対称群の Bruhat inversion と A 型 quiver の表現論
Bruhat inversions in symmetric groups and representation theory of quivers of type A

榎本 悠久 *

名古屋大学大学院多元数理科学研究科，2020 年 2 月

対称群は、大学一年の線形代数から登場する基本的な概念であり、組合せ論的な記述ができる良い遊び道具である。一方現代数学の様々な分野で、ある数学的対象を対称群の組合せ論へ「落とし込む」ことでその対象の性質を明らかにする、という研究がなされている（例えば種々の Lie 型表現論やそれ由来の代数幾何など)。これは対称群が、十分具体的・組合せ論的・計算可能で楽しい側面を持つ一方で、様々な分野の対象と関連する数学的豊かさを持っていることを示している。

本講演では、講演者の専門とする **quiver の表現論**と対称群との関わりについて概説する。Quiver とは $\cdot \to \cdot \leftarrow \cdot$ のような有向グラフであり、その表現とは

$$k \to k^2 \leftarrow k$$

のように、頂点にベクトル空間を乗せ、矢に線形写像（上の 2 つの $k \to k^2$ は線形写像）を乗せたものである。

実は上のような「一直線の quiver Q（**A 型 quiver** と呼ばれる)」の表現論と対称群は深く関わっていることが知られている。その一つが **Ingalls-Thomas 対応**である: 対称群の元 w が一つ与えられると、ある自然な方法で「Q の表現の集まり $\mathcal{F}(w)$（表現圏の部分圏)」を考えることができる。これは「よい条件を満たす部分圏」の分類を与えている [T]。

この Ingalls-Thomas 対応のもとで本講演では、$\mathcal{F}(w)$ の中での「単純対象」という圏論的対象が、「w の Bruhat inversion」という対称群の組合せ論的対象と対応する、という講演者の結果を紹介する [E]。このことの応用として、「加群の組成列の一意性（Jordan-Hölder の定理）の類似が $\mathcal{F}(w)$ において成り立つか」という問題が、w の純組合せ論的性質で特徴づけられることを述べる。

参考文献

[E] Enomoto, H., *The Jordan-Hölder property and Grothendieck monoids of exact categories*, arXiv:1908.05446.

[T] Thomas, H., *Coxeter groups and quiver representations*, In Surveys in representation theory of algebras, volume 716 of Contemp. Math., pages 173–186. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018.

* m16009t@math.nagoya-u.ac.jp