対称群の Bruhat inversion と A 型 quiver の表現論
Bruhat inversions in symmetric groups and representation theory of quivers of type A

榎本 悠久 *

名古屋大学大学院多元数理科学研究科，2020 年 2 月

1 概観

対称群は大学一年の線形代数から登場する基本的な概念であり、組合せ論的な記述が可能で具体的に計算しやすい。一方現代数学の様々な分野で、ある数学的対象を対称群の組合せ論へ「落とし込む」ことでその対象の性質を明らかにする、という研究がなされている（例えば種々の Lie 型表現論やそれ由来の代数幾何など)。これは対称群が、十分具体的・組合せ論的・計算可能で楽しい側面を持つ一方で、様々な分野の対象と関連する数学的豊かさを持っていることを示している。

本講演では、講演者の専門とする**箙（quiver）の表現論**と対称群との関わりについて概説する。箙とは $\cdot \to \cdot \leftarrow \cdot$ のような有向グラフであり、その表現とは

$$k \to k^2 \leftarrow k$$

のように、頂点にベクトル空間を乗せ、矢に線形写像（上の 2 つの $k \to k^2$ は線形写像）を乗せたものである。

実は上のような「一直線の箙 Q（**A 型箙**と呼ばれる)」の表現論と対称群は深く関わっていることが知られている。その一つが **Ingalls-Thomas 対応**である: 対称群の元 w が一つ与えられると、ある自然な方法で「Q の表現の集まり $\mathcal{F}(w)$（表現圏の部分圏)」を考えることができる。これは「よい条件を満たす部分圏」の分類を与えている [Tho]。

この Ingalls-Thomas 対応のもとで、本稿では $\mathcal{F}(w)$ の圏論的性質と、w の組合せ論的性質との関連を調べる。本稿の主結果は、$\mathcal{F}(w)$ の**単純対象**が w の **Bruhat 転倒**により分類される、というものである。

本稿の内容は [Eno1, Eno2] に基づく。

1.1 VR 講演

本講演は、遠隔講演の一つの新たな形式として **VR 講演**を行った。これは、講演者は自宅で VR 機材を用いてアバターを制御し、そこで処理された映像を大学側のスクリーンへ映して投影して行うというものである。これについて、著者が講演リハーサル用に講演の内容を投稿した動画が `https://www.youtube.com/watch?v=FpIfGVr5OcA` から見られるので、興味のある読者はぜひ見てほしい。

---

* m16009t@math.nagoya-u.ac.jp

2　置換の Bruhat 転倒

まずは組合せ論パートの準備をする。S_{n+1} を $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ に左から作用する対称群とする。ここで $w \in S_{n+1}$ について、$w = w(1)w(2)\cdots w(n+1)$ と書く（**1 行記法**と呼ぶ）。例えば $w = 42153 \in S_5$ と書いたら w は $w(1) = 4, w(2) = 2, \ldots, w(5) = 3$ という元である。

まず置換の**転倒**という概念を定義する。

定義 2.1. 元 $w \in S_{n+1}$ に対し、$\mathsf{inv}(w)$ を、$1 \leq i < j \leq n+1$ なるペア (i, j) であって、w の 1 行記法で j のほうが i より左に現れるようなものの集まりとする、記号で書くと

$$\mathsf{inv}(w) := \{(i, j) \,|\, i < j \text{ かつ } w^{-1}(i) > w^{-1}(j)\}.$$

また $\mathsf{inv}(w)$ を**転倒集合**、$\mathsf{inv}(w)$ の元を w の**転倒**という。

つまり w の 1 行記法でひっくり返っている数の組の集合である。

例 2.2. $w_1 = 42153, w_2 = 42513$ とすると、

$$\begin{aligned}
\mathsf{inv}(w_1) &= \{(1,2), (1,4), (2,4), (3,4), (3,5)\}, \\
\mathsf{inv}(w_2) &= \mathsf{inv}(w_1) \cup \{(1,5)\}.
\end{aligned}$$

Bruhat 転倒とは、転倒のうち「他の転倒の和でかけない」ようなものである。

定義 2.3. 元 $w \in S_{n+1}$ に対し、(i, j) が w の **Bruhat 転倒**であるとは次を満たすときをいう。

1. $(i, j) \in \mathsf{inv}(w)$ である。
2. $i < m < j$ なる m であって、$(i, m), (m, j) \in \mathsf{inv}(w)$ なるようなものは存在しない。

また w の Bruhat 転倒の集合を $\mathsf{Binv}(w)$ と書く。

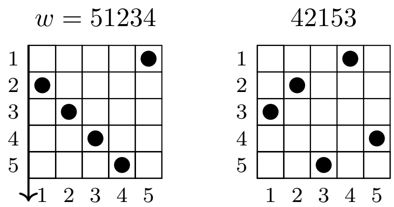
例 2.4. $w_1 = 42153, w_2 = 42513$ とすると、

$$\begin{aligned}
\mathsf{Binv}(w_1) &= \{(1,2), (2,4), (3,4), (3,5)\} = \mathsf{inv}(w_1) \setminus \{(1,4)\}, \\
\mathsf{Binv}(w_2) &= \{(1,2), (1,5), (2,4), (3,4), (3,5)\} = \mathsf{inv}(w_2) \setminus \{(1,4)\}.
\end{aligned}$$

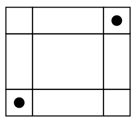
となる。例えば $(1, 4)$ が Bruhat 転倒**でない**のは、w_1 と w_2 において、もちろん 1 と 4 はひっくり返っているが、それは「1 と 2 がひっくり返っている」ことと「2 と 4 がひっくり返っていること」の帰結とみなせるから、というイメージである。

Bruhat 転倒をより分かりやすく表すために、置換の次のような図を書くのが便利である。まず S_5 の元を表すのに縦 5 列横 5 列の箱をならべ、1 行記法にしたがって上から箱に玉をいれていく（1 だったら一番ひだ

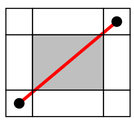
り、2 だったら左から二番目、5 だったら一番右の箱に玉を入れる)。下は $51234, 42153 \in S_5$ の図である。



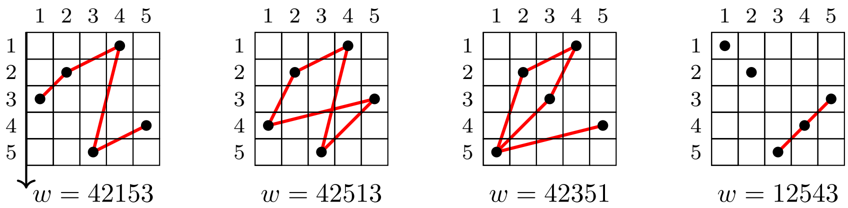
このとき、w の転倒集合は、図でいうところの次のような位置関係にある 2 つの玉と対応する:



ここで、Bruhat 転倒に対応するところを線で結ぶ。これはつまり、



の状況で、灰色の部分に玉が一つもないときに赤線で結ぶ、ということである。できるグラフを **Bruhat 転倒グラフ**と呼ぶことにする。例えば以下はいろんな S_5 の元の Bruhat 転倒グラフである。



3 A 型の箙の表現

3.1 A 型箙の直既約表現

まず箙とその表現を定義しよう。以下 k を体とする。

定義 3.1. 箙(クイバー、quiver)Q とは有向グラフのことで、$Q = (Q_0, Q_1)$ という 2 つの集合からなるり、Q_0 は頂点集合、Q_1 は矢の集合と呼ぶ。例えば:

$$1 \rightrightarrows 2$$

や、

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & 2 & 3 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & 4 \arrow[loop right] & 5 \arrow[r] & 6 \\ & & 7 \arrow[ull, bend left] & & & \end{tikzcd}$$

などである。

定義 3.2. $Q = (Q_0, Q_1)$ を箙とする。このとき Q の表現 M とは、以下のデータからなるものである:

- 各頂点 $i \in Q_0$ に対して、有限次元 k ベクトル空間 M_i を割り当てる。
- 各矢 $a\colon i \to j \in Q_1$ に対して、k 線形写像 $M_a\colon M_i \to M_j$ を割り当てる。

また $\operatorname{rep} Q$ で、Q の全ての表現を集めた集まり（圏）とする。

たとえば、次は $Q : 1 \leftarrow 2 \to 3 \leftarrow 4$ の表現である。

$$k \xleftarrow{2020} k \xrightarrow{0} k \xleftarrow{[3,31]} k^2$$

ここで例えば $2020\colon k \to k$ は 2020 倍写像を表すものとする。

詳しくは述べないが、Q の表現の間には準同型の概念が定義でき、また表現の直和、部分表現、商表現などの概念が定義でき、$\operatorname{rep} Q$ にはアーベル圏の構造が入る。**箙の表現論**とは、$\operatorname{rep} Q$ の圏論的な構造を調べることを目標としている。その出発点が、次の **Krull-Schmidt の定理**である。

定理 3.3 (Krull-Schmidt)**.** Q を箙としたとき、任意の Q の表現は必ず直既約な表現の直和に、同型と並び替えを除いて一意的に表せる。

ここで直既約表現とは非自明な直和分解を持たないようなものである。この定理により、$\operatorname{rep} Q$ の構造は直既約部分のみさえわかればよい（圏論的にも、直既約表現のなす部分圏のみから本当に $\operatorname{rep} Q$ が復元されることが分かる)。

では直既約な Q の表現はどのくらいあるだろうか。一般には実は無限個非同型な直既約表現がありうる:

例 3.4. Q を以下の箙とする:

$$1 \leftleftarrows 2$$

このとき、各 $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1(k)$ に対し、次の表現

$$M_{[\lambda:\mu]}\colon \qquad k \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\leftleftarrows}} k$$

は直既約であり、しかもこれらが同型なのは $\mathbb{P}^1(k)$ の元として同じときである。特に k が無限体ならば、これは無限個の非同型な直既約 Q 表現を与える。

もし直既約表現が同型を除いて有限個しかないならば、$\operatorname{rep} Q$ の構造は扱いやすく、よい振る舞いをするといえる。このような箙を**有限表現型**と呼ぶことにすると、いつ $\operatorname{rep} Q$ が有限表現型かという問が考えられる。これについて次の驚くべき定理がある。

定理 3.5 (Gabriel)**.** 有限な箙 Q について、以下は同値である。

1. Q が有限表現型である、つまり直既約 Q 表現が同型を除いて有限個しか存在しない。
2. Q が、向きを忘れた無向グラフと見たときに、simply-laced な Dynkin 図形たちの非交和となっている。

Dynkin 図形については各自検索してほしい。向き付けを忘れると Dynkin 図形となる箙のことを **Dynkin 箙**と呼ぶことにすると、本稿の主題は次の **A 型 Dynkin 箙**である。

定義 3.6. Q が A_n **型箙**であるとは、Q の矢の向きを忘れると

$$1 \text{ —— } 2 \text{ —— } 3 \text{ —— } \cdots \text{ —— } n$$

となるものをいう。

例 3.7. 次は A_3 型箙の全てである:

$$1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \qquad\qquad 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$$

$$1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 \qquad\qquad 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

実は先程の Gabriel の定理は、直既約 Q 表現の分類も与えている。これは一般にルート系の言葉で表せるが、A 型の場合は次のように具体的に書ける。直既約 Q 表現の同型類の集合を $\mathsf{ind}(\mathsf{rep}\,Q)$ と書くことにしよう。

定理 3.8 (A 型 Gabriel)**.** Q を A_n 型の箙とするとき、$1 \leq i < j \leq n+1$ を満たす各ペア (i,j) に対して、$M_{[i,j)}$ を次の表現ような Q の表現とする:

$$M_{[i,j)}: \qquad 0 - \cdots - 0 - k - \cdots - k - 0 - \cdots - 0$$

ここで頂点 m には $i \leq m < j$ のとき k が、他には 0 が乗っていて、線形写像は k の間は全て恒等写像、それ以外は全て 0 写像である。このように定義すると、写像 $(i,j) \mapsto M_{[i,j)}$ は全単射

$$\{(i,j) \,|\, 1 \leq i < j \leq n+1\} \cong \mathsf{ind}(\mathsf{rep}\,Q)$$

を与える。

3.2 ねじれ自由類と Ingalls-Thomas 対応

次に、近年表現論サイドで調べられている**ねじれ自由類**という Q 表現の集まりを導入しよう。

定義 3.9. Q を箙とし、Q 表現のある集まり $\mathcal{F}$ が**ねじれ自由類** *(torsion-free class)* であるとは、次の 2 つを満たすときを言う。

1. 任意の Q 表現 M とその部分表現 L に対して、L と M/L が $\mathcal{F}$ に入っているならば、M も $\mathcal{F}$ に入っている。
2. 任意の Q 表現 M に対して、M が $\mathcal{F}$ に入っているならば、その部分表現はすべて $\mathcal{F}$ に入っている。

つまり、「拡大をとる操作と部分表現を取る操作で閉じている」$\mathsf{rep}\,Q$ の部分圏のことである。

ねじれ自由類はよい性質を持つ（とくに Quillen の意味での完全圏構造を持ち、また quasi-abelian である)。そのため次の問は自然である。

問題 3.10. Q のねじれ自由類はどのようなものがあるか。また、各ねじれ自由類はどのような圏論的な性質を持つか。

本研究のもともとの動機は、完全圏についての著者の研究 [Eno1] の一般論が、具体的な完全圏においてどのように応用できるかというもので、A 型箙のねじれ自由類は次節以降で見るような転倒集合による明快な記述（Ingalls-Thomas 対応）をもち、しかも計算が具体的に可能なよい toy example となっている。

まず次のように対称群の元から Q 表現の集まりを作ることが自然に考えつく。

定義 3.11. S_{n+1} の元 w に対し、$\mathcal{F}(w)$ を、$(i,j) \in \mathsf{inv}(w)$ となるような $M_{[i,j)}$ たちの有限直和からなる Q 表現の集まりとして定める。

後で見るように、このような操作で $\mathsf{rep}\,Q$ のねじれ自由類は全て構成できるのであるが、残念ながらねじれ自由類にならないものも存在し、どの w について $\mathcal{F}(w)$ が $\mathsf{rep}\,Q$ のねじれ自由類になるかは「箙 Q における矢印の向き付け」に依存している。つまり例えば箙 $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$ と $1 \leftarrow 2 \rightarrow 3$ では、$\mathcal{F}(w)$ がねじれ自由類となるような $w \in S_4$ は異なる。

それゆえ、何らかの Q の向き付けの情報により S_{n+1} の元を制限するのは自然なことであり、それが *Coxeter-sortable* という概念である。しかしこれについては少し記述が（組合せ論的に）複雑になるので、本稿では省略するが、A_n 型箙 Q が与えられると、対称群 S_{n+1} の元が c_Q**-sortable であるという概念が定義できる。このとき次が [IT] によって示された Ingalls-Thomas 対応（の一部）である。

定理 3.12 (Ingalls-Thomas 対応)**.** Q を A_n 型の箙する。このとき $w \in S_{n+1}$ に対して $\mathcal{F}(w)$ を対応させることで、次の全単射が存在する:

$$\{w \in S_{n+1} \mid w \text{ は } c_Q\text{-sortable}\} \cong \{\mathsf{rep}\,Q \text{ のねじれ自由類 }\}$$

この結果により、$\mathsf{rep}\,Q$ のねじれ自由類は $\mathcal{F}(w)$ という形をしており、ねじれ自由類が具体的に分類されたことになる。これを用いて、次のねらいは以下の問に答えることである:

問題 3.13. c_Q-sortable な元 w に対して、対応するねじれ自由類 $\mathcal{F}(w)$ の構造を、w の側の組合せ論的な情報を用いて記述せよ。

4 主結果

本研究は、与えられた具体的な完全圏の不変量を計算することをモチベーションとしていた。その重要な不変量が**単純対象**という概念である。それを今回のねじれ自由類の場合に定義しよう。

定義 4.1. $\mathsf{rep}\,Q$ のねじれ自由類 $\mathcal{F}$ について、$0 \neq M \in \mathcal{F}$ が $\mathcal{F}$ **の単純対象**であるとは、M の部分表現 L であって、$0 \neq L, M/L \in \mathcal{F}$ となるようなものが存在しないときをいう。また $\mathsf{sim}\,\mathcal{F}$ により、$\mathcal{F}$ の単純対象の同型類の集合をさす。

少し考えれば、$\mathcal{F}$ の単純対象は必ず直既約でなければならず、つまり $\mathsf{sim}\,\mathcal{F} \subset \mathsf{ind}\,\mathcal{F}$ が成り立つ。一方、$w \in S_{n+1}$ に対して $\mathcal{F}(w)$ を考えると、構成により、(i,j) に対して $M_{[i,j)}$ を対応させることで全単射

$$\mathsf{inv}(w) \cong \mathsf{ind}\,\mathcal{F}(w)$$

が存在する。よって $\mathsf{sim}\,\mathcal{F}(w)$ は $\mathsf{inv}(w)$ のある部分集合に対応するはずであるが、それがちょうど Bruhat 転倒だというのが主結果 1 つ目である。

定理 4.2. Q を A_n 型箙、$w \in S_{n+1}$ を c_Q-sortable な元とする。このとき Ingalls-Thomas 対応により対応する $\mathsf{rep}\,Q$ のねじれ自由類 $\mathcal{F}(w)$ に関して、次のような可換図式があり、上と下の写像は全単射である。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{inv}(w) & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{ind}\,\mathcal{F}(w) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathsf{Binv}(w) & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{sim}\,\mathcal{F}(w) \end{array}$$

この定理により、「与えられた $\operatorname{rep} Q$ のねじれ自由類 $\mathcal{F}$ における単純対象の分類」という問題が「対応する w における Bruhat 転倒の列挙」という純組合せ論的な問題に帰着され、原理的には簡単に求めることができたことになる。

では「単純対象が分類されると何が嬉しいのか？」という自然な疑問があがるであろうので、その応用として次に主結果の 2 番目である *Jordan-Hölder* **性の判定**を紹介する。

定義 4.3. $\mathcal{F}$ を $\operatorname{rep} Q$ におけるねじれ自由類とする。

- $M \in \mathcal{F}$ の $\mathcal{F}$ **における組成列**とは、M の部分表現の列
$$0 = M_0 < M_1 < \cdots < M_n = M$$
であって、各 i について M_i/M_{i-1} が $\mathcal{F}$ における単純対象であるときをいう。
- $M \in \mathcal{F}$ の 2 つの $\mathcal{F}$ における組成列 $0 = M_0 < \cdots < M_m = M$ と $0 = M'_0 < \cdots < M'_n = M$ が**同値**であるとは、$m = n$ が成り立ち、またある $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上の置換 σ が存在し、各 i について $M_i/M_{i-1} \cong M'_{\sigma(i)}/M'_{\sigma(i)-1}$ が成り立つときをいう。
- $\mathcal{F}$ が *Jordan-Hölder* **性** *(Jordan-Hölder property)* **を満たす**、または単に *(JHP)* **を満たす**とは、任意の $M \in \mathcal{F}$ に対して、M の $\mathcal{F}$ における組成列が全て同値であるときをいう。

これは通常の加群についての Jordan-Hölder の定理を部分圏レベルに要請したものである。もちろん $\operatorname{rep} Q$ においては通常の Jordan-Hölder の定理により (JHP) が満たされるが、驚くべきことに、$\operatorname{rep} Q$ の多くのねじれ自由類は (JHP) を満たさない。

例 4.4. $Q = 1 \leftarrow 2 \rightarrow 3$ とし、$w = 4231$ とする。このとき $\mathcal{F}(w)$ は $M_{[1,2)}, M_{[1,3)}, M_{[1,4)}, M_{[2,4)}, M_{[3,4)}$ を直既約対象として持ち、そのうち $M_{[1,4)}$ 以外は単純対象である（Bruhat 転倒に対応するので）。このとき $M_{[1,4)}$ には次のような 2 つの $\mathcal{F}(w)$ での組成列がある:
$$0 < M_{[1,2)} < M_{[1,4)},$$
$$0 < M_{[3,4)} < M_{[1,4)}$$
このうち前者の組成因子（と呼ぶべきもの）は $M_{[1,2)}$ と $M_{[1,4)}/M_{[1,2)} \cong M_{[2,4)}$ の 2 つであり、後者は $M_{[3,4)}$ と $M_{[1,4)}/M_{[3,4)} \cong M_{[1,3)}$ である。これら 4 つは互いに非同型なので (JHP) は $\mathcal{F}(w)$ において満たされていない。

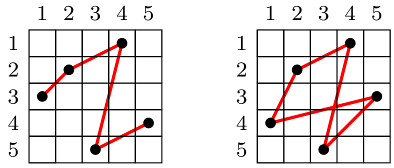
ではどのような w に対して $\mathcal{F}(w)$ が (JHP) を満たすかを判定するのが次の主定理である。

定理 4.5. Q を A_n 型箙、$w \in S_{n+1}$ を c_Q-sortable 元とすると、次は同値である。

1. $\mathcal{F}(w)$ が (JHP) を満たす。
2. w の Bruhat 転倒グラフがサイクルを含まない

証明には、[Eno1] で確立された (JHP) の判定条件を用いる（それによると、単純対象の個数さえ分かれば (JHP) が判定でき、それが著者が $\mathcal{F}(w)$ における単純対象の分類に興味をもった経緯である）。

例 4.6. 例えば $w_1 = 42153$ と $w_2 = 42513$ は $Q = 1 \leftarrow 2 \rightarrow 3 \leftarrow 4$ に対して c_Q-sortable なことが知られている。このとき Bruhat 転倒グラフは次で与えられる。よって w_1 の方にはサイクルがなく、w_2 にはある。よって $\mathcal{F}(w_1)$ は (JHP) を満たし、$\mathcal{F}(w_2)$ は満たさない。



$w_1 = 42153$ $w_2 = 42513$

注 4.7. 先の (JHP) 性の判定の条件は、ちょうど w に対応する Schubert 多様体が locally factorial であることの必要十分条件として [BMB] で導入された条件と一致している。

注 4.8. 本稿の結果は他の simply-laced な Dynkin 型箙にも自然になりたち、またさらに「Dynkin 図形の全ての向き付けの箙を一度に扱う」環として**前射影的多元環** *(preprojective algebra)* Π というものがあるが、そのねじれ自由類についても同様の理論がなりたつ [Eno2]。例えば「c_Q-sortable」というかなり技巧的な概念が導入されたが、実は Π においてはその概念は必要なく、 mod Π のねじれ自由類は対応するルート系の Weyl 群の元と一対一対応することが知られており、その意味でも「前射影的多元環の表現論は箙の表現論よりも対称性が高い」と言える。実際、他の Dynkin 箙の場合は、前射影的多元環での結果から直ちに導くことができる。

参考文献

[BMB] M. Bousquet-Mélou, S. Butler, *Forest-like permutations*, Ann. Comb. 11 (2007), no. 3-4, 335–354.

[Eno1] H. Enomoto, *The Jordan-Hölder property and Grothendieck monoids of exact categories*, arXiv:1908.05446.

[Eno2] H. Enomoto, *Bruhat inversions in Weyl groups and torsion-free classes over preprojective algebras*, arXiv:2002.09205.

[IT] C. Ingalls, H. Thomas, *Noncrossing partitions and representations of quivers*, Compos. Math. 145 (2009), no. 6, 1533–1562.

[Tho] Thomas, H., *Coxeter groups and quiver representations*, In Surveys in representation theory of algebras, volume 716 of Contemp. Math., pages 173–186. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018