局所圏上の加群圏について

名古屋大学理学部数理学科四年
学籍番号:061200409
榎本 悠久

目次

1. 導入

環の表現論とは, 与えられた環上の加群圏の構造を調べる数学の分野である. 一番基本的な環としては代数閉体上の有限次元多元環があるが, このクラスの環の表現論では**箙** *(quiver)* と呼ばれる構造が重要な役割を果たす (ここで箙とは, 多重辺やループを許した有向グラフのことである). まず多元環に対してある有限箙と関係式が定まり, このとき環上の加群圏を考えることは, その関係式付き箙のベクトル空間上への表現を考えることと同じである ([ASS]). また環が箙で表示できるだけでなく, 加群圏全体にも, *Auslander-Reiten* **箙**と呼ばれる箙が定義でき, これは加群圏の構成要素たる**直既約加群**と, その間の射の構成要素たる**既約写像** *(irreducible morphism)* を箙で表したものである. このことにより, 抽象的な加群の理論が目に見える具体的な, 組み合わせ的な対象として捉えることができる. ここで自然な疑問として次のようなことが考えられる:

- 環や加群圏に対して箙を対応させる操作は, どのような操作をしているのか
- 代数閉体上の多元環という仮定や, さらに有限箙という仮定を外しても, 代数閉体上の多元環の表現と同じような理論がなりたつのか

後者については, このような拡張が有限次元多元環の研究で自然に現れる例として, 例えば多元環の被覆理論 ([BG],[Ga]) や, Auslander による関手圏 ([Au1], [Au3], [Au4]) の使用などが挙げられる. 前者はある種の条件を課した無限箙の表現が, 後者では環上の有限生成加群の圏そのものの表現が対象となっている. これらは一般には環上の加群圏と見ることはできず, 前加法圏 $\mathcal{C}$ からアーベル群の圏 $\mathcal{A}b$ への加法的反変関手のなす圏 $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ を考えていると見るのが自然である. 特に $\mathcal{C}$ として対象 1 つの前加法圏を考えた場合には, これは環上の加群圏と一致する. この一般的な状況において, 例えば多元環上の加群についての次の基本的な結果の拡張を考察することは興味深い:

定理 A ([ASS, Corollary 5.17])**.** 有限次元多元環について, 次の集合の間には全単射が存在する*:*

- 環を箙で表示したときの, 頂点全体の集合
- 直既約射影加群の同型類
- 単純加群の同型類
- 直既約入射加群の同型類

また環について定義される種々の有限的な条件, つまり射影被覆の存在 (右完全環, 半完全環) や加群の長さの有限性 (右アルティン環) についての議論が一般の関手圏 $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ においてもなりたつかは自然な疑問である. 例えば Auslander による有限表現型多元環の理論において, 有限生成加群の圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ 上の関手圏 $\mathsf{Mod}(\mathsf{mod}\,\Lambda)$ での長さについての考察が本質的な役割を果たしている ([Au3]).

まず 2 節において, [Au2] や [Au3] にのっとり, 一般の前加法圏 $\mathcal{C}$ 上の加群圏を考える際に有用な *variety* という概念を定義し, いくつかの性質を述べる. これにより, 環や $\mathcal{C}$ 上の加群圏はすべて variety 上の加群圏とみなすことができ, variety は圏の森田同値類の中で一番自然な代表系を与えることが分かる.

次に, 3 節においては古典的に半完全環に対応する条件を一般の圏について考える. 主に [Kr] を我々の文脈で整理して少し拡張した内容となっている. variety において, 半完全に対応する条件はよく知られた *Krull-Schmidt* **圏**という概念と一致する. また Krull-Schmidt 圏を考えるときにその「構成成分」と言える, 直既約対象のなす充満部分圏を考え, それが**局所圏** *(locular category)* と呼ばれる構造を持つことを見る. これにより半完全な圏と Krull-Schmidt 圏と局所圏がそれぞれ一対一に対応し, 以下では構造がもっとも簡単に記述できる局所圏上の加群について見ていくことになる. このように Krull-Schmidt 圏から局所圏を取り出す操作は, 加群圏の箙を取る操作に対応している. また局所圏上の加群圏において, 直既約射影加群と単純加群の一対一対応があることを見て, また少し条件を加えれば直既約入射加群とも対応が存在することを見る.

4 節では, よりアルティン環に近い, 古典的には右完全環に対応する条件を Krull-Schmidt 圏や局所圏について考える. ここでは, Krull-Schmidt 圏や局所圏が右完全であることは, 非同型射のある種の冪零性で特徴づけられることを示す. この節は古典的な環論における完全環の特徴付けの圏論的な一般化である ([AF] などを参照).

次に 5 節において, [Au3] を参照しつつ右アルティン環に対応する条件を考える. 局所圏のアルティン性は, 射の空間の長さのある有限性, という数値的な条件で特徴づけられることを見る. また右アルティンならば左完全であるが, 環論の場合と違い右アルティンかつ右完全でないような容易な例が存在することを見る.

以上の考察をもとに, 6 節においては, 主に局所圏 Λ 上の加群圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ について考察する. [Au3] における考察を拡張し, $\mathsf{mod}\,\Lambda$ がこれまで見てきたアルティン性や完全性を持つのはどのような場合か考え, それが古典的な**有限表現型**に相当する, **局所有限表現型**という概念と密接に関係していることを見る. また, 代数閉体 k 上の局所圏について詳しくこれらの命題を見る.

Conventions. 以下本稿では, 環上の加群とは右加群のことを指し, 前加法圏 $\mathcal{C}$ からアーベル群の圏 $\mathcal{A}b$ への加法的反変関手のことを $\mathcal{C}$ 上の右加群あるいはたんに加群, それらと自然変換のなすアーベル圏を $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ と表すことにする. またすべての圏は本質的に小さい, つまり同型類全体が集合をなすことを仮定する. またこの仮定のもと, $\mathcal{C}$ 上の加群 M の部分対象全体は集合をなし, また通常の操作により束となることに注意しておく.

$\mathcal{C}$ 加群 M が**有限生成**であるとはその部分対象のなす束がコンパクトであること, または M への任意直和からの全射を必ず有限直和からの全射にとりなおせること, または有限個の $\mathcal{C}$ の対象たち $C_1, \cdots, C_t$ により $\mathcal{C}(-, C_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}(-, C_t)$ から M への全射が存在すること, という同値な条件をみたすことと定義する.

加法圏 $\mathcal{C}$ とその対象 X に対して, $\mathsf{add}\,X$ により, X の有限直和の直和因子と同型な $\mathcal{C}$ の対象全体からなる $\mathcal{C}$ の充満部分圏を指すことにする. また, 有限生成射影的 $\mathcal{C}$ 加群のなす圏を $\mathsf{proj}\,\mathcal{C}$ と表す. このとき通常の議論により, $\mathcal{C}(X, -) : \mathcal{C} \to \mathsf{Mod}\,\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ は圏同値 $\mathsf{add}\,X \xrightarrow{\sim} \mathsf{proj}\,\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ を誘導することに注意されたい.

2. Varieties

この節では, 一般の加群圏について考えるときに有用ないくつかの概念や基礎事項について述べる. まず Auslander の用法に従い, *variety* という加法圏のクラスを定義する:

定義 2.1 (variety)**.** $\mathcal{C}$ を圏とするとき, $\mathcal{C}$ が加法圏であり, 冪等元が分裂する, つまり任意の冪等射が核を持つとき, $\mathcal{C}$ を *variety* と呼ぶ.

この条件のもと, 対象 X が直既約であることと, $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ が非自明な冪等元を持たないことが同値であることに注意する.

例 2.2. 環 Λ 上の有限生成射影加群のなす圏を $\mathsf{proj}\,\Lambda$ とすると, これは variety である. またより一般的に, 前加法圏 $\mathcal{C}$ において $\mathsf{proj}\,\mathcal{C}$ を有限生成射影 $\mathcal{C}$ 加群のなす $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ の充満部分圏とするとき, これは variety になる.

このとき次の結果により, 一般の前加法圏上の加群圏を考えることと variety 上の加群圏を考えることは同じことだということが分かる.

定理 2.3 ([Au2, Proposition 2.5])**.** *$\mathcal{C}$ を前加法圏, $\mathsf{proj}\,\mathcal{C}$ を有限生成射影 $\mathcal{C}$ 加群のなす圏とするとき, $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ と $\mathsf{Mod}(\mathsf{proj}\,\mathcal{C})$ は圏同値である.*

これを用いると, 2 つの圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ が**森田同値**であることを $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ と $\mathsf{Mod}\,\mathcal{D}$ が圏同値であることと定義すれば,

(1) 前加法圏の森田同値類
(2) variety の圏同値類

の 2 つのクラスの間に, 前加法圏 $\mathcal{C}$ については $\mathsf{proj}\,\mathcal{C}$ を, variety $\mathcal{C}$ についてはそのまま $\mathcal{C}$ を対応させることで全単射が与えられることが分かる. また, variety $\mathcal{C}$ について, ある環 Λ 上の $\mathsf{proj}\,\Lambda$ と $\mathcal{C}$ が圏同値であるためには, $\mathcal{C}$ が加法的生成元を持つこと, つまり $\mathcal{C}$ のある対象 M により任意の $\mathcal{C}$ の対象が M の有限直和の直和因子となることが同値であるので,

(1) 環の森田同値類
(2) 加法的生成元を持つ variety の圏同値類

の間の全単射が得られる. 具体的には, 環 Λ に対して $\mathsf{proj}\,\Lambda$ を, 加法生成元 M を持つ variety $\mathcal{C}$ に対して環 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(M)$ を対応させる対応である. 例えば有限次元多元環 Λ を考える際にも, 有限生成 Λ 加群の圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ という variety を考えることができるが, これが加法的生成元を持つことは Λ が有限表現型, つまり直既約 Λ 加群の同型類が有限個になることと同値である. よって一般に有限表現型と限らない環上の加群圏を考察する場合は, 加法生成元を必ずしも持たない場合の variety について考えることが有用である.

3. Krull-Schmidt 圏と局所圏

この節では, 半完全環に対応する圏の条件を考え, それと *Krull-Schmidt* **圏**や**局所圏** *(locular category)* との対応があることを見る. 実際, この 3 つの概念は等価な概念であることが定理 3.17 で示される. 古典的には, 半完全環はアルティン環や有限次元多元環などの一般化であり, このレベルにおいても単純加群と直既約加群の一対一対応が存在する.

3.1. 半完全な圏と Krull-Schmidt 圏.

まずは半完全な圏と Krull-Schmidt 圏との関連をみる. この節の内容は, Krause による Krull-Schmidt 圏と射影被覆の解説 ([Kr]) を $\mathcal{C}$ 加群の場合に若干修正したものである. 詳しくは [Kr] や [AF] などを参照して欲しい.

まずはアーベル圏における射影被覆の概念について復習しよう.

定義 3.1. $\mathcal{A}$ をアーベル圏, $f: P \to M$ を $\mathcal{A}$ における全射とする. このとき f が**本質全射** *(essential ephimorphism)* であるとは, 任意の $g: X \to P$ に対して fg が全射ならば g が全射となることである. とくに P が射影的な場合, $f: P \to M$ を**射影被覆** *(projective cover)* という.

注 3.2. 全射 $f: P \to M$ が本質全射であるためには, $\mathrm{Ker}\, f$ が P の部分対象として**余剰的** *(superfluous)*, つまり任意の真の部分対象と和をとっても真の部分対象となることと同値である. またこれは, P が射影的である場合, 任意の $h: P \to P$ に対して $fh = f$ ならば h が同型となる (**右極小**である) こととも同値であることが示される.

古典的な環論においては, **半完全** *(semiperfect)* **環**とは任意の有限生成右加群が射影被覆を持つことであった. この類似として, 前加法圏 $\mathcal{C}$ 上に対して**半完全**を定義する:

定義 3.3. 前加法圏 $\mathcal{C}$ が**半完全** *(semipferfect)* であるとは, 任意の有限生成右 $\mathcal{C}$ 加群が射影被覆を持つことである.

半完全な圏という名称は一般的ではないが, その理由として variety においてはこの概念は次に示すように *Krull-Schmidt* 圏と呼ばれる概念と一致することがあげられる. Krull-Schmidt 圏とは一言で言えば, 直既約分解ができその一意性が言えるような圏のことである:

定義 3.4. *Krull-Schmidt* **圏**とは, 加法圏 $\mathcal{C}$ であり, $\mathcal{C}$ の任意の対象 X が $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_t$ という各 $i = 1, \cdots, n$ について $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X_i)$ が局所環になるような有限個の対象の直和になるようなものをいう.

一般に局所環は非自明な冪等元を持たず, 対象 X の自己準同型環が非自明な冪等元を持たないならば直既約であることがわかるので, 上の $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X_i)$ が局所環という条件により X_i は直既約であることに注意する.

例 3.5. 環上の長さ有限な加群のなす圏は Fitting の補題により Krull-Schmidt 圏である. 特に, 右アルティン環上の有限生成加群のなす圏などもこれにあたる. また Krull-Schmidt 圏の加法的充満部分圏であり, 直和因子について閉じた圏も Krull-Schmidt 圏になる. よって右アルティン環上の有限生成射影加群のなす圏なども Krull-Schmidt である.

まず環の場合に, この 2 つを関係づける次の命題がある:

定理 3.6 ([Kr, Proposition 4.1])**.** 環 Λ について次は同値である.
1. $\mathsf{proj}\,\Lambda$ は *Krull-Schmidt* 圏である.
2. 任意の単純右 Λ 加群が射影被覆を持つ.
3. 任意の有限生成右 Λ 加群が射影被覆を持つ *(*Λ が半完全*)*.

環 Λ に $\mathsf{proj}\,\Lambda$ という variety を対応させる操作は Section 2 で見た対応と同じものであることを考えると, この定理により半完全環と, 加法的生成元を持つ Krull-Schmidt variety を考えることが同じであることが分かる.

実際, この定理は環に限らずに variety や前加法圏についてもなりたつことが分かるが, その証明に必要な圏の *Jacobson* **根基** *(radical)* を導入しよう. 詳しい性質は [Kr] や [ASS], [Ba], [Ke] などを参照して欲しい.

定義 3.7. 前加法圏 $\mathcal{C}$ に対して, その *Jacobson* **根基** $J_{\mathcal{C}}$ とは, $\mathcal{C}$ の対象 X と Y に対して,

$$J_{\mathcal{C}}(X,Y) = \{ f : X \to Y \text{ in } \mathcal{C} \mid \text{全ての } g \in \mathcal{C}(Y,X) \text{ について } 1_X - gf \text{ が同型射} \}$$

というアーベル群を対応させる $\mathcal{C}$ の両側イデアルのことである.

注 3.8. $J_{\mathcal{C}}$ が実際に両側イデアルであることは,

$$J_{\mathcal{C}}(X,Y) = \{ f : X \to Y \text{ in } \mathcal{C} \mid \text{全ての } g \in \mathcal{C}(Y,X) \text{ について } 1_Y - fg \text{ が同型射} \}$$

と書き換えられることを用いて, 計算により確かめることができる. またこれらの定義と性質を用いて, $J_{\mathcal{C}}(X,Y)$ は $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(Y)$ が局所環のときには分裂全射でない射全体, $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ が局所環のときには分裂単射でない射全体, 両者ともに局所環の場合には非同型全体と一致することが簡単に証明できる.

Krull-Schmidt 圏での根基の重要な性質として次がある.

補題 3.9. $\mathcal{C}$ を *Krull-Schmidt* 圏, C を $\mathcal{C}$ の直既約な対象とする. このとき $\mathcal{C}(-,C)$ の任意の真の部分対象は $J_{\mathcal{C}}(-,C)$ に含まれ, とくに $J_{\mathcal{C}}(-,C)$ は $\mathcal{C}(-,C)$ の唯一の極大部分加群である.

証明. 上の注より, $J_{\mathcal{C}}(-,C)$ は分裂全射でない射全体, つまり右逆射をもたない射全体からなる. とくに 1_C は $J_{\mathcal{C}}(C,C)$ に含まれないのでこれは $\mathcal{C}(-,C)$ の真の部分対象である. また M を $\mathcal{C}(-,C)$ の別の部分対象とし, $J_{\mathcal{C}}(-,C)$ に含まれないと仮定すると, ある D により $M(D)$ には射 $g : D \to C$ で右逆射 $h : C \to D$ をもつものが含まれる. しかし M が部分関手なことに注意すると, $M(h) : M(D) \to M(C)$ により g は 1_C にうつされることがわかり, ここから容易に $M = \mathcal{C}(-,C)$ となることが従う. よって任意の真の部分対象は $J_{\mathcal{C}}(-,C)$ に含まれることが分かる. □

これを使えば, Krull-Schmidt 圏上での単純加群を全て簡単に記述でき, それらの射影被覆もすぐに構成できることが分かる.

定理 3.10 ([Au3, Proposition 2.3])**.** $\mathcal{C}$ を *Krull-Schmidt* 圏とする. このとき, $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ の任意の単純対象 S について $S \cong \mathcal{C}(-,C)/J_{\mathcal{C}}(-,C)$ となる $\mathcal{C}$ の直既約対象 C が存在する. またこのとき, $\mathcal{C}(-,C) \to \mathcal{C}(-,C)/J_{\mathcal{C}}(-,C)$ は S の射影被覆である.

証明. S を $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ の単純対象としたとき, 特に 0 ではないので, $S(C) \neq 0$ となる $\mathcal{C}$ の対象 C が存在する. このとき $\mathcal{C}$ が Krull-Schmidt なことより C は直既約対象の有限直和でかけるが, S が加法的関手なことから, もとから C は直既約であると仮定して良い. このとき $S(C)$ の 0 でない元 x をとり, それに米田の補題により対応する射 $\mathcal{C}(-,C) \to S$ をとると, これも 0 射でない. しかし S は単純であるから, この射は全射でなければならない. したがって S は $\mathcal{C}(-,C)$ のある極大部分対象による商と同型になる. しかし補題 3.9 で見たように $\mathcal{C}(-,C)$ の極大対象は $J_{\mathcal{C}}(-,C)$ のみであるので, 前半が従う.

後半は, $J_{\mathcal{C}}(-,C)$ が $\mathcal{C}(-,C)$ の余剰部分加群であることを確かめればよいが, これも補題 3.9 で見たように任意の部分加群は $J_{\mathcal{C}}(-,C)$ に含まれることから明らかである. □

定理 3.11. $\mathcal{C}$ を *variety* としたとき, 次は同値である.

(1) $\mathcal{C}$ は *Krull-Schmidt* 圏である.
(2) 任意の単純右 $\mathcal{C}$ 加群が射影被覆を持つ.
(3) 任意の有限生成右 $\mathcal{C}$ 加群が射影被覆を持つ ($\mathcal{C}$ が半完全).

証明. 証明の本質的な部分は [Kr] による命題 3.6 の証明と変わらないが, 参考のためこれにのっとった証明を本稿にも記しておく.

(1)⇒(2) これは定理 3.10 である.

(2)⇒(3) まず M を 0 でない有限生成 $\mathcal{C}$ 加群としたとき, $\operatorname{rad} M$ を M の全ての極大部分対象の共通部分とする. M が有限生成なことから M の任意の真の部分対象はある極大部分対象に含まれることが従い, $\operatorname{rad} M$ は M の余剰部分加群となることが分かる. このとき, $M/\operatorname{rad} M$ が半単純となることを示す.

$M/\operatorname{rad} M$ が半単純でないと仮定すると, $\operatorname{soc}(M/\operatorname{rad} M) = M'/\operatorname{rad} M$ なる M の真の部分対象 M' で $\operatorname{rad} M$ を含むものが存在する. ここで左辺は単純部分対象全体の和である. このとき M が有限生成なことから, M' を含む極大部分対象 L が存在する. ここで,

$$0 \longrightarrow L/\operatorname{rad} M \longrightarrow M/\operatorname{rad} M \longrightarrow M/L \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

の完全列が分裂することを示したい. まず M/L は単純加群であるから, (2) の仮定より射影被覆 $P \to M/L$ が存在する. この核 K は P の極大部分対象かつ余剰的である. しかし P も有限生成となる (M/L が有限生成より必ず有限生成射影対象からの全射があるが, P はその対象からの分裂全射があることが分かる) ので, 同じく $\operatorname{rad} P$ は P の余剰部分対象である. 一方 P の任意の余剰部分対象は必ず $\operatorname{rad} P$ に含まれることが分かるので, $K \leq \operatorname{rad} P$. しかし K が極大なことと $\operatorname{rad} P$ の定義から $\operatorname{rad} P \leq K$. よって $K = \operatorname{rad} P$ となる. ゆえに,

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, dotted] & P/\operatorname{rad} P \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\ M \arrow[r] & M/L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

の可換図式が存在し, P が射影的なことから点線の射が存在する. また一般に $\operatorname{rad} M$ は M から単純対象への射の核たちの共通部分になっていることに注意すれば, $P \to M$ の射は $\operatorname{rad} P$ を $\operatorname{rad} M$ の中にうつすことが分かる. よって次の図式を得る.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, two heads] \arrow[d] & P/\operatorname{rad} P \arrow[r, equal] \arrow[d] & P/\operatorname{rad} P \arrow[d, "\wr"] \\ M \arrow[r] & M/\operatorname{rad} M \arrow[r] & M/L \end{tikzcd}$$

この左の四角は可換であり, さきほどの可換図式と合わせると右の四角も可換になる. よって (3.1) は分裂することがわかった.

以上のことから $L/\operatorname{rad} M$ に対して $M/\operatorname{rad} M$ の単純部分対象 S が存在し, $S\cap(L/\operatorname{rad} M)$ が 0 となることが分かる. とくに $S\cap\operatorname{soc}(M/\operatorname{rad} M)=0$ が分かり, soc の定義に反する. ゆえに $M/\operatorname{rad} M$ は半単純である.

$M/\operatorname{rad} M$ が有限生成であることから $M/\operatorname{rad} M=S_1\oplus\cdots\oplus S_t$ なる有限個の単純対象 $S_1,\cdots,S_t$ が存在する. また仮定より各 S_i に対し射影被覆 $P_i\to S_i$ が存在するので, それらの直和 $P_1\oplus\cdots\oplus P_t\to S_1\oplus\cdots\oplus S_t\cong M/\operatorname{rad} M$ も射影被覆になる. ゆえに,

$$\begin{tikzcd}
P_1\oplus\cdots\oplus P_t \arrow[d, dotted] \arrow[dr] & \\
M \arrow[r] & M/\operatorname{rad} M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

の図式において, 射影性から点線の射が存在する. 一方 $\operatorname{rad} M$ は M の余剰部分加群なことから $M\to M/\operatorname{rad} M$ は本質全射であり, 斜めの射も本質全射であることに注意すると点線の射が本質全射, よって求める射影被覆となっていることが分かる.

(3)⇒(2) 自明である.

(2)⇒(1) 今 $\mathcal{C}$ が variety であるので, $\mathcal{C}$ から $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ への米田埋め込み $C\mapsto\mathcal{C}(-,C)$ は $\mathcal{C}$ と有限生成射影 $\mathcal{C}$ 加群の圏 $\mathsf{proj}\,\mathcal{C}$ の間の圏同値を誘導する ($\mathcal{C}$ 内での冪等射は分裂することから米田埋め込みが essentially surjective であることが容易に確かめられる). ゆえに任意の有限生成射影 $\mathcal{C}$ 加群 P が, 自己準同型環が局所環となるような対象の有限直和になることを確かめれば良い. (2)⇒(3) のときの議論を P に対して適応すればとくに $P/\operatorname{rad} P\cong S_1\oplus\cdots\oplus S_t$ なる有限個の単純対象 S_i が存在し, 仮定より各 S_i は射影被覆 $P_i\to S_i$ を持つ. よって $P_1\oplus\cdots\oplus P_t\to P/\operatorname{rad} P$ が射影被覆となるが, $\operatorname{rad} P$ は P のなかで余剰的より, $P\to P/\operatorname{rad} P$ も射影被覆となる. ゆえに射影被覆の一意性から $P\cong P_1\oplus\cdots\oplus P_t$ となるので, 各 P_i の自己準同型環が局所環であることを確かめればよい.

$f:P_i\to S_i$ を射影被覆とする. このとき (2)⇒(3) の議論であったように, $\operatorname{rad} P_i$ は $\operatorname{Ker} f$ に一致し, よって P_i の唯一の極大部分加群である. 今 $f,g\in\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(P_i)$ を右可逆でない元とする. このとき $f+g$ も右可逆でないことが示されれば $\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(P_i)$ が局所環であることが分かり証明が終了する. 今 P_i は射影的であるので $\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(P_i)$ の元が右可逆であることと全射であることは同値である. よって f と g は全射ではないので, $\operatorname{Im} f$ と $\operatorname{Im} g$ は P_i の真の部分対象であり, 従って P_i が有限生成なことから $\operatorname{rad} P_i$ に含まれる. よって $\operatorname{Im}(f+g)$ も $\operatorname{rad} P_i$ に含まれ, とくに全射ではない. それゆえ $f+g$ も右可逆ではない. □

系 3.12. $\mathcal{C}$ を前加法圏とするとき, 次は同値である.

(1) 任意の対象 $C\in\mathcal{C}$ の自己準同型環が半完全環である.
(2) $\mathsf{proj}\,\mathcal{C}$ が *Krull-Schmidt* 圏である.
(3) 任意の単純右 $\mathcal{C}$ 加群が射影被覆を持つ.
(4) 任意の有限生成右 $\mathcal{C}$ 加群が射影被覆を持つ ($\mathcal{C}$ が半完全).

証明. $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ と $\mathsf{Mod}(\mathsf{proj}\,\mathcal{C})$ は圏同値であるので, (2), (3), (4) の同値性は先ほどの定理 3.11 で示されている.

(1)⇒(2) P を有限生成射影 $\mathcal{C}$ 加群とすると, P はある $\mathcal{C}$ の対象による $\mathcal{C}(-,C_1)\oplus\cdots\oplus\mathcal{C}(-,C_t)$ の直和因子となる. このとき各 $\mathcal{C}(-,C_i)$ が, 局所環を自己準同型環としてもつ有限個の対象の直和であることがわかれば, のちに示す Krull-Remak-Schmidt の定理 3.16 により (2) が従う. ここで各 $\mathcal{C}(-,C_i)$ の自己準同型環は仮定より半完全環であり, C_i を代入する関手 $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}\to\mathsf{Mod}\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(C_i)$ は圏同値 $\mathsf{add}\,\mathcal{C}(-,C_i)\xrightarrow{\sim}\mathsf{proj}\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(C_i)$ を誘導する. ゆえに $\mathcal{C}(-,C_i)$ は圏同値で送った先では自己準同型環が局所環となるような有限個の対象の直和となるので, もともと $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ においてもそうであったことが従う.

(2)⇒(1) 米田の補題より, $\mathsf{proj}\,\mathcal{C}$ の任意の対象 P の自己準同型環が半完全環ならよい. ところで $\mathsf{add}\,P\xrightarrow{\sim}\mathsf{proj}\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(P)$ の圏同値があり, $\mathsf{add}\,P$ は Krull-Schmidt 圏 $\mathsf{proj}\,\mathcal{C}$ の直和因子について閉じた加法充満部分圏であるので Krull-Schmidt 圏である. ゆえに $\mathsf{proj}\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(P)$ は Krull-Schmidt 圏, とくに $\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(P)$ は半完全環である. □

これら定理により, 半完全な圏を考えるときには Krull-Schmidt 圏のみを考えれば十分なことがわかった.

3.2. **Krull-Schmidt 圏と局所圏.** 次に, Krull-Schmidt 圏 $\mathcal{C}$ を考える際に重要な, 直既約対象たちの完全代表系からなる圏を考える. これは通常の有限次元多元環の表現論での, 環の箙表示や加群圏の Auslander-Reiten 箙を考えることに対応している操作である.

定義 3.13. $\mathcal{C}$ を Krull-Schmidt 圏としたとき, $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ を, $\mathcal{C}$ の直既約対象たちの同型類からそれぞれ 1 つずつ代表元を選んで得られる $\mathcal{C}$ の充満部分圏とする (とくに $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ は小圏となる).

Krull-Schmidt 圏では任意の対象は $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ の対象の直和になり, よってその間の射は $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ での射を行列表示したものとして表すことができる. このことは, $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ さえ分かってしまえば元の $\mathcal{C}$ を復元できることを意味している. この $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ の性質を取り出したものとして, ここでは [GR] にならい**局所圏** *(locular category)* の概念を導入しよう.

定義 3.14. $\mathcal{C}$ を前加法的な小圏とするとき, $\mathcal{C}$ は互いに非同型な対象からなり, かつ任意の対象の自己準同型環が局所環となるとき, **局所圏** *(locular category)* という.

とくに Krull-Schmidt 圏の直既約対象は自己準同型環が局所環であるので, 先に定義した $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ は局所圏であることが分かる. また, 逆に局所圏 Λ が与えられると, それに対して有限生成射影 Λ 加群のなす圏 $\mathsf{proj}\,\Lambda$ を考えることで variety が得られる. この操作は互いに逆であることが分かる.

定理 3.15. *Krull-Schmidt* 圏 $\mathcal{C}$ に対して局所圏 $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ を対応させ, 局所圏 Λ に対して *Krull-Schmidt* 圏 $\mathsf{proj}\,\Lambda$ を対応させる操作は,

- *Krull-Schmidt* 圏の圏同値類
- 局所圏の圏同型類

の *2* つのクラスの間の全単射となる. またこの対応のもとで, 加法的生成元を持つ *Krull-Schmidt* 圏と, $\mathsf{Ob}(\Lambda)$ が有限集合となる局所圏 Λ が対応する.

この定理の証明に, $\mathcal{C}$ 加群の圏における Krull-Remak-Schmidt の定理を使うので, それについて説明しよう.

補題 3.16. $\mathcal{C}$ 加群の圏 $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ において,

$$X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_t \cong M \oplus N$$

という同型があり, かつ各 i について $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X_i)$ は局所環であると仮定する. このとき, 適当に順番を並び替えることで, ある $1 \leq k \leq t$ が存在して,

$$M \cong X_1 \oplus \cdots \oplus X_k$$

という同型が存在する. 特に M が直既約のときには, ある $1 \leq k \leq t$ により $M \cong X_k$ となる.

証明. 環上の加群の場合の証明と同様にできるが, ここでは環上の場合に帰着させて証明する. 環 Γ を $\Gamma = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ とおき, X の有限直和の直和因子からなる $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ の充満部分圏 $\mathsf{add}\,X$ を考える. このとき, 関手 $\mathcal{C}(X, -) : \mathsf{Mod}\,\mathcal{C} \to \mathsf{Mod}\,\Gamma$ があるが, これは圏同値 $\mathsf{add}\,X \xrightarrow{\sim} \mathsf{proj}\,\Gamma$ を誘導する. これにより, 各 X_i や M, N を初めから Γ 上の有限生成 (射影) 加群とみなしてよいことが分かる. 従って通常の Krull-Remak-Schmidt の定理によりこの補題の主張が成り立つ. □

定理 3.15 の証明. まず局所圏 Λ に対して $\mathsf{proj}\,\Lambda$ が Krull-Schmidt 圏になることを示す. 任意の有限生成射影的 Λ 加群 P は, $\Lambda(-, x_1) \oplus \cdots \oplus \Lambda(-, x_t)$ なる射影加群からの全射があり, よってこれの直和因子である. ここで Λ の各対象 x について, $\mathrm{End}_{\mathsf{proj}\,\Lambda}\,\Lambda(-, x) \cong \mathrm{End}_{\Lambda}(x)$ の環同型が米田の補題より成り立ち, Λ が局所圏なことからこれは局所環となる. . ゆえに補題 3.16 により, 適当に順番を並び替えればある $1 \leq k \leq t$ によって $P \cong \Lambda(-, x_1) \oplus \cdots \oplus \Lambda(-, x_k)$ の同型が存在し, よって $\mathsf{proj}\,\Lambda$ は Krull-Schmidt 圏である.

このような Krull-Schmidt 圏と局所圏の間の対応が well-defined であることを見る. まず $\Lambda \cong \Lambda'$ を同型な局所圏とすれば当然 $\mathsf{proj}\,\Lambda \simeq \mathsf{proj}\,\Lambda'$ の圏同値がある. 逆も圏同値な Krull-Schmidt 圏においては直既約対象たちは同じ構造をしているのですぐ分かる.

次に, 局所圏 Λ について, $\mathsf{ind}(\mathsf{proj}\,\Lambda)$ と Λ が圏同型なことを見る. これは上の観察から, $\mathsf{proj}\,\Lambda$ における直既約対象は $\Lambda(-, x)$ という Λ の対象 x を用いて書けるもの全体であり, あとは米田の補題よりこれらの同型類から代表元をとってきた $\mathsf{ind}(\mathsf{proj}\,\Lambda)$ が Λ と圏同型なことがすぐに分かる.

また, Krull-Schmidt 圏 $\mathcal{C}$ に対して $\mathsf{proj}(\mathsf{ind}\,\mathcal{C})$ と $\mathcal{C}$ が圏同値であることを見たいが, どちらの圏も対象は $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ の元 (とそれと米田で対応する射影加群) の有限直和でかけ, その間の射も $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ の射の行列表示により表されることから明らかである.

後半の主張は, Krull-Schmidt 圏が加法的生成元を持つことと, 直既約対象が同型をのぞき有限個しかないことが同値なことより従う. □

系 3.17. *次のクラスの間には全単射が存在し, その対応のもと各々の加群圏は全て圏同値になる.*

- 半完全な前加法圏の森田同値類
- *Krull-Schmidt* 圏の圏同値類
- 局所圏の同型類

さらにこの全単射は, 次の全単射に制限される.

- 半完全環の森田同値類
- 加法的生成元を持つ *Krull-Schmidt* 圏の圏同値類
- 対象が有限個となる局所圏の同型類

これらの結果により, Krull-Schmidt 圏 $\mathcal{C}$ や半完全な圏を考える場合には, その構成成分たる局所圏 $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ を考えれば十分なことが分かる.

注 3.18. 何度か言及している通り, 環に対して箙を対応させ, 加群圏に Auslander-Reiten 箙を対応させる操作は, Krull-Schmidt 圏に対してその対応する局所圏を取り出しているとみなすことが自然である (環 Λ に対して前者は $\mathsf{proj}\,\Lambda$ に対応する局所圏を, 後者は $\mathsf{mod}\,\Lambda$ に対応する局所圏を考えている). 実際, 代数閉体 k 上の Krull-Schmidt 圏であり, 2 つのどの対象の間の射の空間も有限次元であるようなものを考えると, それに対して既約写像の空間の基底を考えることにより通常のように箙が定義される. また Auslander-Reiten 箙の場合と同様に, もしその局所圏が $J^{\infty} = 0$ を満たすならば, 任意の射は箙の道たちの線形結合で書けることが確認できる ([Ba] など).

3.3. 局所圏上の直既約射影加群.

半完全環においては, 直既約射影加群と単純加群の一対一対応が存在した ([AF] 等参照). 半完全な圏上, よって特に局所圏上の加群についても同じ対応が存在することが分かる.

定理 3.19. *Λ を局所圏としたとき, 次の集合の間には全単射が存在する.*

- Λ の対象全体
- 直既約射影 Λ 加群の同型類
- 単純 Λ 加群の同型類

ここで対応は, Λ の対象 x に対して, $P_x := \Lambda(-, x)$ という直既約射影 Λ 加群と, $S_x := \Lambda(-, x)/J_\Lambda(-, x)$ という単純加群を対応させることで与えられる.

同様の定理は [ASS, IV. 6] や [Au4, Corollary 2.5], [Au3, Proposition 2.3] などにも述べられてあり, 参照されたい. Λ の対象 x について, P_x が直既約射影的であることはよく, S_x が単純 Λ 加群の完全代表系になることは補題 3.10 より分かる. また $P_x \to S_x$ へ射影被覆があったことを考えると, 射影被覆の一意性より $S_x \cong S_y$ ならば $P_x \cong P_y$, ゆえに米田の補題より $x \cong y$ なことが従う.

よって示すべきは, 任意の直既約射影 Λ 加群 P が P_x の形をしていることである. これは P が有限生成ならば明らかであるが, 直既約射影加群が有限生成になるかはそれほど自明ではない. ここで通常の環の場合の証明と同様 ([AF]), Krull-Remak-Schmidt-Azumaya の定理 (先ほどの補題 3.16 の無限直和への拡張) を用いる.

補題 3.20. *Λ を局所圏, Λ 上の加群圏 $\mathsf{Mod}\,\Lambda$ において,*

$$\bigoplus_{i \in I} X_i \cong M \oplus N$$

の同型が存在したとする. このとき各 $i \in I$ について $\mathrm{End}_{\mathsf{Mod}\,\Lambda}(X_i)$ は局所環であり, M が直既約だったと仮定すれば, ある $j \in I$ が存在して, $M \cong X_j$ となる.

証明. 証明は環上の加群の場合と同じように証明できるので省略する. もう少し一般に Grothendieck 圏上での議論が [Po] などに載っているので参照されたい. □

定理 3.19 の証明. 任意の直既約射影 Λ 加群 P をとってくると, このときある集合 I により,

$$\bigoplus_{i\in I}\Lambda(-,x_i)\to P\to 0$$

の全射が必ず存在する. P が射影的なことから P は左の項の直和因子となる. また各 $\Lambda(-,x_i)$ の自己準同型環は $\mathrm{End}_\Lambda(x_i)$ と同型なので局所環であり, よって補題 3.20 により, P が直既約なことから, ある x_i により $P\cong\Lambda(-,x_i)$ となる. □

3.4. **局所圏上の直既約入射加群.** つぎに気になるのは直既約入射 Λ 加群がどのようなものであるかだが, これについては古典的にも半完全環という仮定のみでは決定できない. しかし, アルティン環上では単純加群の**入射包絡** *(injective envelope)* という形で記述できた. この結果を我々の文脈において拡張するため, 入射包絡についての基本的な性質を示そう.

定義 3.21. $\mathcal{C}$ 加群 M において, $f:M\to\mathrm{E}(M)$ という単射が**入射包絡** *(injective envelope)* であるとは, $\mathrm{E}(M)$ が入射的であり, 任意の $g:\mathrm{E}(M)\to N$ について gf が単射ならば g が単射となるときをいう.

注 3.22. 一般の環上の場合, 射影被覆は存在するとは限らないが, 入射包絡は必ず存在する. このことと同様にして, 前加法圏 $\mathcal{C}$ についても $\mathsf{Mod}\,\mathcal{C}$ では任意の $\mathcal{C}$ 加群について入射包絡が存在することが証明できる ([Po] や [St] 参照のこと).

このとき, 環上の加群の場合と同様に次がなりたつ.

補題 3.23. *$\mathcal{C}$ 加群 M を入射的とするとき, 以下は同値である.*
1. *M は直既約である.*
2. *M は 0 でない任意の部分対象の入射包絡となる.*
3. *M の任意の 2 つの 0 でない部分対象は 0 でない共通部分を持つ.*

証明. 加群の場合と同様であり, また容易に示されるので省略する ([AF] や [Ma] など). □

これを使い, 次のような自然な条件のもとでは直既約入射加群の記述ができることが分かる.

定理 3.24. *Λ を局所圏とし, 任意の Λ 加群が単純な部分対象を持つとする. このとき, 直既約入射加群の完全代表系が, 各 $x\in\Lambda$ について $\mathrm{E}(S_x)$, つまり x に対応する単純加群の入射包絡により与えられる. それゆえ, 定理 3.19 の集合とともに,*
- *直既約入射 Λ 加群の同型類*

にも全単射が存在する.

証明. まず単純対象 S の入射包絡 $\mathrm{E}(S)$ が直既約であることを示す. そのために, $\mathrm{E}(S)$ の任意の 0 でない部分対象 N をとると, S が単純より $S\cap N=0$ または $=S$ であるが, 前者を仮定すると S が $\mathrm{E}(S)$ の中で本質的なことより $N=0$ となってしまう. ゆえに $S\cap N=S$ つまり $S\le N$ となる. それゆえ補題 3.23 の (3)⇒(1) より $\mathrm{E}(S)$ は直既約となる.

次に, E を任意の直既約入射加群とすると, 定理の仮定よりかならず E は単純部分対象 S を含む. 従って補題 3.23 の (1)⇒(2) より, $E\cong\mathrm{E}(S)$ となる.

同型な加群の入射包絡は同型であるので, あとは単純対象 S,S' について $\mathrm{E}(S)\cong\mathrm{E}(S')$ のときに $S\cong S'$ を見ればよい. ところが $S=\mathrm{soc}\,\mathrm{E}(S)$ であることが容易に確認できるのでこれは明らかである. □

特に, 後に定義する右アルティンな局所圏などはこれを満たすことから直既約入射加群が決定できる. また後で定理 4.4 において見るように, 任意の右 Λ 加群が単純な部分対象を持つような局所圏 Λ は, **左完全** *(left perfect)* な局所圏の概念と同値である.

4. 完全な局所圏

右アルティン環上では任意の有限生成加群に射影被覆が存在するだけでなく, 有限生成とは限らない右加群についても射影被覆が存在することが分かる. このような環を古典的には**右完全環** *(right perfect ring)* と呼ぶ. このとき, 右アルティン環は右完全かつ左完全なことが知られている.

これに対応して, 任意の右 $\mathcal{C}$ 加群が射影被覆を持つ, という条件を前加法圏 $\mathcal{C}$ について考えることは自然であるが, このとき $\mathcal{C}$ はとくに先ほど定義した意味での半完全にはなっているので, 初めから扱いやすい局所圏上で考えても構わない. 本章での結果は実質的には原田氏の論文 [Ha] で述べられていることの, 我々の文脈での読み替えとなっている.

定義 4.1. Λ を局所圏とするとき, Λ が**右完全** *(right perfect)* であるとは, 任意の右 Λ 加群が射影被覆をもつことと定義する.

古典的な環論においても完全環の考察には Jacobson 根基についての考察が必要であるが, 局所圏でも同様なことが分かる. まず局所圏上では根基 $J_\Lambda(X,Y)$ は非同型な射からなることに注意されたい.

環論での場合, 右完全性は根基が**右 T-冪零**であるという条件である意味特徴づけれた ([AF]). 局所圏においてもこれにならい同様の概念を定義しよう.

定義 4.2. Λ を局所圏, I を Λ の両側イデアルとする.

(1) I が**左 T-冪零** *(left T-nilpotent)* であるとは, Λ における任意の次のような射の無限列

$$\cdots x_3 \xrightarrow{f_3} x_2 \xrightarrow{f_2} x_1 \xrightarrow{f_1} x_0$$

で各 f_i が I に属するようなものが与えられたとき, ある N が存在して $f_1 f_2 \cdots f_N = 0$ となることである.

(2) I が**右 T-冪零** *(right T-nilpotent)* であるとは, Λ における任意の次のような射の無限列

$$x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \xrightarrow{f_2} x_2 \xrightarrow{f_3} x_3 \cdots$$

で各 f_i が I に属するようなものが与えられたとき, ある N が存在して $f_N \cdots f_2 f_1 = 0$ となることである.

実は, 環の場合と同様に ([AF] など参照) 局所圏においては根基が右 T-冪零であることと右完全であることは同値であることをのちに示す. そのために必要ないくつかの根基についての性質を見よう. まず右 $\mathcal{C}$ 加群 M と $\mathcal{C}$ のイデアル I について, MI という右 $\mathcal{C}$ 加群を, $x \in \mathcal{C}$ について,

$$MI(x) := \sum_h \{\operatorname{Im} h \mid h \in I(x,y) \text{ for } y \in \mathcal{C}\}$$

により定義する.

補題 4.3. Λ を局所圏, J を Λ の根基とする. このとき次は同値である.

(1) 任意の 0 でない Λ 加群 M について, $MJ \neq M$.
(2) 任意の 0 でない Λ 加群 M について, MJ は M のなかで余剰的である.
(3) J は右 T-冪零である.

証明. (1)$\Leftrightarrow$(2) は通常の加群のイデアルを使った場合と何も変わらないので省略する.

(2)$\Rightarrow$(3) J が右 T-冪零でないとすると, 定義より

$$x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \xrightarrow{f_2} x_2 \xrightarrow{f_3} x_3 \cdots$$

なる非同型 $f_1, f_2, \cdots$ の無限列で, 任意の N に対して $f_N \cdots f_2 f_1 \neq 0$ なるようなものが存在する. このとき MJ が M のなかで余剰的とならないような $M \neq 0$ を以下のように具体的に構成する. まず M を

$$M := \bigoplus_{i=0}^{\infty} \Lambda(-, x_i)$$

という右 Λ 加群として定義する (もし x_i のうち同じ頂点が出てきたとしても無視して重複して直和する). この部分加群 $N_1, N_2, \cdots, N$ を, 次の式により定義する.

$$\begin{aligned} N_1(x) &:= \{(g_0, -f_1 g_0, 0, 0, \cdots) \mid g_0 \in \Lambda(x, x_0)\}, \\ N_2(x) &:= \{(0, g_1, -f_2 g_1, 0, \cdots) \mid g_1 \in \Lambda(x, x_1)\}, \\ N &:= \sum_{j=0}^{\infty} N_j. \end{aligned}$$

これらが M の部分 Λ 加群になってることが確認できる. このとき, $M = N + MJ$ を示す. 実際, $M(x_1) \ni (0, 1_{x_1}, 0, \cdots)$ より $f_1 \in J$ から $MJ(x_0) \ni (0, f_1, 0, \cdots)$, 一方 $N(x_0) \ni (1_{x_0}, -f_1, 0, \cdots)$. よって $(N + MJ)(x_0) \ni (1_{x_0}, 0, \cdots)$. これと同様に $(N + MJ)(x_i) \ni (0, \cdots, 1_{x_i}, 0, \cdots)$ が分かり, ここから容易に $M = N + MJ$ が従う. ゆえに MJ が M で余剰的なことより $N = M$ が分かる.

よって $M(x_0) = N(x_0)$ は $(1_{x_0}, 0, \cdots)$ を含むので,

$$(1_{x_0}, 0, \cdots) = (g_0, -f_1 g_0, 0, \cdots) + (0, g_1, -f_2 g_1, 0, \cdots) + \cdots + (0, \cdots, 0, g_{k-1}, -f_k g_{k-1}, 0, \cdots)$$

と書けることになる. よって成分を比較して, $f_k f_{k-1} \cdots f_1 = 0$ が計算でわかるが, これは f_i たちの取り方に矛盾する.

(3)⇒(1) $M \neq 0$ について $MJ = M$ と仮定する. このときある $x_0 \in \Lambda$ により $MJ(x_0) = M(x_0) \neq 0$ となる. ゆえに MJ の定義からある $f_1 : x_0 \to x_1$ という J の射が存在し, $M(f_1) : M(x_1) \to M(x_0)$ がゼロ射ではない. また $M(x_1) = MJ(x_1)$ なことを使うと同様に $M(f_2 f_1) = M(f_1)M(f_2)$ がゼロ射でない $f_2 : x_1 \to x_2$ を得る. これを繰り返すと明らかに J が右 T-冪零なことと矛盾する. □

この補題を使うと, 完全局所圏の根基の T-冪零性を用いた特徴付けができる.

定理 4.4. *Λ を局所圏, J をその根基とする. このとき以下は同値である.*

1. *Λ が右完全である.*
2. *J が右 T-冪零である.*
3. *任意の 0 でない左 Λ 加群が単純部分対象を含む (左右に注意されたい).*

証明. (1)⇒(2) 次に Λ が右完全だと仮定する. このとき補題 4.3 によれば, 任意の Λ 加群 M について $MJ = M$ ならば $M = 0$ となることを示せば良い. $M \neq 0$ と仮定する. まず仮定より M は射影被覆 $f : P \to M$ を持つが, $M \neq 0$ より当然 $P \neq 0$ である. ここで次に述べる補題 4.5 によって必ず P は極大部分加群 L を持つ. 一方 $\operatorname{Ker} f$ が P で余剰的なことから, $\operatorname{Ker} f \leq L$ が従う. ゆえに M は極大部分加群をもち, とくに単純加群への 0 でない全射が存在する. しかし $MJ = M$ であり, 単純加群は全て J の射で消されることを考えると, これは矛盾である.

(2)⇒(1) J が右 T-冪零なこと仮定する. このとき上の補題 4.3 より, 任意の右 Λ 加群 $M \neq 0$ について MJ は余剰的である, つまり射影 $M \to M/MJ$ は本質全射である. ここで M/MJ が半単純なことがわかれば, 局所圏上で半単純加群は射影被覆をもち, それを持ち上げたものが求める M への射影被覆であることがわかる. しかし M/MJ は Λ/J という局所圏上の加群だと見ることができ, 一方 Λ/J は射が各頂点に対して斜体分だけあり異なる頂点の間に射は 0 しかないような局所圏 (半単純圏とでもよむべきもの) であるので, その上の加群は全て半単純であることが容易にわかる.

(2)⇒(3) M を 0 でない任意の左 Λ 加群とする. まずこのとき, ある $x \in \Lambda$ と $a \in M(x)$ が存在して, 任意の非同型 f に対して $M(f)(a) = 0$ となることを示す. そうでないと仮定すれば, $M \neq 0$ より $M(x_0) \neq 0$ となる $x_0 \in \Lambda$ がとれる. $a_0 \in M(x_0)$ を 0 でない元とすれば, ある非同型 $f_0 : x_0 \to x_1$ が存在し $M(f_0)(a_0) \neq 0$ となる. $M(f_0)(a_0)$ について同じことを繰り返すと, 非同型の無限列 $f_0, f_1, \cdots$ であり, $M(f_0) \neq 0, M(f_1 f_0) \neq 0, M(f_2 f_1 f_0) \neq 0, \cdots$ となるようなものが存在し, これは J が右 T-冪零であることに反する. よって主張が示された. このときこの $a \in M(x)$ に米田の補題で対応する $\Lambda(x, -) \to M$ の像を S とすれば, S が M の単純部分対象であることが示される.

(3)⇒(2) 順序数を用いたやや技巧的な証明を要するが, 環論の場合において, left semi-artinian な環では根基が右 T-冪零であることに対応する証明と同様である ([St] など参照).

$$x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \xrightarrow{f_2} x_2 \xrightarrow{f_3} x_3 \cdots$$

というような Λ での射の無限列で, 各 f_i は根基に入る (非同型である) ものが存在すると仮定する. このとき, $M = \Lambda(x_0, -)$ という左 Λ 加群をとる. ここで各順序数 α につき, $\operatorname{soc}_\alpha(M)$ を次のように

定める:まず $\mathrm{soc}_1(M) = \mathrm{soc}(M)$ とし, $\alpha = \beta + 1$ のときは $\mathrm{soc}_\alpha(M)$ は $M/\mathrm{soc}_\beta(M)$ の socle に対応する M の部分対象, α が極限順序数のときは $\mathrm{soc}_\alpha(M) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{soc}_\beta(M)$ で定める. このとき任意のゼロでない左 Λ 加群が単純加群を含むことと, M の部分対象全体は集合をなすことから, ある順序数 α については $\mathrm{soc}_\alpha(M) = M$ となることに注意されたい.

ここで自然数 i に対し $\alpha(i)$ という順序数を, $f_i \cdots f_2 f_1 \in \mathrm{soc}_{\alpha(i)}(x_i)$ なる順序数のうち最小なものとして定義する. このとき $\alpha(1) > \alpha(2) > \alpha(3) > \cdots$ がなりたつ. 実際, まず各 $\alpha(i)$ は極限順序数ではないことが最小性より分かり, $\alpha(i) = \beta + 1$ とおけば, $\mathrm{soc}_{\alpha(i)}(M)/\mathrm{soc}_\beta(M)$ は半単純, よって J で消されるので $J\,\mathrm{soc}_\beta(M) \subset \mathrm{soc}_{\alpha(i)}(M)$, つまり $f_{i+1} f_i \cdots f_1 \in \mathrm{soc}_{\alpha(i)}(M)(x_{i+1})$ となるからである. よって順序数の狭義減少する無限列が構成できたので矛盾である.

□

上の証明のなかで次の補題を用いた. 証明は技巧的であるので原田氏の論文 [Ha] などを参照されたい.

補題 4.5 ([Ha, p.335, Corollary 1])**.** *Λ を小圏とするとき, 任意の 0 でない射影 Λ 加群はかならず極大部分加群を持つ.*

5. アルティン局所圏

アルティン環は環の表現論を考えるときの基本的なクラスであり, いろいろとよい性質を持つ. たとえば環 Λ が右アルティン環であることと, 有限生成右 Λ 加群が長さ有限であることは同値である. このことを一般化して, variety $\mathcal{C}$ 上の任意の有限生成加群が有限長となるような $\mathcal{C}$ はどのようなものがあるか, という問題が自然に生じるが, Auslander の論文 [Au3] ではこのことについて考察されている. これを本稿での文脈で考えるため, 今までと同様 variety に対しても右アルティンに相当する定義を考えよう.

定義 5.1. $\mathcal{C}$ を variety(もしくは局所圏) とするとき, $\mathcal{C}$ が右アルティンであるとは, 任意の有限生成右 $\mathcal{C}$ 加群の長さが有限であることと定義する.

まずここで通常の環の場合と同様に, 右アルティンならば半完全である.

命題 5.2. *$\mathcal{C}$ を右アルティンな variety とすると, $\mathcal{C}$ は半完全つまり Krull-Schmidt 圏となる.*

証明. 任意の有限生成 $\mathcal{C}$ 加群が射影被覆を持てばよいが, 有限生成 $\mathcal{C}$ 加群の長さが有限なことから射影被覆が存在することは通常と同じように示すことができる (有限生成射影加群からの全射を right minimal にとりなおせばよい, [ARS] など参照). □

この命題により, 以前と同じように初めから構造が見えやすい局所圏上での右アルティン性について考えれば十分なことが分かる. このとき Auslander による結果を本稿の言葉で読み直すと次のようになる.

定理 5.3 ([Au3, Proposition 1.11, Proposition 2.12])**.** *Λ を局所圏, J をその根基とする. このとき次は同値である.*

(1) *Λ は右アルティンである.*
(2) *任意の $x \in \Lambda$ について $\Lambda(-, x)$ は長さ有限な Λ 加群である.*
(3) *Λ は次の 2 つの条件を満たす*
   (i) *任意の単純 Λ 加群は有限表示される.*
   (ii) *任意の Λ 加群は単純な部分対象を含む.*
(4) *任意の $x \in \Lambda$ について, $\Lambda(y, x) \neq 0$ となる y は有限個しかなく, また $\sum_{y\in\Lambda} \ell_{R_y} \Lambda(y, x) < \infty$ となる. ここで $R_y = \mathrm{End}_\Lambda(y)$ であり, $\ell_R(X)$ により右 R 加群 X の加群としての長さを表す.*

系 5.4. *次のことがなりたつ.*

(1) *Λ を局所圏とし, 右アルティンだと仮定する. このとき Λ の任意の充満部分圏も右アルティン局所圏である.*
(2) *$\mathcal{C}$ を Krull-Schmidt 圏とし, $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ が右アルティンだと仮定する (これは $\mathcal{C}$ が右アルティンなことと同じことである). このとき, 任意の $\mathcal{C}$ の対象 C について, $\mathrm{End}_\mathcal{C}(C)$ は右アルティン環である. 左についても同様である.*

証明. (1) これは上の定理 5.3(4) を用いれば明らかである.

(2) 標準的な関手 $\mathcal{C}(C,-):\mathcal{C}\to\mathsf{Mod}\,\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(C)$ により誘導される圏同値 $\mathsf{add}\,C \xrightarrow{\sim} \mathsf{proj}\,\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(C)$ を考える. $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(C)$ が右アルティンであることは $\mathsf{proj}\,\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(C)$ が右アルティンであることと同値であり (両者の加群圏は一致する), よって $\mathsf{add}\,C$ が右アルティンならばよいが, これは $\mathsf{add}\,C$ に対応する対応する局所圏が $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ の充満部分圏なことから (1) より従う. □

この定理 5.3 の (4) は, Λ が右アルティンであるための具体的な数値条件を与えている.

これを用いると, アルティン性と完全性の次の関係が分かる.

定理 5.5. *Λ を右アルティン局所圏とすると, Λ は左完全である (右完全とは限らない).*

証明. 定理 4.4 より, Λ の根基が左 T-冪零なことを確かめれば良い.

$$\cdots x_3 \xrightarrow{f_3} x_2 \xrightarrow{f_2} x_1 \xrightarrow{f_1} x_0$$

のような, 各 f_i が根基に入るような射の無限列をとってきて, 任意の N に対して $f_1 f_2\cdots f_N\neq 0$ と仮定する. このとき, 先の定理 5.3 により, そもそも x_0 への非ゼロ射が存在するような Λ の対象 y は有限個しかないので, 上の列に現れる対象はそれらのなかのいずれかである. しかし系 5.4(または定理 5.3 の (4)) により R_y が右アルティン局所環なことが従うので, それぞれの根基は冪零である. y を動かすごとに R_y の根基の冪零指数を考えて, それの最大値をとると, 明らかに十分長く f_i を合成していけば, 必ず同じ頂点がその指数分繰り返されることになり, 0 になってしまう. □

ここで右と左の関係には注意されたい. また環の場合には右アルティンなら右完全でもあるが, 一般の対象が有限個と限らない局所圏上では右アルティンだが右完全でない例が存在する. 例えば,

$$x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow x_3\cdots$$

のような無限箙の path category を考えると, これは右アルティンであるが根基が右 T-冪零ではない.

6. 有限表現型との関係

ここでは主に [Au3] における局所圏上の有限的条件の有限表現型理論への応用を見るとともに, 環上の加群圏以外への一般化を考える.

Auslander は [Au3] において, アルティン環 Λ が有限表現型となる条件を考え, そのために $\mathsf{mod}\,\Lambda$ のもつ性質について調べた. Λ が有限表現型であるとは $\mathsf{ind}(\mathsf{mod}\,\Lambda)$ が有限個の対象からなる局所圏であることに他ならないが, 実はこれはもっと弱い右アルティンや, ある種の非同型射の冪零性と同値であることが彼の観察である. 彼の結果を本稿の文脈で考えると次のように記述できる.

定理 6.1 ([Au3, Theorem 3.1])**.** *$\mathcal{C}$ を次を満たすアーベル圏とする ((i) により Krull-Schmidt 圏となる).*

(i) $\mathcal{C}$ の任意の対象は長さ有限である.
(ii) $\mathcal{C}$ には非同型な単純対象が有限個しかない.

このとき以下は同値である.

(1) $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ は右アルティンである.
(2) $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ は左アルティンである.
(3) $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ の対象は有限個である.
(4) $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ は次の 2 つの条件を満たす.
  (a) $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ では右に無限に続く非同型な単射の無限列

$$C_0 \hookrightarrow C_1 \hookrightarrow C_2 \hookrightarrow C_3\cdots$$

  は存在しない.
  (b) $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ では左に無限に続く非同型な全射の無限列

$$\cdots C_3 \xrightarrow{f_3} C_2 \xrightarrow{f_2} C_1 \xrightarrow{f_1} C_0$$

  は存在しない.
(5) $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ の根基は左かつ右 T-冪零である.

証明. (1) から (4) の同値性は [Au3] に書かれている通りである. (5)⇒(4) は明らかであり, また (1),(2) を使うと定理 5.5 により (5) が従う. □

6.1. **局所有限表現型の局所圏.** 本稿では今まで, 有限次元多元環から Krull-Schmidt variety あるいは局所圏へと拡張する流れで進んでおり, すると次に右アルティン環 Λ だけでなく右アルティン局所圏 Λ について $\mathsf{ind}(\mathsf{mod}\,\Lambda)$ の構造を考えたいと思うのは自然であろう. すなわち定理 6.1 における $\mathcal{C}$ の条件 (ii) を外したものを考えたい. しかしこの条件だけでは (1) と (2) が同値ではないことが分かる.

例 6.2. 以前考えた

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots$$

のような無限箙の体 k 上の path category Λ を考えよう. このとき Λ は右アルティンであるが左アルティンではない. 有限生成右 Λ 加群のなす圏を $\mathsf{mod}\,\Lambda$ とすると, これは上の箙の矢印を反転させた箙上の有限次元表現の圏であり, (i) の条件を満たすアーベル圏であることが分かる. このとき, $\mathsf{ind}(\mathsf{mod}\,\Lambda)$ は右アルティンであるが左アルティンではない. なぜなら, まず左アルティンでないことは, 頂点 1 における単純表現 $S(1)$ について, $(S(1), M) \neq 0$ なる直既約表現 M は無数に存在する (実際どの頂点に対応する直既約射影加群も $S(1)$ を部分加群として含む) ことなどから分かる. しかし, M を直既約表現とすると, $(N, M) \neq 0$ なる直既約表現 N は同型をのぞき有限個しか存在せず, 右アルティンであることが分かる.

このため, $\mathcal{C}$ に (ii) に替わる何らかの条件を課すことを考える. まず次の観察をする.

命題 6.3. *$\mathcal{C}$ を定理 6.1 の条件 (i) を満たす (Krull-Schmidt) アーベル圏とする. このとき $\mathcal{C}$ の根基が左 T-冪零ならば $\mathcal{C}$ は enough projectives であり, 右 T-冪零ならば enough injectives である.*

証明. まず $\mathcal{C}$ が Krull-Schmidt であることから $J_{\mathcal{C}}(X, Y)$ は非同型写像全体と一致する. このことに注意して, $\mathcal{C}$ の任意の対象 X について X への射影対象からの全射を構成する. ここで X は直既約だと仮定して良い.

M という $\mathcal{C}$ の対象について,「射影対象から M への全射が存在する」という条件をみたすとき, M は性質 A を持つ, ということにする. X を直既約な対象で性質 A を持たないと仮定して矛盾を導く.

まず特に X は射影的ではない. よって射影的の定義より, $f : M \to X \to 0$ という分裂しない全射が存在する. このような M のうち, 長さが最小のものを初めから選んでおく. すると, f を M の真の部分対象に制限した結果は全射にならない (なってしまったらそれも分裂しない全射となり, 長さの最小性に反する). ここで M を直既約分解して $f_1 = [f_{11}, \cdots, f_{1t}] : M_1 \oplus \cdots \oplus M_t \to X$ としておく. 各 f_i は非同型つまり根基に入る.

このとき, もし $M_1, \cdots, M_t$ が全て性質 A を持つとすれば, 明らかに X も性質 A を持つので矛盾である. ゆえに M_1 が性質 A を持たないとする. 従って上の議論を繰り返すと, $f_2 = [f_{21}, \cdots, f_{2s}] : N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s \to M_1$ という各 N_i は直既約な, 分裂しない全射が作れる (N の長さは最小にとっておく). ここでもし $f_{11} f_{2i} = 0$ なる i が存在したとすれば, f_2 を N_i 以外の直和因子へ制限すると, その像は M_1 の真の部分対象となる (長さの最小性より). 一方その部分対象と M_1 以外の直和因子へ f_1 を制限することを考えると, これは $f_{11} f_{2i} = 0$ なことより全射となる. しかしこれは f を M の真の部分対象に制限しても全射になったことを意味し, 矛盾する. ゆえに全ての i について $f_{11} f_{2i} \neq 0$ である.

このとき, また同じく $N_1, \cdots, N_s$ が全て性質 A を持てば, M_1 が性質 A を持つことになり矛盾する. このように繰り返していくことで, $f_{11} f_{21} f_{31} \cdots$ なる直既約加群の間の非同型写像の左に続く無限列で, どこまで合成しても 0 にならないようなものが存在する. これは根基が左 T-冪零なことと矛盾する.

以上より X は性質 A を持つ, つまり射影対象からの全射が存在することが示された.

enough injectives の方も同様である. □

これの簡単な系として次が分かる.

系 6.4. *$\mathcal{C}$ を定理 6.1 の同値な条件を満たすアーベル圏とすると, $\mathcal{C}$ では任意の対象に射影被覆と入射包絡が存在し, かつある有限表現型の両側アルティン環 Λ による有限生成加群の圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ と $\mathcal{C}$ は圏同値となる.*

証明. 射影被覆や入射包絡の存在は, $\mathcal{C}$ で任意の対象の長さが有限なことと enough projectives かつ enough injectives なことを使えば通常の場合と同様に分かる (射影対象からの全射を右極小にとりかえればよい).

また, 直既約射影対象で非同型なものを全て直和した対象を P とする ($\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ が有限集合より P は $\mathcal{C}$ の対象である). Λ をその自己準同型環 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(P)$ とし, 標準的な関手 $\mathcal{C}(P,-) : \mathcal{C} \to \mathsf{Mod}\,\Lambda$ を考える. このとき, 任意の $\mathcal{C}$ の対象は $\mathsf{add}\,P$ における有限表示を持つことが分かる. なぜなら, $\mathcal{C}$ は Krull-Schmidt 圏なことから, 任意の射影対象は直既約射影対象の有限直和, ゆえに $\mathsf{add}\,P$ に入るからである. このことからこの関手は $\mathcal{C} \to \mathsf{mod}\,\Lambda$ への圏同値を与えることが容易に分かる. また系 5.4 により Λ は両側アルティン環である. □

つまり定理 6.1 において想定している $\mathcal{C}$ は実際にはアルティン環上の加群圏となることが分かる. また, 定理 6.1 の (5) を入れた拡張を $\mathcal{C}$ の単純対象が無限個ある場合にしようとすれば, さきの命題 6.3 により, $\mathcal{C}$ は必ず enough projectives かつ enough injectives になることが分かった. 例 6.2 においては, $\mathsf{mod}\,\Lambda$ は enough injectives ではないことから定理 6.1 の類似が成り立たなかったと見ることができる.

よって, $\mathcal{C}$ に enough projectives や enough injectives という条件を課してて考察する. まずこの $\mathcal{C}$ は局所圏上の有限生成加群の圏となることを示そう.

定理 6.5. *$\mathcal{C}$ を, 任意の対象の長さが有限であるようなアーベル圏であり, enough projectives と仮定する. このとき $\mathcal{C}$ では任意の対象に射影被覆が存在し, かつある局所圏 Λ による有限表示 Λ 加群の圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ と $\mathcal{C}$ は圏同値となる.*

証明. Λ を, $\mathcal{C}$ における直既約射影対象の同型類の完全代表系からなる $\mathcal{C}$ の充満部分圏とする. このとき Λ は局所圏になる. 関手 $F : \mathcal{C} \to \mathsf{Mod}(\Lambda)$ を, $C \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}(-, C) : \Lambda^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}b$ を対応させることにより得るが, この対応のもとまず $\mathcal{C}$ の射影対象のなす圏と $\mathsf{Mod}\,\Lambda$ の有限生成射影対象のなす圏が同値なことが分かり, F が完全 (exact) 関手になることに注意すると, $\mathcal{C}$ と $\mathsf{mod}\,\Lambda$(有限表示される Λ 加群の圏) の圏同値が誘導される. □

定理 6.6. *$\mathcal{C}$ を, 任意の対象の長さが有限であるようなアーベル圏とする. このとき以下は同値である.*

(1) $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ は右かつ左アルティンである.
(2) 各単純対象 S に対して, S を組成因子に持つような $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ の対象は有限個しかない.
(3) 各単純対象 S に対して, S を組成因子に持つような $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ の対象の長さには上限が存在する.
(4) $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ は次の 2 つの条件を満たす.
 (a) $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ では右に無限に続く非同型な単射の無限列
$$C_0 \hookrightarrow C_1 \hookrightarrow C_2 \hookrightarrow C_3 \cdots$$
 は存在しない.
 (b) $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ では左に無限に続く非同型な全射の無限列
$$\cdots C_3 \xrightarrow{f_3} C_2 \xrightarrow{f_2} C_1 \xrightarrow{f_1} C_0$$
 は存在しない.
(5) $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ の根基は左かつ右 T-冪零である.
(6) $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ は右アルティンでありかつ $\mathcal{C}$ は enough injectives である.
(7) $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ は左アルティンでありかつ $\mathcal{C}$ は enough projectives である.
(8) $J^{\infty} = 0$ であり, $\mathcal{C}$ は enough projectives かつ enough injectives である.

証明. (1)⇒(2) $\mathcal{C}$ の単純対象 S をとると, $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ が右アルティンなことから $\mathcal{C}(-, S)$ は長さ有限, ゆえに $\mathcal{C}(N, S) \neq 0$ なる $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ の対象 N は有限個しかない. これらを $N_1, \cdots, N_t$ とおくと, 各 N_i は長さ有限より単純対象 S_i を含む. ゆえに $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ が左アルティンなことから $\mathcal{C}(S_i, -)$ も長さ有限である. ゆえに各 S_i について $\mathcal{C}(S_i, M) \neq 0$ なる $M \in \mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ は有限個しかない. これらを各 i ごとに全て集めたものを $M_1, \cdots, M_s$ とする.

このとき, S を組成因子に含む直既約対象は $M_1, \cdots, M_s$ のどれかと同型となる. なぜならば, M が S を組成因子に持つとすれば, かならず $K \leq N$ なる M の部分対象で, N/K が S と同型となるものが存在する. この N が直既約でないならば, N を直既約分解してやることで, S を組成因子に含む

N の直既約部分加群が存在し, 同じ議論を繰り返すことでいつかは S への全射が存在する直既約な M の部分対象に到達する. ゆえに N を初めから直既約としてよい. このとき $\mathcal{C}(N,S) \neq 0$ であるので, ある N_i により $N \cong N_i$ となる. よって N は S_i を部分対象として持つので M も S_i を部分対象として持ち, 従って $\mathcal{C}(S_i, M) \neq 0$ である. 以上のことから M は $M_1, \cdots, M_s$ のどれかと同型になる.

(2)⇒(3) 自明である.

(3)⇒(4) (a) のような単射の非同型な無限列が存在したとする. まず C_0 の長さは有限なことより C_0 は単純対象 S を含むが, (a) の無限列を考えると, 各 C_i は S を部分対象として含む. ゆえに (3) からそのような C_i たちの長さには上限が存在するが, (a) における各射は単射かつ非同型であるので各対象の長さは狭義に増加してゆき, 矛盾である. (b) も同様である.

(4)⇒(1) Auslander による証明 [Au3, Theorem 3.1] と同様である. 概要を述べると, まず (a) の条件から任意の単純右 $\mathcal{C}$ 加群が有限表示されることが従い, (b) の条件から任意の右 $\mathcal{C}$ 加群が単純加群を含むことが示される. ゆえに定理 5.3 により $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ は右アルティンである. また $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を考えるとこれも (4) と同じ条件を満たすので, $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ が右アルティン, ゆえに $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ が左アルティンであることが従う.

(1) から (4) と (5) が同値なことは定理 6.1 における証明と同様である. 以上より (1) から (5) の条件が同値なことが分かった. よってとくに (5) を満たせば定理 6.3 により $\mathcal{C}$ が enough projectives かつ enough injectives なことが従う.

(6)⇒(2) (1)⇒(2) の証明を考えると, $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ が左アルティンであることを仮定する代わりに, 各単純対象 S について $\mathcal{C}(S,M) \neq 0$ となる $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ の対象 M の個数が有限個であれば十分である. $\mathcal{C}(S,M) \neq 0$ と仮定すると, S が単純なことより M は S を部分対象として含む. いま $\mathcal{C}$ が enough injectives より, $0 \to S \to I$ なる入射対象 I への単射が存在するが, 入射性よりこれは $M \to I$ に拡張される. これはゼロ写像ではありえないので, $\mathcal{C}(M,I) \neq 0$ となり, よって $\mathcal{C}(-,I)$ が長さ有限なことからこのような M は有限個しか存在しないことが分かる.

(7)⇒(2) これも $\mathcal{C}$ が enough projectives なことを使えば同様である.

(1)⇒(8) $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ の対象 X, Y について, $J^\infty(X,Y)$ を考える. まず $\mathcal{C}(-,Y)$ が長さ有限なことから, そもそも $\mathcal{C}(M,Y) \neq 0$ なる $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ の対象は有限個しか存在しない. また各 M の自己準同型環はアルティンであることから根基は冪零である. これを利用して, ある自然数 N が存在して, $J^N(-,Y) = 0$ となることが分かる. よってとくに $J^\infty(X,Y) = 0$ である.

(8)⇒(4) まず (a) のような非同型な単射の無限列が存在したと仮定する. 今 $\mathcal{C}$ は enough injectives であるので, ある $f : C_0 \to I$ なる入射対象への埋め込みが存在する. ここで I が入射的なことをつかうと, この f は $C_1, C_2, \cdots$ に対して無限に拡張することができる. よって $f \in J^\infty(C_0, I)$ となり, $f = 0$ が従い矛盾である.

(b) についても同様に $\mathcal{C}$ が enough projectives なことを用いて証明される. □

この定理における (2) の条件を見てみると, これはアルティン環 Λ が有限表現型であることに対応するような条件になっていることが分かる. そもそも局所圏 Λ で考えた場合一般に単純加群の同型類でさえ有限個とはならないが, (2) の条件は, 各 Λ の頂点に注目した場合, そこで局所的に有限表現型となっていることを意味する. このような考えのもとで [BG] などにならい次の用語を導入しよう.

定義 6.7. 右アルティン局所圏 Λ が**局所有限表現型** *(locally representation-finite)* であるとは, Λ の各対象 x について, $M(x) \neq 0$ なる有限生成直既約右 Λ 加群が同型をのぞいて有限個であるときをいう. Λ が局所有限表現型であることは, 定理 6.6 における (2) の条件を $\mathcal{C} = \mathsf{mod}\,\Lambda$ が満たすことと同値である.

注 6.8. この定理 6.6 において, (3) の条件は通常の環の場合には, 「直既約加群の長さに上限が存在するならば有限表現型である」という First Brauer-Thrall Conjecture に対応する. しかし $\mathcal{C}$ の単純対象が有限個という仮定を排除すると, 局所有限表現型であるが直既約対象全体の長さには上限がないものが存在することが分かる. 簡単な例として, $A_1, A_2, \cdots$ 型の箙をすべて disjoint union をとった無限箙の表現圏などはそれにあたる.

系 6.9. *$\mathcal{C}$ をアーベル圏とすると, 次は同値である.*

(1) *ある局所有限表現型の右アルティン局所圏 Λ が存在し, $\mathcal{C}$ は Λ 上有限生成右加群のなすアーベル圏と同値になる.*
(2) *$\mathcal{C}$ の任意の対象の長さは有限であり, 定理 6.6 の同値な条件のどれかを満たす.*

証明. (2)⇒(1) のみ示せば良い. $\mathcal{C}$ は enough projectives であるので, Λ を直既約射影対象からなる $\mathsf{ind}\mathcal{C}$ の充満部分圏とすると, $\mathcal{C}$ は有限生成 Λ 加群の圏と圏同値になることはすでに見た (定理 6.5). このとき $\mathsf{ind}\mathcal{C}$ が右アルティンであるから系 5.4 より Λ も右アルティンである. □

系 6.10. Λ を右アルティン局所圏で, 局所有限表現型であると仮定する. このとき Λ は次の性質を持つ.

(1) Λ は両側アルティン局所圏である.
(2) 有限生成 Λ 加群の圏において, 射影被覆と入射包絡が存在する. 特に直既約入射加群は有限生成となる.
(3) 定理 *6.6* の同値な条件を全て満たす.

証明. (1) 以外は明らかである. (1) も, Λ は $\mathsf{ind}(\mathsf{mod}\,\Lambda)$ のなかにおいて射影的なものからなる充満部分圏だと見ることができ, 今 $\mathsf{ind}(\mathsf{mod}\,\Lambda)$ が左アルティンであるので, 系 5.4 を用いれば Λ が左アルティンであることが従う. □

注 6.11. 与えられたアルティン局所圏 Λ に対して $\mathsf{ind}(\mathsf{mod}\,\Lambda)$ という別の局所圏を対応させる操作が一般に考えられるが, 以上の結果により, Λ が局所有限表現型であることは, Λ に対応する $\mathsf{ind}(\mathsf{mod}\,\Lambda)$ がまたアルティン局所圏となることと同値であることが分かる.

6.2. **locally bounded k-圏.** 以下では, 一般のアルティン環から有限次元多元環に限定して考えたように, 一般のアルティン局所圏のレベルから体 k 上のアルティン局所圏について言えることを考えたい. また以下の結果は体でなく可換アルティン環 R 上のアルティン局所圏についても容易に拡張できることに注意されたい.

まず体上で考えた場合, アルティン局所圏は簡単に言い換えることができる.

命題 6.12. Λ を体 k 上の局所圏 *(*つまり射の空間がベクトル空間かつ合成が双線型*)*, かつ任意の *2* つの対象の間の射の空間が有限次元だと仮定する. このとき Λ が両側アルティン局所圏であることは, 任意の $x \in \Lambda$ について,

$$\sum_{y\in\Lambda} \dim_k \Lambda(y,x) < \infty,$$
$$\sum_{y\in\Lambda} \dim_k \Lambda(x,y) < \infty,$$

が成り立つことと同値である.

証明. 定理 5.3 により直ちに従う. □

射の空間が有限次元であるような体上のアルティン局所圏は, よって [BG] などで呼ばれている, *locally bounded* k-圏と呼ばれている概念と同じである. 体上で考える大きな利点は, ベクトル空間としての双対を取ることで $D : (\Lambda^{\mathrm{op}}, \mathsf{mod}\,k) \to (\Lambda, \mathsf{mod}\,k)$ の反変同値が存在することである. よって例えば $x \in \Lambda$ における単純加群の入射包絡は, $D\Lambda(x, -)$ と記述することができる.

また, 有限表示される Λ 加群とはこの場合各頂点ごとの表現の次元の和が有限なるもの, また有限生成加群と一致し, ゆえに D は双対 $\mathsf{mod}\,\Lambda \to \mathsf{mod}(\Lambda^{\mathrm{op}})$ に制限される. よってこれを利用し, Auslander の dualizing k-variety の議論を使えば ([ARe1] 参照), 単純 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ 加群が有限表示されることが従う. つまり定理 6.6 における (3) の (a) の条件などが不要なことが分かる.

定理 6.6 をこの状況で考えると次のようになる.

定理 6.13. Λ を *locally bounded* k-圏, $\mathcal{C} = \mathsf{mod}\,\Lambda$ を有限生成右 Λ 加群のなすアーベル圏とする. このとき以下は同値である.

(1) $\mathsf{ind}\mathcal{C}$ は右アルティンである.
(2) $\mathsf{ind}\mathcal{C}$ は左アルティンである.
(3) Λ は局所有限表現型である.
(4) 各 $x \in \Lambda$ について, $M(x) \neq 0$ となる $\mathcal{C}$ の直既約対象 M の長さには上限が存在する.
(5) $\mathsf{ind}\mathcal{C}$ では左に無限に続く非同型な全射の無限列

$$\cdots C_3 \xrightarrow{f_3} C_2 \xrightarrow{f_2} C_1 \xrightarrow{f_1} C_0$$

は存在しない.

(6) $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ では右に無限に続く非同型な単射の無限列

$$C_0 \hookrightarrow C_1 \hookrightarrow C_2 \hookrightarrow C_3 \cdots$$

は存在しない.

(7) $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ の根基は左 T-冪零である.

(8) $\mathsf{ind}\,\mathcal{C}$ の根基は右 T-冪零である.

(9) $J^\infty = 0$ である.

とくにこのとき, Λ が局所有限表現型であることと $\mathsf{ind}(\mathsf{mod}\,\Lambda)$ が *locally bounded* k-圏となることが同値であることが *(1),(2)* より従う.

証明. まず今 $\mathcal{C}$ は enough projectives かつ enough injectives であるので, (1),(2),(3),(4),(9) の同値は定理 6.6 より従う. (1)⇒(7) は右アルティンならば根基が左 T-冪零なことから従い, (7)⇒(5) は自明である.

(5)⇒(1) も, まず今単純 $\mathcal{C}$ 加群は有限表示されることがわかっており (この定理の前の議論を参照), ゆえにあとは定理 5.3 により, 任意の $\mathcal{C}$ 加群が単純加群を持てばよいが, これは (5) の条件から示されることが分かる ([Au3, Thehorem 3.1] と同じである).

また (6),(8) については, Λ が局所有限表現型であることと Λ^{op} が局所有限表現型であることは同値である (D が 2 つの加群圏の間の双対を与えるので) ことに注意すれば, Λ^{op} について同じ議論をすれば (3) と同値であることが分かる. □

参考文献

[AF] F. W. Anderson and K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, 2nd. edition, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1992.

[ARe1] M. Auslander and I. Reiten, Stable equivalence of dualizing R-varieties, *Advances Math.* **12** (1974), 306–366.

[ARS] M. Auslander, I. Reiten and S. O. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[ASS] I. Assem, D. Simson and A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras 1: Techniques of Representation Theory.* London Mathematical Society Student Texts 65, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[Au1] M. Auslander, Coherent functors. In *Proceedings Conference Categorical Algebra (La Jolla)*. Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1966, 189–231.

[Au2] M. Auslander, Representation theory of artin algebras. I, *Comm. Algebra* **1** (1974), 177–268.

[Au3] M. Auslander, Representation theory of artin algebras. II, *Comm. Algebra* **1** (1974), 269–310.

[Au4] M. Auslander, A functorial approach to representation theory. *Lect. Notes Math.* 944 (1982), 105-179.

[Ba] R. Bautista, Irreducible morphisms and the radical of a category, *An. Inst. Mat. Nac. Autónoma México*, *22* (1982), 83–135.

[BG] K. Bongartz and P. Gabriel, Covering spaces in representation-theory, *Invent. Math.* **65** (1982), no. 3, 331–378.

[Ga] P. Gabriel, The universal cover of a representationfinite algebra, in Lecture Notes in Math. No. 903, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1982, pp. 68-105.

[GR] P. Gabriel and A. V. Roiter, *Representations of finite-dimensional algebras*, translated from the Russian, reprint of the 1992 English translation, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1997.

[Ha] M. Harada, Perfect categories I, *Osaka J. Math.* **10** (1973), 329-341.

[Ke] G. M. Kelly, On the radical of a category, *J. Austral. Math. Soc.* **4** (1964), 299–307.

[Kr] H. Krause, *Krull-Schmidt categories and projective covers*, arXiv:1410.2822.

[Ma] E. Matlis, Injective modules over Noetherian rings, *Pacific J. Math. 8* (1958), 511-528.

[Po] N. Popescu, *Abelian categories with applications to rings and modules*, London Mathematical Society Monographs, No. 3, Academic Press, London-New York, 1973, xii+467 pp.

[St] B. Stenström, *Rings of quotients* , Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 217, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1975).