。正直、半局所環の性質で一番使うのはこれ（と socle の記述くらい）だと思う。

命題 16.6. Λ を半局所ネーター環とし、$M \in \mathsf{Mod}\,\Lambda$ とする。このとき、

$$\operatorname{rad} M = M\mathcal{J}_\Lambda$$

が成り立つ。M が有限生成と限定してないことに注意！

証明. 簡単のため $\mathcal{J}_\Lambda = \mathcal{J}$ と書く。
$M\mathcal{J} \subset \operatorname{rad} M$ について。**これはいつでもなりたつ！**$x \in M\mathcal{J}$ とする。このとき $x \in \operatorname{rad} M$ を示す。このためには $x = m \cdot \lambda, x \in M, \lambda \in \mathcal{J}$ と仮定しても十分である。$\operatorname{rad} M$ に入ることを示すために、任意の単純加群への射 $f\colon M \to S$ をとる。$f(x) = 0$ を見ればよいが、$f(x) = f(m\lambda) = f(m)\lambda = 0$ となる、最後は $f(m) \cdot (-)\colon \Lambda \to S$ という $\mathsf{mod}\,\Lambda$ での射に、$\lambda \in \mathcal{J} = \operatorname{rad} \mathcal{J}$ を使った。
$\operatorname{rad} M \subset M\mathcal{J}$ について。キーは、$M/M\mathcal{J}$ が $\Lambda/\mathcal{J}$ 加群となること！今 Λ は半局所より $\Lambda/\mathcal{J}$ は半単純環。よって $M/M\mathcal{J}$ は半単純 $\Lambda/\mathcal{J}$ 加群、よって半単純 Λ 加群。$\operatorname{rad} M$ の定義より、M から任意の半単純加群への射は必ず商 $M \twoheadrightarrow M/\operatorname{rad} M$ を経由する。よって、

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & M/M\mathcal{J} \\ M/\operatorname{rad} M \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

という可換図式があり、よって $\operatorname{rad} M \subset \mathcal{J}$ となる。 □

17. ネーター代数あたり

定義 17.1. R を可換ネーター環、Λ を R-algebra とする（$R \to \Lambda$ という環準同型で、像が Λ の中心に入るようなもの）。このとき、Λ が**ネーター R 代数** *(noetherian R-algebra)* であるとは、$\Lambda_R \in \mathsf{mod}\, R$ となるときをいう。R が可換アルティン環のとき、ネーター R 代数のことを**アルティン R 代数** *(artin R-algebra)* と呼ぶ。

以下単にネーター R 代数と呼ぶときは、R は可換ネーター環を意味することとする。

17.1. 定義・基本性質.
まず環論的によい性質をもつことを示していきたい。

補題 17.2. R を可換ネーター環、Λ をネーター R 代数とすると、Λ はネーター環である。R がさらにアルティンのときは、Λ も両側アルティンである（artin R-algebra と呼ばれる）

証明. Λ の右イデアルの上昇列は、Λ の R 加群としての上昇列にもなっている。いま $\Lambda \in \mathsf{mod}\, R$ より Λ はネーター R 加群。よって列は止まる。アルティンも同様。 □

実は環がネーター代数かどうかは基礎環がなくてもわかる。

命題 17.3. 環 Λ について、次は同値:

(1) ある可換ネーター環 R が存在し、Λ にネーター R 代数の構造を入れることができる。
(2) Λ の中心 $Z(\Lambda)$ がネーター環であり、Λ は $Z(\Lambda)$ 加群として有限生成。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): Λ をネーター R 代数とする。このとき $Z(\Lambda)$ は可換環であり、また Λ の R 部分加群でもある（R の元が中心的に作用するので）。よって $Z(\Lambda)$ は有限生成 R 加群であり（R がネーターなので）、つまり $Z(\Lambda)$ は可換ネーター R 代数、よってとくにネーター環。また明らかに、Λ の R 加群としての生成系は $Z(\Lambda)$ 加群としても生成系になっているので、$Z(\Lambda)$ 加群として有限生成。

(2) $\Rightarrow$ (1): 明らか（$R := Z(\Lambda)$ として自然に構造を入れればよい）。 □

よって、ネーター代数に関する概念が、基礎環のとり方によって変わるか変わらないかが気になり、そういうとこも今後みる。特に depth や次元や CM 性とかについて。

2 つの環の根基の関係について。

補題 17.4. R を可換ネーター環、Λ をネーター R 代数とする。このとき、$\mathcal{J}_R$ の元は $\mathcal{J}_\Lambda$ の元として作用する、つまり、$\Lambda\mathcal{J}_R \subset \mathcal{J}_\Lambda$ である、つまり構造射を $\varphi\colon R \to \Lambda$ とすると、$\varphi(\mathcal{J}_R) \subset \mathcal{J}_\Lambda$ が成り立つ。

証明. 今 R の元は可換に作用することから、$\Lambda\mathcal{J}_R$ は Λ の両側部分加群なことに注意。$\Lambda\mathcal{J}_R$ が、右加群として、Λ_Λ の superfluous submodule であることを示す（極大右イデアルの共通部分に入ることを示す、といってもよい、証明は同じ）。つまり、$M_\Lambda \subset \Lambda$ を任意の Λ 部分加群とし、$\Lambda\mathcal{J}_R + M = \Lambda$ が成り立つとき、$M = \Lambda$ なことを示す。

R 加群と見て中山を使いたい。使える状況にあるかを考えると、Λ は有限生成 R 加群であり、Λ 部分加群は自動的に R 部分加群でもあるので、$\Lambda\mathcal{J}_R + M = \Lambda$ という等式は Λ_R の R 部分加群としての等式。よって R 加群と見て中山の補題を使うことができて、$M = \Lambda$ が成り立つ。よって $\Lambda\mathcal{J}_R \subset \mathcal{J}_\Lambda$ である。 □

命題 17.5. R を可換ネーターで**半局所**だとする。このときネーター R 代数 Λ も半局所である（R が局所でも Λ は局所とは限らない）。

証明. 示すことは $\Lambda/\mathcal{J}_\Lambda$ が半単純環ということ。しかし、Λ の元に $\mathcal{J}_R$ の元をかけると $\mathcal{J}_\Lambda$ に入った（補題 17.4）。よって $\Lambda/\mathcal{J}_\Lambda$ は、R 加群として見ると、$\mathcal{J}_R$ かけて死ぬ、つまり $R/\mathcal{J}_R$ 加群である。よって $\Lambda/\mathcal{J}_\Lambda$ は $R/\mathcal{J}_R$ 上のネーター代数とも見れる。

ここで $R/\mathcal{J}_R$ は、R が半局所より半単純環である。とくにアルティン $R/\mathcal{J}_R$ 代数。よって $\Lambda/\mathcal{J}_\Lambda$ はアルティン環であり、命題 16.2 により Λ は半局所である。 □

次に、長さ有限性がどっちで測っても同じ（長さは変わりうるが)、について。同じようなことはあとで可換の場合に次元や depth でやる。証明は R が半局所の場合が圧倒的に簡単なので（そうでない場合は文献が見当たらないしトリッキーなことをする)、それを先に述べます。

命題 17.6. R を可換ネーター環、Λ をネーター R 代数とする。このとき $M \in \mathsf{Mod}\,\Lambda$ について次が成り立つ。

(1) $M_\Lambda \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ と $M_R \in \mathsf{mod}\,R$ は同値、すなわち「有限生成性は R でも Λ でも同値」。
(2) R を半局所環とすると、$M_\Lambda \in \mathsf{fl}\,\Lambda$ と $M_R \in \mathsf{fl}\,R$ は同値（実は半局所の仮定はいらない)。

証明. (1) 束論的にもできるがとりあえず普通に。M_R が R 加群として有限生成とすると、明らかにその生成系は、Λ 加群としても M_Λ を生成している。よって M_Λ は有限生成 Λ 加群。

逆に、M_Λ が有限生成 Λ 加群とすると、$\Lambda^n \twoheadrightarrow M$ という Λ 加群の全射がある。これは R 加群としての全射でもあり、$\Lambda_R \in \mathsf{mod}\,R$ なことから $M_R \in \mathsf{mod}\,R$ が従う。

(2) $M_R \in \mathsf{fl}\,R$ だとする。こちらは束論的に考えるとよい。$\mathsf{L}(M_\Lambda)$ (resp. $\mathsf{L}(M_R)$) を M の Λ 部分加群のなす束 (resp. R 部分加群のなす束) とすると、明らかに $\mathsf{L}(M_\Lambda)$ は $\mathsf{L}(M_R)$ の部分束である。$M_R \in \mathsf{fl}\,R$ より $\mathsf{L}(M_R)$ はネーター的かつアルティン的。よってその部分束 $\mathsf{L}(M_\Lambda)$ もネーター的かつアルティン的なことがすぐ分かり、よって M_Λ はネーター加群かつアルティン加群、つまり $M_\Lambda \in \mathsf{fl}\,\Lambda$。

逆が問題。「長さ有限 Λ 加群は R 加群と見ても長さ有限」を示したいが、$\mathsf{fl}\,\Lambda$ は $\mathsf{mod}\,\Lambda$ のなかで拡大で閉じるので、「単純右 Λ 加群 S_Λ は $S_R \in \mathsf{fl}\,R$」を示せば十分。

いま R が半局所より命題 17.5 により Λ も半局所である。よって S_Λ は $\Lambda/\mathcal{J}_\Lambda$ の直和因子（命題 16.3）。ゆえに結局 $\Lambda/\mathcal{J}_\Lambda \in \mathsf{fl}\,R$ を示せばよい。補題 17.4 により、$\Lambda/\mathcal{J}_\Lambda$ は $\mathcal{J}_R$ かけて死ぬ。よって $\Lambda/\mathcal{J}_\Lambda$ は有限生成 $R/\mathcal{J}_R$ 加群であり、R が半局所なことから $R/\mathcal{J}_R$ はアルティン環。ゆえに $\Lambda/\mathcal{J}_\Lambda \in \mathsf{fl}\,R$ となり、おわり。 □

半局所と限らない場合の証明をメモしておく。いわゆる行列式の技巧を使う。一応自分で考えた（ネーターの仮定すらいらない)。どこにも証明を見たことがないので、誰か知ってたら教えて下さい。

命題 17.7. R を可換環、Λ を R 代数で Λ_R が有限生成 R 加群であるものとする。このとき任意の単純右 Λ 加群 S_Λ は R 加群として長さ有限である。とくに、$M \in \mathsf{Mod}\,\Lambda$ について、$M_\Lambda \in \mathsf{fl}\,\Lambda$ と $M_R \in \mathsf{fl}\,R$ は同値。

証明. さっきと同じく、単純 Λ 加群が $\mathsf{fl}\,R$ に入ることを見れば十分。S_Λ を単純 Λ 加群とし、$I := \mathrm{Ann}(S_R) = \{a \in R \,|\, Sa = 0\}$ とする、これは R のイデアルである。このとき、次が成り立つ:

(Claim): I は R の極大イデアルである。

(Proof of Claim). いま $S \neq 0$ より $1 \notin I$ なので、I は R の真のイデアル。よって I を含む極大イデアル $\mathfrak{m}$ が取れる。$I = \mathfrak{m}$ を示す。

$S\mathfrak{m}$ というものを考えると、R の元が可換に作用することに注意すれば、これは S の Λ 部分加群である。よって S_Λ が単純なことより、$S\mathfrak{m} = 0$ か $S\mathfrak{m} = S$ となる。前者ならば $\mathfrak{m} \subset I$ となり、$I = \mathfrak{m}$ が従う。$S\mathfrak{m} = S$ として矛盾を導く。

ここらへんから元を取り始める。$S_R \in \mathsf{mod}\,R$ より、$x_1, \cdots, x_n$ を S の R 加群としての生成系とする。このとき $S\mathfrak{m} = S$ なことから、

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1 r_{11} + x_2 r_{21} + \cdots + x_n r_{n1} \\
x_2 &= x_1 r_{12} + x_2 r_{22} + \cdots + x_n r_{n2} \\
&\vdots \\
x_n &= x_1 r_{1n} + x_2 r_{2n} + \cdots + x_n r_{nn}
\end{aligned}
$$

となるような $r_{ij} \in \mathfrak{m}$ が存在する。行列でかくと、

$$[x_1, \cdots, x_n] = [x_1, \cdots, x_n] \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ r_{n1} & & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

つまり、r_{ij} たちの行列を A とすると、

$$[x_1, \cdots, x_n](E_n - A) = 0$$

ここで E_n は単位行列。よって、$(E_n - A)$ の余因子行列を右から掛けることで、

$$[x_1, \cdots, x_n] \cdot \det(E_n - A) = 0$$

となる。落ち着いて $\det(E_n - A)$ を計算すると、$\det(E_n - A) = 1 + r$ with $r \in \mathfrak{m}$ が分かる。この元は $x_1, \cdots, x_n$ すべてを殺すので、S を殺す、つまり $1 + r \in I \subset \mathfrak{m}$ となる。しかし $r \in \mathfrak{m}$ なことから、$1 \in \mathfrak{m}$ が従い矛盾。 □

このことから S は、極大イデアル $\mathfrak{m} := \mathrm{Ann}(S_R)$ を用いて、有限生成 $R/\mathfrak{m}$ 加群とみなせる。もちろん $R/\mathfrak{m}$ は体なので、$R/\mathfrak{m}$ 加群として S は長さ有限。よって R 加群と見ても長さ有限である。より強く、この証明から S は R 加群として $R/\mathfrak{m}$ の直和と同型である。 □

17.2. **基礎環での局所化について.** ネーター R 代数 Λ があったとき、R の素イデアル $\mathfrak{p}$ で局所化して議論することをよくする。これについて正当化と簡単な性質。

命題 17.8. R を可換ネーター環、Λ をネーター R 代数とし、R の積閉集合 S をとる。このとき、Λ_S には自然にネーター R_S 代数の構造が入る。また任意の Λ 加群 M に対して、R 加群としての局所化 M_S は Λ_S 加群とみなせて、$M \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ なら $M_S \in \mathsf{mod}\,\Lambda_S$ である。

証明. やればできる。 □

ここから、つまり S での局所化は完全関手 $\mathsf{Mod}\,\Lambda \to \mathsf{Mod}\,\Lambda_S$ を誘導する。

命題 17.9. R を可換ネーター環、Λ をネーター R 代数、R の積閉集合 S をとり、$M, N \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ とする。このとき、

$$\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, N)_S \cong \mathrm{Ext}^i_{\Lambda_S}(M_S, N_S)$$

という R_S 加群としての同型がある。

証明. 補題 3.11 と同じ。一応スケッチする。

$M = \Lambda$ の場合を考えると、$i > 0$ ではゼロで、$i = 0$ で両辺はともに N_S に等しく、同型となる。よって任意の M の場合は、Λ がネーター環と $M \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ より、M の射影分解で有限生成自由加群からなるものが取れる。それについて $(-, N)$ して局所化してコホモロジーとったのが右辺、局所化して $(-, N_S)$ してコホモロジーとったのが左辺。よって局所化が完全だったことから、両辺は等しい。 □

17.3. **Krull 次元について.** ネーター代数上の加群の Krull 次元が、基礎環のとり方によらないことを見る。このために長々と整拡大のことをやっていた。

命題 17.10. R を可換ネーター環、Λ をネーター R 代数とする。このとき $M \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ について、$\dim M_R = \dim M_{Z(\Lambda)}$ が成り立つ。

証明. もちろん M は R 加群としても $Z(\Lambda)$ 加群としても有限生成なことに注意。よって annihilator でわって Krull 次元を計測する。いま $R \to Z(\Lambda)$ という可換環の準同型があり、これは明らかに $R/\mathrm{Ann}_R M \hookrightarrow Z(\Lambda)/\mathrm{Ann}_{Z(\Lambda)} M$ という単射を誘導する。また $Z(\Lambda)_R \in \mathsf{mod}\,R$ により、これは可換環の有限拡大である。よって命題 15.11 により、2 つの Krull 次元は一致する。よって $\dim M_R = \dim M_{Z(\Lambda)}$ □

定義 17.11. 可換ネーター環 R とネーター R 代数 Λ を考え、$M \in \operatorname{mod}\Lambda$ の *Krull* **次元**を、$\dim M_R$、つまり M の R 加群としての Krull 次元と定義する。上の命題により、この次元は基礎環のとり方によらない。

17.4. **Depth について.** 次に、基礎環が局所の場合に depth を考え、これが基礎環によらずネーター代数のみの言葉で書けることを見る。とくに、可換環の有限拡大で depth は変わらないことを見る。

まず可換のときのように depth 0 の話から。

命題 17.12. $(R, \mathfrak{m})$ を可換ネーター局所環、Λ をネーター R 代数とする。このとき $M \in \operatorname{mod}\Lambda$ について次は同値:

(1) $\operatorname{soc} M_\Lambda = 0$.
(2) $\operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}_\Lambda, M) = 0$.
(3) $\operatorname{soc} M_R = 0$.
(4) $\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, M) = 0$.
(5) $\mathfrak{m}$ の中に M 正則元が取れる（もちろん M を R 加群としてみる）。

とくに、$\operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M) \neq 0$ なことと、$\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}_R M$ は同値である。

証明. R が局所より Λ は半局所（命題 16.2）。よって命題 16.2 より (1) $\Leftrightarrow$ (2) と (3) $\Leftrightarrow$ (4) が分かる。また可換環の命題 9.5 より (4) $\Rightarrow$ (5) である。

(1) $\Rightarrow$ (3): こちらが面倒。$\operatorname{soc} M_R \neq 0$ と仮定すると、$0 \neq x \in \operatorname{soc} M_R$ をとると $x\mathfrak{m} = 0$ である。ここで、Λ 加群としての socle を作りたいので、$L := \Lambda \leq M$ を考える。これは Λ 部分加群であり、$L\mathfrak{m} = 0$ なことから R 加群として長さ有限。よって命題 17.6 により Λ 加群としても長さ有限であるので、必ず $\operatorname{soc} L_\Lambda \neq 0$。よって $\operatorname{soc} M_\Lambda \neq 0$ となる。

(3) $\Rightarrow$ (1): $\operatorname{soc} M_\Lambda \neq 0$ とする。つまり $S_\Lambda \leq M_\Lambda$ という単純 Λ 部分加群がある。ここでまた命題 17.6 により、$S_R \in \operatorname{fl} R$ となる（この場合はより強く、$S\mathfrak{m} = 0$ なことから S は半単純である）。よってもちろん $\operatorname{soc} S_R \neq 0$ より $\operatorname{soc} M_R \neq 0$。 □

定理 17.13. 可換ネーター局所環 $(R, \mathfrak{m})$ 上のネーター代数 Λ と有限生成 Λ 加群 $M \in \operatorname{mod}\Lambda$ について、R 加群としての極大 M 正則列 $x_1, \cdots, x_r$ をとる。このとき

$$\begin{aligned}\operatorname{Ext}^i_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}_\Lambda, M) &= \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}_\Lambda, M/M(x_1, \cdots, x_i)) \\ &= \begin{cases} 0 & (i < r) \\ \text{non-zero} & (i = r) \end{cases}\end{aligned}$$

が全ての $0 \leq i \leq r$ で成り立つ。とくに、極大 M 正則列の長さは全て一定であり、$\operatorname{depth}_R M$ に等しく、この量は R のとり方によらず Λ と M によってのみ決まる。

証明. 可換環の場合と同じ。$\mathcal{J} := \mathcal{J}_\Lambda$ とする。$M_i := M/M(x_1, \cdots, x_i)$ とすると、M_i は Λ 加群ともなることに注意。

(最初の等号について) i についての帰納法で最初の等号を示す。$i = 0$ のときは明らか。

長さ $i-1$ の正則列について等号が成り立ったとする。このとき $x_1, \cdots, x_{i-1}$ は M 正則列より、帰納法の仮定より $\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M) = \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M_{i-1})$ が成り立つ。しかし $x_i \in \mathfrak{m}$ は M_{i-1} 正則なので、命題 17.12 より $\operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M_{i-1}) = 0$ である。つまり $\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M) = 0$ である。

一方

$$0 \to M \xrightarrow{x_1} M \to M_1 \to 0$$

という完全列は、Λ **加群としての短完全列でもある！**これに $(\Lambda/\mathcal{J}, -)$ で長完全列伸ばすと、

$$0 \to \operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M_1) \to \operatorname{Ext}^i_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M) \xrightarrow{x_i} \operatorname{Ext}^i_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M)$$

という完全列ができるが、$x_i \in \mathfrak{m}$ なことより、補題 17.4 より x_i は $\Lambda/\mathcal{J}$ を殺す。よって一番右の写像はゼロ写像であるので、$\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M_1) \cong \operatorname{Ext}^i_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M)$ である。また $x_2, \cdots, x_i$ は M_1 正則なので、帰納法の仮定より、$\operatorname{Ext}^{i-1}_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M_1) = \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M_i)$ である。よって $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M) \cong \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M_i)$ となる。

(二番目の等号について) $i < r$ のとき $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M_i) = 0$ なことは上で既に示してる。念の為くりかえすと、$x_{i+1} \in \mathfrak{m}$ が M_i 正則なことより、命題 17.12 により $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M_i) = 0$ となる。

$i = r$ のとき、$\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M_r) \neq 0$ を示す。もしゼロなら、命題 17.12 により $\mathfrak{m}$ の中に M_r 正則な元があるので、$x_1, \cdots, x_r$ という正則列にもう一つ元を加えることができ、極大性に矛盾。よって $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M_r) \neq 0$ である。

あとの主張はここから明らかである。

□

18. Bass の補題、depth と Krull 次元

depth と次元についてやった Bass の補題 9.10 の、ネーター代数版をやる。証明も全く同じであるが、記号が増えて見にくくなる。

補題 18.1. R を可換ネーター環、Λ をネーター R 代数、$M \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ とする。また $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ を、間に（包含で）何も無いような $\mathrm{Spec}\,R$ の二元とする。また $i \geq 0$ とする。
この設定のもとで、次が成り立つ:

$$\mathrm{Ext}^i_{\Lambda_\mathfrak{p}}(\frac{\Lambda_\mathfrak{p}}{\mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}}, M_\mathfrak{p}) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ext}^{i+1}_{\Lambda_\mathfrak{q}}(\frac{\Lambda_\mathfrak{q}}{\mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{q}}}, M_\mathfrak{q}) \neq 0.$$

少し見にくいが、$\Lambda = R$ の場合はそのまま Bass の補題である。

証明. 証明も全く同じ。まず局所化 $\Lambda \to \Lambda_\mathfrak{p}$ でのイデアル $\mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}$ の逆像を $\Lambda \cap \mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}$ とかく。

また可換のときと同じく、初めから $\mathfrak{q}$ で局所化しておいて、次を示せばよい：

(Claim): $(R, \mathfrak{m})$ **を可換ネーター局所環、**Λ **をネーター** R **代数、**$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,R$ **で** $\dim R/\mathfrak{p} = 1$ **であり、**$M \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ **について、もし** $\mathrm{Ext}^i_{\Lambda_\mathfrak{p}}(\Lambda/\mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}, M_\mathfrak{p}) \neq 0$ **なら、**$\mathrm{Ext}^{i+1}_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}_\Lambda, M) \neq 0$ **である。**

可換のときと同じく $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}$ を固定する。次の短完全列を考える:

$$0 \to \frac{\Lambda}{\Lambda \cap \mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}} \xrightarrow{x} \frac{\Lambda}{\Lambda \cap \mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}} \to \frac{\Lambda}{x\Lambda + \Lambda \cap \mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}} \to 0$$

これは実際完全である！x 倍が単射かどうかだけが怪しいが、確かめる: $a \in \Lambda$ について $ax \in \Lambda \cap \mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}$ とすると、定義より $a/1 \cdot x/1 \in \mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}$ である。ここで $a/1 \in \Lambda_\mathfrak{p}, x/1 \in R_\mathfrak{p}$ と見ている。一方 $x \notin \mathfrak{p}$ なことより $x/1$ は $R_\mathfrak{p}$ で可逆。よって $a/1 \in \mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}$ が従う。これは $a \in \Lambda \cap \mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}$ を意味する。

この完全列に、$(-, M)$ して長完全列を伸ばすと:

$$\mathrm{Ext}^i_\Lambda(\frac{\Lambda}{\Lambda \cap \mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}}, M) \xrightarrow{x} \mathrm{Ext}^i_\Lambda(\frac{\Lambda}{\Lambda \cap \mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}}, M) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_\Lambda(\frac{\Lambda}{x\Lambda + \Lambda \cap \mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}}, M)$$

ここで背理法で、$\mathrm{Ext}^{i+1}_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}_\Lambda, M) = 0$ だと仮定する。すると、命題 17.5 と 16.3 により、任意の長さ有限 Λ 加群について $\mathrm{Ext}^{i+1}_\Lambda(-, M) = 0$ が従う。

一方、$\frac{\Lambda}{x\Lambda + \Lambda \cap \mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}}$ を R 加群とみて $xR + \mathfrak{p}$ かけると死ぬ。なぜなら x かけて死ぬのはおっけーで、$\mathfrak{p}$ をかけると、$\Lambda\mathfrak{p}$ の元が $\Lambda_\mathfrak{p}$ に局所化して $\mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}$ に入ればよいが、これは補題 17.4 より従う。よって $\frac{\Lambda}{x\Lambda + \Lambda \cap \mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}}$ は、ネーター的 $R/(xR + \mathfrak{p})$ 代数である。可換の Bass の補題 9.10 の証明でやってように $R/(xR + \mathfrak{p})$ はアルティン環、よって $\frac{\Lambda}{x\Lambda + \Lambda \cap \mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}}$ もアルティン環なので、加群として長さ有限である。よって Λ 加群としてこれが長さ有限なので、結局組み合わせて、

$$\mathrm{Ext}^{i+1}_\Lambda(\frac{\Lambda}{x\Lambda + \Lambda \cap \mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}}, M) = 0$$

が従う。あとは中山の補題よりすぐ、$\mathrm{Ext}^i_\Lambda(\frac{\Lambda}{\Lambda \cap \mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}}, M) = 0$ が従い、これを $\mathfrak{p}$ で局所化すれば $\mathrm{Ext}^i_{\Lambda_\mathfrak{p}}(\frac{\Lambda_\mathfrak{p}}{\mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}}, M_\mathfrak{p}) = 0$ が従い、矛盾する。 □

可換のときと同じように、depth と次元との関係で次が分かる:

系 18.2. R を可換ネーター局所環、Λ をネーター R 代数、$M \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ とする。このとき $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R M$ を任意にとると、

$$\operatorname{depth}_R M \leq \dim R/\mathfrak{p} \leq \mathsf{id}\, M_\Lambda$$

となる。とくに $\operatorname{depth} M \leq \dim M \leq \mathsf{id}\, M_\Lambda$ である（これらの量は R によらなかったことに注意）。

次にネーター代数上の加群の CM 性を定義するが、念の為、基礎環が CM であることを仮定する（局所であることは仮定しない）。

定義 18.3. R を可換ネーター CM 環、Λ をネーター代数、$M \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ とする。

(1) M が *Cohen-Macaulay (CM)* であるとは、M_R が R 加群として CM のときをいう、つまり任意の $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ について $\operatorname{depth}_{R_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m} = \dim_{R_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m}$ が成り立つときをいう。
(2) M が**極大** *Cohen-Macaulay (MCM)* であるとは、$M_R \in \mathsf{CM}\, R$ のときをいう、つまり任意の $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ について $\operatorname{depth}_{R_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m} = \dim R_\mathfrak{m}$ が成り立つときをいう。
(3) $\mathsf{CM}\,\Lambda$ により、MCM な Λ 加群のなす圏を指す。少なくとも R が局所 CM 環の場合は、Λ 加群の MCM 性は定理 17.13 と命題 17.10 により R のとり方によらない。
(4) Λ が *Cohen-Macaulay* R **整環** *(R-order)* である（単に R 整環と呼ぶ）とは、$\Lambda \in \mathsf{CM}\,\Lambda$ のときをいう。

19. 極小移入分解の局所化

この節では、Bass 数と極小移入分解との関係をネーター代数の一般性でやる。まず局所化について。

命題 19.1. R を可換ネーター環、S をその積閉系、Λ をネーター R 代数とすると次が成り立つ:

(1) 局所化関手 $\mathsf{Mod}\,\Lambda \to \mathsf{Mod}\,\Lambda_S$ は $\mathsf{mod}\,\Lambda \to \mathsf{mod}\,\Lambda_S$ に制限され、この制限された関手は本質的全射である。
(2) 任意の Λ 加群 E に対し、E が移入的ならば、E_S は移入的 Λ_S 加群である。
(3) 任意の Λ 加群 E に対し、E が移入的であることと、任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ について $E_\mathfrak{p}$ が移入的 $\Lambda_\mathfrak{p}$ 加群であることと、任意の $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ について $E_\mathfrak{m}$ が移入的 $\Lambda_\mathfrak{m}$ 加群であることは同値である。つまり移入性は局所化したところでチェックできる。
(4) 任意の Λ 加群 E に対し、次の等式が成り立つ:

$$\begin{aligned}\mathsf{id}_\Lambda E &= \sup\{\mathsf{id}_{\Lambda_\mathfrak{m}} E_\mathfrak{m} \mid \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R\} \\ &= \sup\{\mathsf{id}_{\Lambda_\mathfrak{p}} E_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R\}\end{aligned}$$

(5) $\mathsf{Mod}\,\Lambda$ での本質的単射 $M \hookrightarrow E$ が与えられると、その局所化 $M_S \hookrightarrow E_S$ は $\mathsf{Mod}\,\Lambda_S$ での本質的単射である。
(6) $\mathsf{Mod}\,\Lambda$ での移入包絡 $M \hookrightarrow E(M)$ が与えられると、その局所化 $M_S \hookrightarrow E(M)_S$ は $\mathsf{Mod}\,\Lambda_S$ での移入包絡である。
(7) $\mathsf{Mod}\,\Lambda$ での極小移入分解

$$0 \to M \to E^0(M) \to E^1(M) \to \cdots$$

が与えられると、その局所化

$$0 \to M_S \to E^0(M)_S \to E^1(M)_S \to \cdots$$

は $\mathsf{Mod}\,\Lambda_S$ での極小移入分解である。

証明. (1) まず $M \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ があると $\Lambda^n \twoheadrightarrow M$ という全射があるので、局所化して $\Lambda_S^n \to M_S$ ができるので、明らかに局所化は関手 $\mathsf{mod}\,\Lambda \to \mathsf{mod}\,\Lambda_S$ を誘導する。

この関手が本質的全射なことを見たい。そのため、$X \in \mathsf{mod}\,\Lambda_S$ を任意にとると、Λ_S のネーター性より

$$\Lambda_S^n \xrightarrow{\overline{f}} \Lambda_S^m \to X \to 0$$

という $\mathsf{mod}\,\Lambda_S$ での短完全列ができる。ここで $\overline{f}$ は Λ_S の元を成分とする行列であるが、その成分すべての分母を払うような S の元がとれ、その払った行列倍写像の coker は $\overline{f}$ の coker と一致している（行列の基本変形を考えれば）。よって初めから $\overline{f}$ は $f\colon \Lambda^n \to \Lambda^m$ という $\mathsf{mod}\,\Lambda$ での射の局所化であると仮定できる。

ここの議論を別のやり方でいうと、自然な同型 $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda^n, \Lambda^m)_S \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda_S}(\Lambda_S^n, \Lambda_S^m)$ があった（命題 17.9）。このもとで $\overline{f}$ に対応する射を左からとると、f/s with $s \in S$ という形をしている。一方 $f/1$ と f/s という 2 つの射は $\mathsf{Mod}\,\Lambda_S$ で明らかに同型なので、その coker は同型となる。

以上のような議論より、$\overline{f}$ は $f\colon \Lambda^n \to \Lambda^m$ の局所化なのであるが、局所化は完全関手なので、X は $\mathrm{Coker}\, f \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ の局所化に同型である。

(2) これは (1) と命題 10.9 から出る。ちゃんというと、E が移入的だとする。このとき、命題 10.9 より、任意の有限生成 Λ_S 加群 X に対して $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda_S}(X, E_S) = 0$ であればよい。しかし (1) より $X = M_S$ なる有限生成 Λ 加群 M が取れる。よって命題 17.9 により $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda_S}(M_S, E_S) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, E)_S = 0$ となる。

(3) すでに示したことより、「任意の $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\, R$ について $E_\mathfrak{m}$ が移入的ならば E が移入的」を示せばよい。このためには命題 10.9 により任意の有限生成 Λ 加群 M について $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, E) = 0$ を示せばよいが、命題 2.1 により、任意の $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\, R$ について $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, E)_\mathfrak{m} = 0$ ならばよい。しかし命題 17.9 により $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, E)_\mathfrak{m} = \mathrm{Ext}^1_{\Lambda_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m}, E_\mathfrak{m}) = 0$ となる。

(4) (3) の証明と同じく、(1) と命題 10.9 と命題 2.1 と命題 17.9 から同様の証明で従うので各自チェックされたい。

(5) これは局所化で部分加群の束がどう変化するかを記述した命題 1.5 を使う。他の本や可換環ではおそらく元をとってごちゃごちゃやるのが普通であるが、以下の証明はそのめんどくささを全部命題 1.5 に押し付けている分、すごく当たり前な証明に見える（たぶんこれで証明できているはず）。

今 $M \in \mathsf{L}_\Lambda(E)$ は本質的な元である。それを局所化して $M_S \in \mathsf{L}_{\Lambda_S}(E_S)$ が本質的な元かを見たい。命題 1.5 より束の同型 $\mathsf{L}_{\Lambda_S}(E_S) \cong \mathsf{L}^S_\Lambda(E)$ があった。よって、$\overline{M} \in \mathsf{L}^S_\Lambda(E)$ を示せばよい、ここで $\overline{M}$ は M の S による saturation である。しかしこれは M が $\mathsf{L}_\Lambda(E)$ で本質的だったことからすぐに出てくる。念の為ちゃんとやる。

$0 \neq A \in \mathsf{L}^S_\Lambda(E)$ をとる、つまり A は E の 0 でない部分加群で saturated である。すると M が E の本質的部分加群だったことから $M \cap A \neq 0$ である。よって $M \leq \overline{M}$ より $\overline{M} \cap A \neq 0$ である。なので $\overline{M}$ が $\mathsf{L}^S_\Lambda(E)$ において本質的である（ここで $\mathsf{L}^S_\Lambda(E)$ における meet は通常の共通部分だったことに注意）。

(6),(7) これは (2) と (5) から直ちに従う。 $\square$

また、一般に単純加群からの Ext は移入分解した項への Hom とみなせる:

命題 19.2. Λ を非可換環、S を半単純右 Λ 加群、M を任意の右 Λ 加群とし、M の極小移入分解

$$0 \to M \to E^0 \to E^1 \to E^2 \to \cdots$$

を取る。このとき任意の $i \geq 0$ に対して、

$$\mathrm{Ext}^i_\Lambda(S, M) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(S, E^i)$$

という同型がある。

証明. まず S が半単純加群のときのみ示せばよい（直和で分かれるので）。M の極小移入分解を区切って、

$$0 \longrightarrow M^i \xrightarrow{\iota_i} E^i \xrightarrow{\pi_i} M^{i+1} \longrightarrow 0$$

とする（$M^0 = M$）と、定義により E^i は M^i の移入包絡。

このとき、単純加群 S について、任意に $\varphi\colon S \to E^i$ をとる。

$$\begin{tikzcd}
 & & S \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\varphi"] & & \\
0 \arrow[r] & M^i \arrow[r, "\iota_i"] & E^i \arrow[r, "\pi_i"] & M^{i+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

もし $\varphi \neq 0$ なら、S が単純より φ は単射、よって $\operatorname{Im}\varphi$ は E^i の単純部分加群。しかし M が E^i の本質的部分加群だったことを考えると、$\operatorname{Im}\varphi$ と M の共通部分はゼロではない。よって $\operatorname{Im}\varphi$ の単純性より、$\operatorname{Im}\varphi \leq M$ となる。つまり上を可換にする点線が存在するので $\pi\varphi = 0$ となる。

以上の議論から、$(-, \pi_i)\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(S, E^i) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(S, M^{i+1})$ はゼロ写像である。よって $(-, \iota_{i+1}\pi_i)$: $\operatorname{Hom}_\Lambda(S, E^i) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(S, E^{i+1})$ もゼロ写像。一方、$\operatorname{Ext}^i_\Lambda(S, M)$ は定義より、

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(S, E^{i-1}) \xrightarrow{(-,\iota_i\pi_{i-1})} \operatorname{Hom}_\Lambda(S, E^i) \xrightarrow{(-,\iota_{i+1}\pi_i)} \operatorname{Hom}_\Lambda(S, E^{i+1})$$

のコホモロジーである。しかし上の 2 つの写像はゼロ写像より、$\operatorname{Ext}^i_\Lambda(S, M) \cong \operatorname{Hom}_\Lambda(S, E^i)$ が従う。 □

双対的な主張は、射影被覆（が存在すれば）についても成り立つ。

20. 移入分解の構造・移入次元有限な加群について

$\Lambda = R$ の場合は Bass 数が M の極小移入分解の構造を決定していたが、ネーター代数では Bass の補題 20.1 で見たように、$\operatorname{Ext}^i_{\Lambda_\mathfrak{p}}(\frac{\Lambda_\mathfrak{p}}{\mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}}, M_\mathfrak{p})$ という加群が $\operatorname{Ext}^i_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), M_\mathfrak{p})$ の類似物（$\Lambda = R$ では一致）であり、それについて同じようなことが言える。例えば次は命題 11.9 のネーター代数版である。

命題 20.1. Λ を可換ネーター環 R 上のネーター代数とする。また有限生成 Λ 加群 M の Λ 加群としての極小移入分解

$$0 \to M \to E^0(M) \to E^1(M) \to E^2(M) \to \cdots$$

をとる。このとき $i \geq 0$ と $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ について次は同値:

(1) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R E^i(M)$、つまり $E^i(M)$ を R 加群と見ると $\mathfrak{p}$ が associate している。
(2) $\operatorname{Ext}^i_{\Lambda_\mathfrak{p}}(\frac{\Lambda_\mathfrak{p}}{\mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}}, M_\mathfrak{p}) \neq 0$.

証明. $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ を固定する。与えられた極小移入分解を $\mathfrak{p}$ で局所化すると $\Lambda_\mathfrak{p}$ 加群としての $M_\mathfrak{p}$ の極小移入分解が得られる（命題 19.1）ことを思い出そう。次の同値で主張が従う。

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R E^i(M) &\iff \mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_{R_\mathfrak{p}} E^i(M)_\mathfrak{p} \\
&\iff \operatorname{Hom}_{\Lambda_\mathfrak{p}}(\frac{\Lambda_\mathfrak{p}}{\mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}}, E^i(M)_\mathfrak{p}) \neq 0 \\
&\iff \operatorname{Ext}^i_{\Lambda_\mathfrak{p}}(\frac{\Lambda_\mathfrak{p}}{\mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}}, M_\mathfrak{p}) \neq 0
\end{aligned}$$

ここで 1 番目は命題 4.9、2 番めは命題 17.12 を $R_\mathfrak{p}$ 代数 $\Lambda_\mathfrak{p}$ に用いた、3 番目は命題 19.2 と、$\Lambda_\mathfrak{p}$ が半局所（命題 16.2）なので $\Lambda_\mathfrak{p}/JJ_{\Lambda_\mathfrak{p}}$ が半単純 $\Lambda_\mathfrak{p}$ 加群なことから。 □

これを用いて、例えば Bass の補題 18.1 は「$\mathfrak{p}$ が $E^i(M)$ に associate しているなら、それより一つ上の prime は全て $E^{i+1}(M)$ に associate している」と読める。これを使って、移入次元が $\Lambda/\mathcal{J}$ で図れるという命題 11.11 のネーター代数版が分かる。

命題 20.2. $(R, \mathfrak{m})$ を可換ネーター環、Λ をネーター代数、M を有限生成 Λ 加群とする。このとき $d \geq 0$ について、$\operatorname{Ext}^{>d}_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M) = 0$ であることと $\operatorname{id} M_\Lambda \leq d$ は同値である。とくに、

$$\operatorname{id} M_\Lambda = \sup\{i \geq 0 \mid \operatorname{Ext}^i_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M) \neq 0\}$$

が成り立つ。

証明. 落ち着けば、$\operatorname{Ext}^{>d}_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{id} M_\Lambda \leq d$ のみを示せばよい。$(\Leftarrow)$ は明らかである。

$(\Rightarrow)$ $\operatorname{Ext}^{>d}_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J}, M) = 0$ だとする。このとき M の極小移入分解

$$0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \cdots \to E^d \to E^{d+1} \to \cdots$$

を取る。$E^{d+1} = 0$ を示せばよい。

背理法で $E^{d+1} \neq 0$ とすると、R 加群として $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} E^{d+1}$ が取れる。すると命題 20.1 により $\operatorname{Ext}^{d+1}_{\Lambda_\mathfrak{p}}(\frac{\Lambda_\mathfrak{p}}{\mathcal{J}_{\Lambda_\mathfrak{p}}}, M_\mathfrak{p}) \neq 0$ となる。ここで $\dim R/\mathfrak{p} = l$ とする（局所環は有限次元！）と、$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq$

$\cdots \subsetneq \mathfrak{p}_l = \mathfrak{m}$ という saturated chain が取れる。よって Bass の補題 18.1 より $\operatorname{Ext}_\Lambda^{d+1+l}(\Lambda, M) \neq 0$ となり、仮定に矛盾する。 $\square$

21. ネーター代数上の加群の移入次元

可換ネーター環の場合は定理 11.15 により、移入次元は一定（環の depth に等しい）だった。これのネーター代数版を与えたい。しかしネーター代数の場合は、有限次元多元環の例を考えてみれば分かるように、移入次元が環の depth（次元）より上の加群はいくらでもある。しかし実は下限を与えていることが示される。

21.1. ネーター代数の depth で下から抑えられる. まず可換のときと同じように、（基礎環に含まれている）正則元でネーター代数上の加群を割った加群の射影次元が分かる。証明は可換の場合の補題 11.14 のコピペである。

補題 21.1. $(R, \mathfrak{m})$ を可換ネーター局所環、Λ をネーター R 代数、$0 \neq M$ を有限生成 Λ 加群とする。このとき $\mathfrak{m}$ の中の M 正則列 $x_1, \cdots, x_t$ に対して、

$$\mathsf{pd}_\Lambda M/M(x_1, \cdots, x_t) = \mathsf{pd}_\Lambda M + t$$

が成り立つ。とくに、$\mathfrak{m}$ の中の Λ 正則列 $x_1, \cdots, x_t$ に対して、

$$\mathsf{pd}_\Lambda \Lambda/(x_1, \cdots, x_t)\Lambda = t$$

が成り立つ。

証明. 明らかに $t = 1$ の場合に示せば十分である。x を M 正則な $\mathfrak{m}$ の元とする。次の 2 つが任意の $i \geq 0$ について同値であることを示す。

(1) $\mathsf{pd}_\Lambda M \leq i$ である。
(2) $\mathsf{pd}_\Lambda M/Mx \leq i + 1$ である。

いつものように短完全列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x} M \longrightarrow M/Mx \longrightarrow 0$$

があり、これは $\mathsf{mod}\,\Lambda$ での完全列である！（R の元は M に中心的に作用するので Mx は M の Λ 部分加群である）

(1) ⇒ (2) 命題 11.13 により、任意の $N \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ について $\operatorname{Ext}_\Lambda^{i+2}(M/Mx, N) = 0$ を示せばよい。先の短完全列に $(-, N)$ して長完全列伸ばせば、

$$\operatorname{Ext}_\Lambda^{i+1}(M, N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_\Lambda^{i+2}(M/Mx, N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_\Lambda^{i+2}(M, N)$$

(1) の仮定より $\operatorname{Ext}_\Lambda^{>i}(M, N) = 0$ なことから、上の完全列の両端はゼロである。よって真ん中もゼロ。

(2) ⇒ (1) 命題 11.13 により、任意の $N \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ について $\operatorname{Ext}_\Lambda^{i+1}(M, N) = 0$ を示せばよい。まず $\mathsf{pd}_\Lambda M/Mx \leq i$ より $\operatorname{Ext}_\Lambda^{i+2}(M, N) = 0$ である。先の短完全列に $(-, N)$ して長完全列伸ばせば、

$$\operatorname{Ext}_\Lambda^{i+1}(M, N) \xrightarrow{x} \operatorname{Ext}_\Lambda^{i+1}(M, N) \longrightarrow 0$$

という完全列ができる、つまり $\operatorname{Ext}_\Lambda^{i+1}(M, N)$ 上で x 倍写像が全射である。ここでネーター性や有限生成性より $\operatorname{Ext}_\Lambda^{i+1}(M, N)$ は有限生成 R 加群なので、R 加群とみて中山の補題が使えて $\operatorname{Ext}_\Lambda^{i+1}(M, N) = 0$ である。

以上より (1) と (2) が同値である。これで $\mathsf{pd}_\Lambda M/Mx = \mathsf{pd}_\Lambda M + 1$ はほとんど示せている（落ち着けば分かる、どちらかが無限の場合でも大丈夫）しかし一つだけ確認しなければいけないことがある。それは $\mathsf{pd}_\Lambda M = 0$ のときに $\mathsf{pd}_\Lambda M/Mx \neq 0$ なことである（上から出るのは $\mathsf{pd}_\Lambda M/Mx \leq 1$ だけ）。これを示そう。

もし $\mathsf{pd}_\Lambda M/Mx = 0$ であったと仮定すると、任意の $N \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ について次の完全列ができる:

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(M, N) \xrightarrow{x} \operatorname{Hom}_\Lambda(M, N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_\Lambda^1(M/Mx, N) = 0$$

よって同じく中山の補題より $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)=0$ が出てしまう。これは例えば $N=M$ を代入すれば、$M=0$ となってしまい命題の仮定に反する。 □

次の定理の証明も定理 11.15 のコピペである。

定理 21.2. $(R,\mathfrak{m})$ を可換ネーター局所環、Λ をネーター R 代数、$0\neq M$ を有限生成 Λ 加群とする。このとき不等式

$$\mathsf{id}\, M_\Lambda \geq \mathrm{depth}_R\,\Lambda$$

が成り立つ（等号は成り立つとは限らない）。

証明. $t:=\mathrm{depth}\,\Lambda$ とする。$x_1,\cdots,x_t$ を $\mathfrak{m}$ の中の Λ 正則列とする。$\mathrm{Ext}^t_\Lambda(\Lambda/\Lambda(x_1,\cdots,x_t),M)\neq 0$ を示せば、$\mathsf{id}\,M_\Lambda\geq t$ が従う。

$0\leq i\leq t$ について帰納法で $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(\Lambda/\Lambda(x_1,\cdots,x_i),M)\neq 0$ を示す。$i=0$ のときは $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,M)=M\neq 0$ より成り立つ。$i>0$ とし $i-1$ で成り立つとする。

$$0\longrightarrow \Lambda/\Lambda(x_1,\cdots,x_{i-1})\xrightarrow{x_i}\Lambda/\Lambda(x_1,\cdots,x_{i-1})\longrightarrow\Lambda/\Lambda(x_1,\cdots,x_i)\longrightarrow 0$$

という $\mathsf{mod}\,\Lambda$ での短完全列がある。これに $(-,M)$ で長完全列のばせば、

$$\mathrm{Ext}^{i-1}_\Lambda(\Lambda/\Lambda(x_1,\cdots,x_{i-1}),M)\xrightarrow{x_i}\mathrm{Ext}^{i-1}_\Lambda(\Lambda/\Lambda(x_1,\cdots,x_{i-1}),M)\longrightarrow\mathrm{Ext}^i_\Lambda(\Lambda/\Lambda(x_1,\cdots,x_i),M)$$

という完全列ができる。もし $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(\Lambda/\Lambda(x_1,\cdots,x_i),M)=0$ になってしまえば、中山の補題より $\mathrm{Ext}^{i-1}_\Lambda(\Lambda/\Lambda(x_1,\cdots,x_{i-1},M)=0$ でなければならず、帰納法の仮定に違反する。よって示された。 □

実は Λ が局所の場合には $\mathsf{id}\,M_\Lambda<\infty$ から $\mathsf{id}\,M_\Lambda=\mathrm{depth}\,\Lambda$ が言える。次の補題を準備する（これ自体有用である）。

補題 21.3. $(R,\mathfrak{m})$ を可換ネーター局所環、Λ をネーター代数、N を有限生成 Λ 加群とする。また N の Λ 加群としての極小移入分解の i 項目を $E^i(N)$ と置き、$\mathfrak{m}$ の N 正則列 $x_1,\cdots,x_t$ を取る。このとき次が成り立つ。

(1) 任意の単純 Λ 加群 S について

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(S,N/N(x_1,\cdots,x_t))=\mathrm{Hom}_\Lambda(S,E^t(N))=\mathrm{Ext}^t_\Lambda(S,N)$$

が成り立つ。

(2) とくに、

$$\mathrm{soc}_\Lambda\,N/N(x_1,\cdots,x_t)=\mathrm{soc}_\Lambda\,E^t(N)=\mathrm{Ext}^t_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J},N)$$

が成り立つ。

証明. N 正則元 x_1 に対して

$$0\to N\xrightarrow{x_1}N\to N/Nx_1\to 0$$

という $\mathsf{mod}\,\Lambda$ での短完全列がある。ここで (1) では S を (1) の S とし、(2) では $S:=\Lambda/\mathcal{J}$ と置くと、

$$\mathrm{Ext}^{t-1}_\Lambda(S,N)\longrightarrow\mathrm{Ext}^{t-1}_\Lambda(S,N/Nx_1)\longrightarrow\mathrm{Ext}^t_\Lambda(S,N)\xrightarrow{x_1}\mathrm{Ext}^t_\Lambda(S,N)$$

という短完全列があり、$\mathrm{depth}\,N=t$ より $\mathrm{Ext}^{<t}_\Lambda(S,N)=0$ が定理 17.13 より従うので一番左はゼロ。また $x_1\in\mathfrak{m}$ なことから $Sx_1\leq S\mathcal{J}=0$ が補題 17.4 より従う。よって一番右の写像はゼロ。

つまり同型

$$\mathrm{Ext}^{t-1}_\Lambda(S,N/Nx_1)\cong\mathrm{Ext}^t_\Lambda(S,N)$$

がある。以下帰納的に

$$\mathrm{Ext}^t_\Lambda(S,N)\cong\mathrm{Hom}_\Lambda(S,N/N(x_1,\cdots,x_t))$$

が従う。よって命題 19.2 によりまとめて

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(S,E^t(N))\cong\mathrm{Ext}^t_\Lambda(S,N)\cong\mathrm{Hom}_\Lambda(S,N/N(x_1,\cdots,x_t))$$

が従う。よって (1) が示された。

(2) の状況では、左辺と右辺はそれぞれ $\mathrm{soc}_\Lambda E^t(M)$ と $\mathrm{soc}_\Lambda N/N(x_1,\cdots,x_t)$ に等しい（命題 16.2 と命題 17.5 より）。 □

この準備のもと（実は使わなくてもできるが）次が言える。この主張は、R が体（$t=0$）の場合でも非自明な主張になっていることに注意されたい。

命題 21.4. $(R,\mathfrak{m})$ をネーター局所環、Λ をネーター代数、$0\neq M$ を有限生成加群とする。また $t:=\mathrm{depth}_R\Lambda$ とし、$d:=\mathsf{id}_\Lambda M<\infty$ と仮定する。このとき次が成り立つ:

(1) $t\leq d$ が成り立つ。
(2) $\mathrm{soc}_\Lambda E^t(\Lambda)$ に出てくる単純 Λ 加群と、$\mathrm{soc}_\Lambda E^d(M)$ に出てくる単純加群に、もし同型なものがあるとすると、$t=n$ が従う。
(3) Λ が局所ならば $t=d$ が成り立つ。

証明. (1) 定理 21.2 である。

(2) まず一般に有限生成 Λ 加群 N について $\mathrm{soc}_\Lambda E^i(N)\cong\mathrm{Ext}^i_\Lambda(\Lambda/\mathcal{J},N)$ だったこと（命題 19.2 と命題 16.2 と命題 17.5 より）を思い出す。すると $\mathrm{soc}_\Lambda E^{\mathrm{depth}\,N}(N)\neq 0$ であり（定理 17.13)、もし $\mathsf{id}_\Lambda N<\infty$ ならば $\mathrm{soc}_\Lambda E^{\mathsf{id}\,N}N\neq 0$ である（命題 20.2）ことに注意。

$\mathrm{soc}_\Lambda E^t(\Lambda)$ と $\mathrm{soc}_\Lambda E^d(M)$ にともに含まれる単純加群 S があったとする。このとき Λ 正則列 $x_1,\cdots,x_t$ を取ると、$\mathrm{soc}_\Lambda E^t(\Lambda)=\mathrm{soc}_\Lambda \Lambda/\Lambda(x_1,\cdots,x_t)$ だった（補題 21.3）ので、完全列

$$0\longrightarrow S\longrightarrow \Lambda/\Lambda(x_1,\cdots,x_t)\longrightarrow X\longrightarrow 0$$

という $\mathsf{mod}\,\Lambda$ での短完全列が取れる。これに $(-,N)$ する。背理法で、$t<d$ が成り立つと仮定すると、

$$\mathrm{Ext}^d_\Lambda(\Lambda/\Lambda(x_1,\cdots,x_t),N)\longrightarrow \mathrm{Ext}^d_\Lambda(S,N)\longrightarrow \mathrm{Ext}^{d+1}_\Lambda(X,N)$$

という完全列があり、補題 21.1 により $\mathsf{pd}_\Lambda \Lambda/\Lambda(x_1,\cdots,x_t)=t<d$ なことより一番左はゼロ、また $\mathsf{id}_\Lambda N=d$ より一番右もゼロ。

よって $\mathrm{Ext}^d_\Lambda(S,N)=0$ となるが、これは補題 21.3 により $E^d(N)$ の socle に S がいないことを意味し、矛盾する。

(3) $\mathrm{soc}_\Lambda E^t(\Lambda)\neq 0$ と $\mathrm{soc}_\Lambda E^d(M)\neq 0$ なことから、Λ が局所より単純 Λ 加群は一つしかないので、2 つの socle にはもちろん共通の単純加群がいる。よって (2) より $t=d$ が従う。 □

よって局所の場合は「Gorenstein ならば Cohen-Macaulay」の類似が言える。

系 21.5. $(R,\mathfrak{m})$ を可換ネーター局所環、Λ をネーター R 代数とする。このとき、もし Λ が局所かつ $\mathsf{id}\,\Lambda_\Lambda<\infty$ ならば、Λ は R 加群として CM 加群であり、

$$\mathsf{id}\,\Lambda_\Lambda=\mathrm{depth}\,\Lambda=\dim\Lambda\,(\leq\dim R)$$

が成り立つ。とくに R を $R/\mathrm{Ann}_R(\Lambda)$ で取り替えれば、Λ は MCM 加群とでき、整環となる。

証明. 不等式 $\mathrm{depth}\,\Lambda\leq\dim\Lambda\leq\mathsf{id}\,\Lambda_\Lambda$ が系 18.2 であり、Λ が局所なことと $\mathsf{id}\,\Lambda_\Lambda<\infty$ なことから命題 21.4 より $\mathsf{id}\,\Lambda_\Lambda=\mathrm{depth}\,\Lambda$ であるので従う。 □

21.2. **正則元で割ったときの振る舞い.** 可換な基礎環 R 上のネーター代数 Λ 上の加群 M については、

- $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}\,R$ で局所化して $\Lambda_\mathfrak{p}$ 加群 $M_\mathfrak{p}$ を作る。
- M 正則な R の元 x を取ってきて、$\Lambda/\Lambda x$ 加群 M/Mx を作る。

という 2 つの基本的な操作がある。正則元で割ると次元が落ちていくので帰納的にやるときに便利 (であるが元を取るのであまり好きでない)。

まず基本観察をする。Λ をネーター局所環 $(R,\mathfrak{m})$ 上のネーター代数、$x\in\mathfrak{m}$ を適当にとり、Λx を考えるとこれは Λ の両側イデアルである。また、$\Lambda/\Lambda x$ は $R/(x)$ 上のネーター代数になっている。さらに、自然な埋め込み $\mathsf{Mod}\,\Lambda/\Lambda x\hookrightarrow\mathsf{Mod}\,\Lambda$ のもとで $\mathsf{Mod}\,\Lambda/\Lambda x$ は「$Mx=0$ なる $M\in\mathsf{Mod}\,\Lambda$ からなる圏」と思える。またこの埋め込みは $\mathsf{mod}\,\Lambda/\Lambda x\hookrightarrow\mathsf{mod}\,\Lambda$ に restrict する。

ここでは正則元で割ったときに使える命題をいくつか示す。次の命題は、「正則元で割った環での Ext 群を、もとの環での Ext 群で記述する（もしくはその逆）」を言っており、Ext が次数ズレで変化することを言っていて、非常に有用である。

命題 21.6. $(R,\mathfrak{m})$ を可換ネーター環、Λ をネーター R 代数、M を有限生成 Λ 加群とする。また $x\in\mathfrak{m}$ を Λ 正則かつ M 正則な元とし、$\overline{\Lambda}:=\Lambda/\Lambda x$, $\overline{M}:=M/Mx$ とする。このとき各 $i\geq 0$ について、$\mathsf{mod}\,\Lambda/\Lambda x\to\mathsf{mod}\,R$ という 2 つの次の関手の自然同型

$$\mathrm{Ext}^i_{\overline{\Lambda}}(-,\overline{M})\cong\mathrm{Ext}^{i+1}_{\Lambda}(-,M)$$

が存在する。つまり各 $X\in\mathsf{mod}\,\overline{\Lambda}$ を上につっこんだら同型になる。

証明. 各 i について上の自然同型が存在することを i についての帰納法で示す（いわゆる導来関手の一意性とかの議論らしい、まあ帰納法で地道にできる）。

まず仮定より次の $\mathsf{mod}\,\Lambda$ での完全列

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{\ x\ }M\longrightarrow\overline{M}\longrightarrow 0$$

$$0\longrightarrow \Lambda\xrightarrow{\ x\ }\Lambda\longrightarrow\overline{\Lambda}\longrightarrow 0$$

がある。

(Step 1): $i=0$ のとき。 M についての完全列に $X\in\mathsf{mod}\,\overline{\Lambda}$ を突っ込むと、

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(X,M)\longrightarrow\mathrm{Hom}_\Lambda(X,\overline{M})\longrightarrow\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,M)\xrightarrow{\ x\ }\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,M)$$

ここで $Xx=0$ であり x は M 正則なので、系 4.25 より $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,M)=0$ である。また最後の射は $Xx=0$ よりゼロ射。つまり $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,\overline{M})\cong\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,M)$ という X についての自然同型がある。また $\mathsf{mod}\,\overline{\Lambda}\hookrightarrow\mathsf{mod}\,\Lambda$ は忠実充満より $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,\overline{M})=\mathrm{Hom}_{\overline{\Lambda}}(X,\overline{M})$ なので、$i=0$ で従う。

(Step 2): $X\in\mathsf{proj}\,\overline{\Lambda}$ に対しては $\mathrm{Ext}^{>1}_\Lambda(X,M)=0$ となる。 つまり $\mathrm{Ext}^{>1}_\Lambda(\overline{\Lambda},M)=0$ を示せばよいが、これは Λ についての短完全列から $\mathsf{pd}_\Lambda\overline{\Lambda}=1$ が補題 21.1 のように従うのでよい。

(Step 3): $i\geq 0$ のとき同型があるとして $i+1$ で同型つくる。 $X\in\mathsf{mod}\,\overline{\Lambda}$ を取る、これを $\mathsf{mod}\,\overline{\Lambda}$ で **syzygy** とると、

$$0\longrightarrow X'\longrightarrow P\longrightarrow X\longrightarrow 0$$

という $\mathsf{mod}\,\overline{\Lambda}$ での短完全列で $P\in\mathsf{proj}\,\overline{\Lambda}$ が取れる。これに $_{\overline{\Lambda}}(-,\overline{M})$ で長完全列のばせば

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^i_{\overline{\Lambda}}(P,\overline{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Ext}^i_{\overline{\Lambda}}(X',\overline{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Ext}^{i+1}_{\overline{\Lambda}}(X,\overline{M}) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
\mathrm{Ext}^{i+1}_\Lambda(P,M) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{i+1}_\Lambda(X',M) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{i+2}_\Lambda(X,M) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{i+2}_\Lambda(P,M)=0
\end{tikzcd}$$

という上の完全列ができ、また $_\Lambda(-,M)$ をして長完全列のばせば下の完全列ができる。また縦の射は帰納法の仮定より存在し、下の完全列の最後の項は (Step 2) よりゼロである。よって余核の普遍性より点線の同型が誘導され、これが求めるものである。 □

これにより、加群の移入次元が、正則元で割ると 1 減ることが示せる:

系 21.7. $(R,\mathfrak{m})$ を可換ネーター局所環、Λ をネーター R 代数、$M\in\mathsf{mod}\,\Lambda$ をとる。また $x\in\mathfrak{m}$ を Λ 正則かつ M 正則な元とする。このとき

$$\mathsf{id}_\Lambda M=\mathsf{id}_{\Lambda/\Lambda x}M/Mx+1$$

が成り立つ（どちらかが無限でもよい）。

証明. まず先ほどと同様に $\overline{\Lambda}:=\Lambda/\Lambda x$、$\overline{M}:=M/Mx$ とおく。いま $\operatorname{depth}\Lambda\geq 1$ なので $\mathsf{id}_\Lambda M\geq 1$ が定理 21.2 より成り立つ。よって次を示せばよい: $n\geq 0$ に対して、$\mathsf{id}_\Lambda M\leq n+1\iff\mathsf{id}_{\overline{\Lambda}}\overline{M}\leq n$。

$(\Rightarrow)$ 任意の $X\in\mathsf{mod}\,\overline{\Lambda}$ に対して $\mathrm{Ext}^{>n}_{\overline{\Lambda}}(X,M)=0$ を示せばよいが、命題 21.6 により、

$$\mathrm{Ext}^{>n}_{\overline{\Lambda}}(X,M)=\mathrm{Ext}^{>n+1}_{\Lambda}(X,M)=0$$

が $\mathsf{id}\, M_\Lambda \leq n+1$ より従う。

($\Leftarrow$) こちらは先程の議論はそのままでは適応できない（なぜなら適当に $X \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ をとってきても $Xx = 0$ と限らないから）。しかし命題 20.2 を使えば回避できる。

命題 20.2 により、$\mathrm{Ext}_\Lambda > n+1(\Lambda/\mathcal{J}, M) = 0$ を示せばよい（$\mathcal{J} = \mathcal{J}_\Lambda$）。しかし補題 17.4 により $\Lambda/\mathcal{J} \cdot x = 0$ である。よって命題 21.6 が使えて、

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^{>n+1}(\Lambda/\mathcal{J}, M) = \mathrm{Ext}_{\overline{\Lambda}}^{>n}(\Lambda/\mathcal{J}, M) = 0$$

が $\mathsf{id}_{\overline{\Lambda}}\, \overline{M} \leq n$ より従う。 □

21.3. **CM 圏との移入次元のズレ.** 次に可換 CM 環上の CM 整環 Λ に限定して、その $\mathsf{CM}\,\Lambda$ での移入次元と $\mathsf{mod}\,\Lambda$ での移入次元を比較する。

まず基礎環を局所と限らない一般性でやると、次の条件を仮定するのが無難である。

定義 21.8. 可換 d 次元ネーター環 R が**等余次元** *(equi-codimensional)* であるとは、任意の $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ について $\dim R_\mathfrak{m} = d$ が成り立つときをいう。

もちろん可換ネーター局所環は自動的に等余次元である。

命題 21.9. R を可換 d 次元 Cohen-Macaulay 環（局所と限らない）で等余次元とし、Λ を R 整環とする。このとき $0 \neq N \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ について以下が成り立つ。

(1) $\mathsf{id}\, N_\Lambda \geq d$ である。
(2) $i \geq 0$ について以下は同値である
 (a) $\mathsf{id}\, N_\Lambda \leq d+i$ である。
 (b) 任意の $M \in \mathsf{CM}\,\Lambda$ について $\mathrm{Ext}_R^{>i}(M, N) = 0$ が成り立つ。
 (c) 任意の $M \in \mathsf{CM}\,\Lambda$ について $\mathrm{Ext}_R^{i+1}(M, N) = 0$ が成り立つ。

証明. (1) まず $\mathsf{id}\, N_\Lambda = \sup\{\mathsf{id}_{\Lambda_\mathfrak{m}} N_\mathfrak{m} \mid \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R\}$ が命題 19.1 より成り立った。一方 $\dim R = d$ なので、$\dim R_\mathfrak{m} = d$ なる $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ が取れる（等余次元を使えばここはどうとってもよいが、こちらには等余次元は必要ない）。その $\mathfrak{m}$ について、定理 21.2 より $\mathsf{id}\, N_\mathfrak{m} \geq \operatorname{depth}_{R_\mathfrak{m}} \Lambda_\mathfrak{m}$ である。しかし Λ は R 加群として MCM であるので、$\Lambda_\mathfrak{m}$ は $R_\mathfrak{m}$ 加群として MCM なので、$\operatorname{depth}_{R_\mathfrak{m}} \Lambda_\mathfrak{m} = \dim R_\mathfrak{m} = d$ である。よって $\mathsf{id}\, N_\mathfrak{m} \geq d$ なので、$\mathsf{id}\, N \geq d$ となる。

(2) 同値性を証明していく。

(a) $\Rightarrow$ (b): ここが一番非自明である。まず $(R, \mathfrak{m})$ が局所の場合を先に考える。このとき $M \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ を任意にとり、$t := \operatorname{depth}_R M$ についての帰納法で、$\mathrm{Ext}_\Lambda^{>d+i-t}(M, N) = 0$ を示せば、$t = d$ のときに主張が従う。

まず $t = 0$ の場合は、(a) の仮定により $\mathrm{Ext}_\Lambda^{>d+i}(M, N) = 0$ なのでよい。$t = \operatorname{depth} M > 0$ とする。このとき M 正則元 $x \in \mathfrak{m}$ を取ると、いつもの $\mathsf{mod}\,\Lambda$ での短完全列

$$0 \to M \xrightarrow{x} M \to M/Mx \to 0$$

を取ると、$\operatorname{depth} M/Mx = t-1$ である。よって帰納法の仮定により $\mathrm{Ext}_\Lambda^{>d+i-t+1}(M/Mx, N) = 0$ である。よって $j > d+i-t$ について、長完全列

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^j(M, N) \xrightarrow{x} \mathrm{Ext}_\Lambda^j(M, N) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^{j+1}(M/Mx, N)$$

ができるが、$j+1 > d+i-t+1$ なので最後の項はゼロである。よって中山の補題により $\mathrm{Ext}_\Lambda^j(M, N) = 0$ である。

次に R を局所と仮定しない場合を考える。$M \in \mathsf{CM}\,\Lambda$ を任意にとると、$\mathrm{Ext}_\Lambda^{>i}(M, N) = 0$ を示したい。このため任意に $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R$ をとり、$\mathrm{Ext}_{\Lambda_\mathfrak{m}}^{>i}(M_\mathfrak{m}, N_\mathfrak{m}) = 0$ であればよい。だが $M_\mathfrak{m} \in \mathsf{CM}\,\Lambda_\mathfrak{m}$ であり、R **が等余次元なので** $\dim R_\mathfrak{m} = d$ なことより、局所の場合から従う。

(b) $\Rightarrow$ (c): 自明。

(c) $\Rightarrow$ (d): 任意の $M \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ に対して $\mathrm{Ext}_\Lambda^{d+i+1}(M, N) = 0$ を示せばよい。しかし次の $\mathsf{mod}\,\Lambda$ での短完全列

$$0 \to \Omega^d M \to P_{d-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

で $P_i \in \mathsf{proj}\,\Lambda$ なるものを取る（つまり射影分解とっていって d 次 syzygy をとる）。すると Λ が R 整環なので $\Lambda \in \mathsf{CM}\,\Lambda$ であったので、depth lemma（補題 9.29）より $\Omega^d M \in \mathsf{CM}\,\Lambda$ が従う。

よって $\mathrm{Ext}_\Lambda^{d+i+1}(M,N) = \mathrm{Ext}_\Lambda^{i+1}(\Omega^d M, N) = 0$ となる。 □

つまり「$\mathsf{CM}\,\Lambda$ での移入次元は、$\mathsf{mod}\,\Lambda$ での移入次元マイナス d」が成り立つ。ここからすぐ、$\mathsf{CM}\,\Lambda$ での移入対象について次のことが分かる:

系 21.10. R を可換 CM 環で d 次元かつ等余次元とする。このとき R 整環 Λ 上の $0 \neq N \in \mathsf{CM}\,\Lambda$ について次が同値。

(1) N は完全圏 $\mathsf{CM}\,\Lambda$ での移入的対象である。
(2) $\mathsf{id}\,N_\Lambda = d$ である。

Appendix A. Matlis 双対について

いわゆる Matlis 加群が加群圏の適切な部分圏の双対を与えることについて。完備を仮定するといろいろよいことが言えるが、とりあえず仮定はあまりせずにやる。

まず加群圏の injective cogenerator について。

命題 A.1. Λ を一般の非可換環、$E \in \mathsf{Mod}\,\Lambda$ を有限生成と限らない右 Λ 加群とする。このとき E が $\mathsf{Mod}\,\Lambda$ の**移入余生成子**であるとは、

(1) E_Λ が移入的 Λ 加群である。
(2) 関手 $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,E)$ が忠実である、つまり任意の射 $M \to N$ に対して、$\mathrm{Hom}_\Lambda(N,E) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M,E)$ がゼロならばもとの射はゼロである。

まず次の判定条件がある。

命題 A.2. Λ を環、E を**移入的** Λ 加群とする。このとき次は同値である。

(1) E は移入余生成子である。
(2) 任意のゼロでない加群 $X \in \mathsf{Mod}\,\Lambda$ に対してゼロでない射 $X \to E$ が必ず取れる。
(3) 任意のゼロでない有限生成加群 X に対してゼロでない射 $X \to E$ が取れる。
(4) 任意の単純 Λ 加群 S に対してゼロでない射 $S \to E$ が取れる。
(5) 任意の単純 Λ 加群 S に対して単射 $S \hookrightarrow E$ が取れる。

証明. (1) ⇒ (2): 恒等射 $X \to X$ がゼロでないので、恒等射 $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,E) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(X,E)$ がゼロでない。よってゼロでない射 $X \to E$ が取れる。

(2) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒ (5): 明らか。

(5) ⇒ (2): ゼロでない加群 X を取ると、ゼロでない有限生成部分加群 $Y \leq X$ が取れる。このとき Y が有限生成より単純加群への全射があり、そこから E に合成する $Y \twoheadrightarrow S \hookrightarrow E$ を考えるとゼロでない。ここで E の移入性よりこの写像を X へ拡張できる。

(2) ⇒ (1): ゼロでない射 $X \to Y$ を取ると、$X \twoheadrightarrow Z \hookrightarrow Y$ と像に分解すると $Z \neq 0$ である。よって $Z \to E$ というゼロでない射が取れ、移入性より $Y \to E$ に拡張される。この射は $\mathrm{Hom}_\Lambda(Y,E) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(X,E)$ のもとで $X \twoheadrightarrow Z \to E$ に行くが、これはゼロでない。 □

環の移入余生成子として、「単純加群が有限個」か「右ネーター」かの設定で非常に自然なものが取れる。

命題 A.3. Λ を次のいずれかを満たす非可換環とする:

(1) 単純 Λ 加群の同型類が有限個。
(2) Λ は右ネーター。

このとき、$E := \bigoplus E(S)$（S は単純 Λ 加群の同型類を走る）は移入余生成子である。

証明. 先程のやつを使えば、移入性のみが微妙である。右ネーターなら移入加群は無限直和で閉じる（命題 10.10）ので E は移入加群。もし同型類が有限個ならもちろん有限直和なので E は移入加群。 □

定義 A.4. 右ネーター環 Λ に対して、$E := \bigoplus E(S)$（S は単純加群の同型類を走る）のことを**極小移入余生成子**と呼ぶ。

例えば可換ネーター局所環 $(R, \mathfrak{m}, k)$ について、極小移入余生成子は $E(k)$ である。
このもとで、次のような一般的な双対性がある。

命題 A.5. Λ, Γ を非可換環、${}_\Gamma E_\Lambda$ を両側 (Γ, Λ) 加群であり、E_Λ と ${}_\Gamma E$ がそれぞれ $\mathsf{Mod}\,\Lambda$ と $\mathsf{Mod}\,\Gamma^{\mathrm{op}}$ の移入余生成子であるようなものとする。このとき次の自然変換

$$\eta_X : X \to \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(X, E), E) \quad \text{in } \mathsf{Mod}\,\Lambda$$
$$\mu_Y : Y \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Gamma(Y, E), E) \quad \text{in } \mathsf{Mod}\,\Gamma^{\mathrm{op}}$$

があるが、次が成り立つ:

(1) この η_X と μ_Y は常に単射である。

(2) $\mathsf{ref}(E_\Lambda) := \{X \in \mathsf{Mod}\,\Lambda \mid \eta_X \text{ は同型 }\}$ と $\mathsf{ref}({}_\Gamma E) := \{Y \in \mathsf{Mod}\,\Gamma^{\mathrm{op}} \mid \mu_Y \text{ は同型 }\}$ という $\mathsf{Mod}\,\Lambda$ と $\mathsf{Mod}\,\Gamma^{\mathrm{op}}$ の充満部分圏を定義すると、これらはそれぞれの加群圏の中の Serre 部分圏である。

(3) $\mathsf{ref}(E_\Lambda)$ と $\mathsf{ref}({}_\Gamma E)$ は $(-, E)$ により完全圏として双対である:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Mod}\,\Lambda \arrow[r, shift left, "\mathrm{Hom}_\Lambda(-,E)"] & \mathsf{Mod}\,\Gamma^{\mathrm{op}} \arrow[l, shift left, "\mathrm{Hom}_\Gamma(-,E)"] \\ \mathsf{ref}(E_\Lambda) \arrow[u, hook] \arrow[r, leftrightarrow, "\simeq"] & \mathsf{ref}({}_\Gamma E) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

(4) $X \in \mathsf{ref}(E_\Lambda)$ とし $Y := \mathrm{Hom}_\Lambda(X, E)$ とおくと、束の反同型

$$\mathsf{L}(X_\Lambda) \xleftrightarrow{\simeq} \mathsf{L}({}_\Gamma Y)$$

が存在する。とくに X が有限生成であることと Y が有限余生成であることは同値、X がネーター加群であることと Y がアルティン加群であることは同値、X が長さ有限であることと Y が長さ有限であることは同値である。

証明. まず $(-, E)$ は両方向とも、移入性より完全関手であることに注意。

(1) η_X が単射を見る、このためには、$0 \neq x \in X$ をとると、ある $X \to E$ が存在し x がゼロでない元に飛べば良い。これには $\Lambda \to X$ という x に対応する射をとって、E が移入余生成子なことから $X \to E$ であって合成 $\Lambda \to X \to E$ がゼロでないものが取れる。それが求めるものである。

(2) 任意の短完全列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ を $\mathsf{Mod}\,\Lambda$ でとると、

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, hook, "\eta_L"] & M \arrow[r] \arrow[d, hook, "\eta_M"] & N \arrow[r] \arrow[d, hook, "\eta_N"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & ((L,E),E) \arrow[r] & ((M,E),M) \arrow[r] & ((N,E),E) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

という可換図式（縦は単射）が E の移入性と (1) よりできる。もし η_L と η_N が同型なら 5-lemma により η_M も同型、つまり $\mathsf{ref}(E_\Lambda)$ は拡大で閉じる。逆に η_M が同型だとすると、上の可換性より自然と η_L と η_N も同型でなければならないことがすぐ分かる（diagram chase もしくは snake lemma）。よって $\mathsf{ref}(E_\Lambda)$ は $\mathsf{Mod}\,\Lambda$ の Serre 部分圏である。

(3) これは 2 つの $(-, E)$ が反変随伴になっていることから抽象論で従う。一応ちゃんとやると、調べるべきは「$X \in \mathsf{ref}(E_\Lambda)$ ならば $(X, E) \in \mathsf{ref}({}_\Gamma E)$」だけ示せば、あとは $\mathsf{ref}(E_\Lambda)$ とかの定義により圏の双対があることが従う。次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd} (X,E) \arrow[r, "\mu_{(X,E)}"] \arrow[dr, equal] & (((X,E),E),E) \arrow[d, "(\eta_X, E)"] \\ & (X,E) \end{tikzcd}$$

おちついて元を取ると可換であるので、η_X が同型ならば $\mu_{(X,E)}$ が同型が従う。

(4) まず $\mathsf{ref}(E_\Lambda)$ と $\mathsf{ref}({}_\Gamma E)$ は加群圏の Serre 部分圏なのでアーベル圏であり、$(-,E)$ により双対になっていて、しかも Serre なのでそれぞれのアーベル圏での部分対象は通常の部分加群と同じものである。よって従う。 □

一般論で言えるのはここまでで、あとは環に制限をつけたときに実際にこういう双対を作る。

基本的に使うのは可換の場合なのでそれでやります。

定理 A.6. R を可換ネーター環とし、極小移入余生成子 E を取る、つまり

$$E := \bigoplus_{\mathfrak{m}\in \operatorname{Max} R} E(R/\mathfrak{m}).$$

このとき、$\operatorname{Hom}_R(-,E)\colon \mathsf{Mod}\, R \leftrightarrow \mathsf{Mod}\, R$ は、長さ有限加群の圏の双対 $\mathsf{fl}\, R \overset{\sim}{\leftrightarrows} \mathsf{fl}\, R$ を誘導する。この双対性のことをよく $(-)^\vee$ と書く。

証明. 先程の状況になっている（E は (R,R) 両側加群であり移入余生成子になっている）ことに注意する。

まず $\operatorname{Hom}_\Lambda(S,E) \cong S$ を示す。

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_\Lambda(S,E) &= \operatorname{Hom}_\Lambda(S, \bigoplus_{\mathfrak{m}\in \operatorname{Max} R} E(R/\mathfrak{m})) \\
&= \bigoplus_{\mathfrak{m}\in \operatorname{Max} R} \operatorname{Hom}_\Lambda(S, E(R/\mathfrak{m})) \\
&= \operatorname{Hom}_\Lambda(S, E(S)) \\
&= S
\end{aligned}$$

と計算できる。ここで二番目は S が有限生成より。三番目は、一般に単純加群 S' について $E(S')$ は simple essential socle S' を持つので、S と S' が非同型ならば $S \to E(S')$ はゼロ射でしかないことが分かる（像を考えれば S と同型な $E(S')$ の部分加群ができ、これは S' の本質性より S に一致するはず。）最後は、$S = R/\mathfrak{m}$ と極大イデアル用いて書くと、$\operatorname{Hom}_\Lambda(R/\mathfrak{m}, E(R/\mathfrak{m})) = R/\mathfrak{m}$ であるかだが、左辺は $E(R/\mathfrak{m})$ のうち $\mathfrak{m}$ で消える元全体であり、もちろん $R/\mathfrak{m}$ を含む。しかし一致していないならば、$E(R/\mathfrak{m})$ には $R/\mathfrak{m}$ 以外にも単純部分加群があることになり、$R/\mathfrak{m}$ が $E(R/\mathfrak{m})$ の中で本質的なことに矛盾する。

以上から $\operatorname{Hom}_\Lambda(S,E) \cong S$ が R 加群として成り立つ。よって $\eta_S\colon S \to ((S,E),E)$ を考えると、$((S,E),E) = (S,E) = S$ となり、η_S は S から S への写像と思える。しかし一般に η_S は単射だったことを考えれば、長さを比較して η_S は同型が従う。

拡大を考えれば $(-,E)\colon \mathsf{fl}\, R \leftrightarrows \mathsf{fl}\, R \colon (-,E)$ という関手が well-defined なことがすぐ分かり、また $\mathsf{ref}(E)$ が拡大で閉じていたことと任意の単純加群について $S \in \mathsf{ref}(E)$ なことを使えば、この関手は 2 回やったらもとに戻ることが分かる。よって $(-,E)$ は $\mathsf{fl}\, R$ の自己双対を与える。 □

さらに実は完備局所環上で考えれば、$\mathsf{ref}(E)$ は $\mathsf{mod}\, R$ を含むことが分かり、そこ上では $\mathsf{mod}\, R$ と $\mathsf{art}\, R$（アルティン加群の圏）の双対が与えられていることが分かる。

参考文献

[BH] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 39, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[Ma] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 8. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.

[GN] S. Goto, K. Nishida, *Towards a theory of Bass numbers with application to Gorenstein algebras*, Colloq. Math. 91 (2002), no. 2, 191–253.

[Va] W. Vasconcelos, *Reflexive modules over Gorenstein rings*, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968), 1349–1355.

Email address: m16009t@math.nagoya-u.ac.jp