完全圏の表現論的実現について

榎本悠久

1. 導入

以下本稿を通して、基礎体 k を固定する。また多元環といったら k 上有限次元なものとし、多元環 Λ に対して $\mathsf{mod}\,\Lambda$ で有限生成右 Λ 加群のなす圏とする。また簡単のため圏 $\mathcal{E}$ といったとき、以下の仮定をする。

(1) 体 k を固定し、$\mathcal{E}$ は加法的 k 圏で k 上 Hom 有限 ($\mathcal{E}(X,Y)$ が全て有限次元 k ベクトル空間) かつ skeletally small(対象の同型類が集合をなす) とする。
(2) 圏 $\mathcal{E}$ は**冪等元完備**、つまり $e : X \to X$ という $\mathcal{E}$ での射が $e^2 = e$ を満たすならば、それは $\left[\begin{smallmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] : A \oplus B \to A \oplus B$ という射と 2 項複体として同型になるとする。

これらの仮定をはずした上での結果は [En1] を見よ。また部分圏といったら、充満部分圏で同型と有限直和・直和因子について閉じることを仮定する。よって例えば、$\mathsf{mod}\,\Lambda$ の部分圏は全て上の仮定を満たす。

本稿の主題は「完全圏の森田型定理」であるが、念頭にあるのは以下の古典的な森田の定理 (の変種のひとつ) である:

定理 1.1. 圏 $\mathcal{E}$ について以下は同値である。

(1) ある多元環 Λ について $\mathcal{E}$ は $\mathsf{mod}\,\Lambda$ と圏同値となる。
(2) $\mathcal{E}$ はアーベル圏であり、射影生成子 P と入射余生成子を持つ。

証明は、(2) から (1) は $\Lambda := \mathrm{End}_{\mathcal{E}}(P)$ として $\mathcal{E}(P,-) : \mathcal{E} \to \mathsf{mod}\,\Lambda$ が圏同値を導くことを示せばよい。

これを念頭に、本稿の目的は次の 2 つの関係を明らかにすることである:

(1) 完全圏 $\mathcal{E}$ が、加群圏の内部でどう実現されているか ($\mathcal{E} \simeq \mathsf{mod}\,\Lambda, \mathsf{CM}\,\Lambda$ や $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の resolving 部分圏など)
(2) 完全圏 $\mathcal{E}$ がどのような圏論的性質を持つか (射影生成子・入射余生成子や核を持つかなど)。

つまり **(1)** $\mathcal{E}$ **の表現論的実現**と、**(2)**$\mathcal{E}$ **の圏論的性質**との関わりを探るというものである。具体的に本稿では、(1) として

- $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の resolving 部分圏
- 若松傾加群 W について X_W の resolving-coresolving 部分圏
- 余傾加群 U について Ext 直交圏 ${}^{\perp}U$
- 岩永-Gorenstein 環 Λ について $\mathsf{CM}\,\Lambda := {}^{\perp}\Lambda$

の場合について、[En1](と一部 [En2]) にもとづき紹介する。

2. 射影生成子 — RESOLVING 部分圏

$(\mathcal{E}, F)$ が**完全圏**であるとは、$\mathcal{E}$ は圏、F は $\mathcal{E}$ 内の核-余核対の集合であり、F がある条件をみたすものをいう。このとき F 内の短完全列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ を**許容短完全列**、$L \to M$ を**許容単射**、$M \to N$ を**許容全射**と呼ぶ。また単に $\mathcal{E}$ を完全圏とも呼ぶ。完全圏について詳しくは [Bü] を見よ。

例 2.1. アーベル圏 (より一般に完全圏) の拡大で閉じた部分圏は、許容短完全列としてアーベル圏内部の短完全列でありすべての項がその部分圏に属するものをすべて取ることで完全圏となる。以下何も言わなければ拡大で閉じた部分圏にはこの自然な完全構造が入っているものとする。

多くの完全圏は射影生成子を持つ。まずはこの場合の森田型定理を述べる。

定義 2.2. $\mathcal{E}$ を完全圏、P を $\mathcal{E}$ の対象とする。

- P が**射影的**とは、任意の許容全射 $M \twoheadrightarrow N$ に対して $\mathcal{E}(P, M) \to \mathcal{E}(P, N)$ が全射のときをいう。
- P が**射影生成子**であるとは、P が射影的かつ、任意の $\mathcal{E}$ の対象が P の有限直和からの許容全射をもつときをいう。

以上は完全圏の圏論的性質であるが、対応して加群圏側での次の性質を考える。

定義 2.3. 多元環 Λ について、部分圏 $\mathcal{E} \subset \mathsf{mod}\,\Lambda$ が ***resolving* 部分圏**であるとは、以下の条件を満たすときをいう。

(1) $0 \to L \to M \to N \to 0$ という $\mathsf{mod}\,\Lambda$ での短完全列について、L と N が $\mathcal{E}$ に属するとき M も属する (拡大で閉じている)。
(2) $0 \to L \to M \to N \to 0$ という $\mathsf{mod}\,\Lambda$ での短完全列について、M と N が $\mathcal{E}$ に属するとき L も属する。
(3) 射影的 Λ 加群は全て $\mathcal{E}$ に属する。

注 2.4. $\mathcal{E}$ が直和因子で閉じていることを仮定しているので、resolving 部分圏の定義の (2) は次に置き換えられる。

($2'$) $\mathcal{E}$ の対象 N に対して、射影加群から N への全射の核は $\mathcal{E}$ に属する (syzygy で閉じている)

例 2.5. 多元環 Λ 上の加群 U に対して、${}^{\perp}U$ で $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{>0}(X, U) = 0$ なる X からなる部分圏を指す。このとき ${}^{\perp}U$ は $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の中で resolving である。

完全圏の最初の森田型定理は次で与えられる。

命題 2.6 (= [En1, Proposition 2.8])**.** 完全圏 $\mathcal{E}$ について次は同値である。

(1) $\mathcal{E}$ はある多元環 Λ の加群圏のある *resolving* 部分圏と完全圏として同値である。
(2) $\mathcal{E}$ は射影生成子 P を持つ。

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2): 射影生成子として Λ を取ればよい。

(2) $\Rightarrow$ (1): $\Lambda := \mathrm{End}_{\mathcal{E}}(P)$ とし、$\mathbb{P} := \mathcal{E}(P, -) : \mathcal{E} \to \mathsf{mod}\,\Lambda$ を考えると、これが忠実充満なことはすぐに分かる。その像 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ は射影加群をすべて含むことが容易に分かり、拡大で閉じていることも確認できる。また P が射影生成子であることから $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ が syzygy で閉じることもすぐ分かる。 $\square$

つまり、**射影生成子を持つ完全圏を考えることと、加群圏の *resolving* 部分圏を考えることは同じ**である。

3. +入射余生成子 — 若松傾加群

完全圏に対して**入射余生成子**は射影生成子の双対で定義する。完全圏 $\mathcal{E}$ が射影生成子 P と入射余生成子 I を持つとき、命題 2.6 の証明での埋め込み $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to \mathsf{mod}\,\Lambda$ において I の像 $\mathbb{P}(I)$ は特別な性質を持っていると予想される。それが**若松傾加群**である。

多元環 Λ 上の加群 W が自己直交的である、つまり $\mathrm{Ext}_\Lambda^{>0}(W,W)=0$ を満たすとする。このとき X_W という $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の部分圏を、$X \in {}^\perp W$ であり、

$$0 \to X \to W^{a_0} \xrightarrow{f^1} W^{a_1} \xrightarrow{f^2} W^{a_2} \to \cdots .$$

で $\mathrm{Im}\, f^i \in {}^\perp W$ のような完全列が取れる X からなる部分圏とする。つまり W が入射余生成子として振る舞うような加群からなる圏である。

定義 3.1. 加群 W を自己直交的な Λ 加群とする。このとき W が**若松傾加群**とは、$\Lambda \in \mathsf{X}_W$ なるときをいう。

例 3.2. 後に述べる傾加群や余傾加群はともに若松傾加群である。また Λ_Λ は必ず若松傾となり、X_Λ に属する加群は *Gorenstein*-**射影的**とも呼ばれ、この圏は Frobenius 圏となる。

次は若松傾加群に対する X_W の基本性質である。

命題 3.3 (= [En1, Proposition 3.2])**.** 若松傾加群 W に対して X_W は $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の *resolving* 部分圏となり、射影生成子 Λ と入射余生成子 W を持つ。

つまり若松傾加群があると、射影生成子と入射余生成子を持つ完全圏が自然に一つ定まる。そこで次の森田型定理がなりたつ。

定理 3.4 (= [En1, Theorem 3.3])**.** 完全圏 $\mathcal{E}$ について次は同値である。

(1) ある多元環 Λ と若松傾 Λ 加群 W に対して、$\mathcal{E}$ は X_W のある *resolving-coresolving* 部分圏と完全圏同値である。
(2) $\mathcal{E}$ は射影生成子 P と入射余生成子 I を持つ。

Proof. 細かい議論は省略する。(1) から (2) が従うことは既に見た。(2) から (1) は、命題 2.6 における埋め込み $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to \mathsf{mod}\,\Lambda$ において $\mathbb{P}(I)$ が若松傾 Λ 加群なことが分かり従う。 □

これは射影生成子と入射余生成子を持つ完全圏を考えることが、若松傾加群を考えることと密接に関わることを意味する。

4. 高次核 — 余傾加群

次は、**余傾加群**という表現論でよく用いられる加群と、完全圏との関わりを調べる。余傾加群とは (射影次元を 1 に限定しない) 傾加群の k-dual のことである。

定義 4.1. 多元環 Λ 上の加群 U が n **余傾加群** (cotilting module) であるとは、U が次の条件を満たすときをいう。

(C1) U は自己直交的である、つまり $\mathrm{Ext}_\Lambda^{>0}(U,U)=0$ となる。
(C2) U は入射次元が n 以下である。
(C3) 標準的な k-dual を D とすると、次のような完全列が取れる。

$$0 \to U_n \to \cdots \to U_1 \to U_0 \to D\Lambda \to 0$$

ここで U_i は U の有限直和の直和因子である。

例 4.2. Λ は必ず若松傾加群であったが、余傾加群とは限らない。Λ が余傾加群になることと Λ が**岩永**-*Gorenstein* となること、つまり $\mathsf{id}(\Lambda_\Lambda), \mathsf{id}({}_\Lambda\Lambda)$ が有限となることは同値であることが上の (C2),(C3) からすぐ分かる。また $D\Lambda$ は 0 余傾加群であり、逆に 0 余傾加群は (直和因子を除いて)$D\Lambda$ に他ならないことが分かる。

余傾加群の定義について次の事実が有用である。

補題 4.3. Λ 加群 U が余傾加群であることと、(U1),(U2) と次を満たすことが同値である:

(C3$'$) ${}^{\perp}U$ が完全圏として入射余生成子 U を持つ、つまり ${}^{\perp}U = \mathsf{X}_U$ がなりたつ。

系 4.4. *余傾加群 U は若松傾加群であり、${}^{\perp}U$ は射影生成子 Λ と入射余生成子 U を持つ完全圏 $(\mathsf{mod}\,\Lambda$ の resolving 部分圏$)$ となる。*

実は余傾加群 U に対する完全圏 ${}^{\perp}U$ はとてもシンプルに特徴づけることができる。そのため**高次核**の概念を導入する。

定義 4.5. 1 以上の自然数 n をとる。圏 $\mathcal{E}$ 内の射 $M \to N$ について、その **n 核**とは、$\mathcal{E}$ 内の複体

$$0 \to K_n \to \cdots \to K_1 \to M \to N$$

であり、誘導される関手の列

$$0 \to \mathcal{E}(-, K_n) \to \cdots \to \mathcal{E}(-, K_1) \to \mathcal{E}(-, M) \to \mathcal{E}(-, N)$$

が完全になるときをいう。また $\mathcal{E}$ 内の任意の射が n 核を持つとき **$\mathcal{E}$ は n 核を持つ**と呼ぶ。

高次核の概念は、$\mathcal{E}$ 上の関手圏の言葉を用いると、$n \geq 1$ のときは「$\mathcal{E}$ が n 核を持つこと」と「任意の有限表示 $\mathcal{E}$ 加群が射影次元 $n+1$ 以下である」ことが同値なことがすぐに分かる。また後の便宜上次の定義を導入する。

定義 4.6. 完全圏 $\mathcal{E}$ 内の射 $f : M \to N$ が **0 核**を持つとは、$f = i \circ p$ と分解でき、p が許容全射、i が単射なときをいう。さらに i が許容単射に取れるとき、f は (-1) 核を持つと呼ぶ。

これらを用いて、次の簡潔な定理がなりたつ。

定理 4.7 (= [En1, Corollary 4.12])**.** *完全圏 $\mathcal{E}$ と 0 以上の整数 n について次が同値である。*

(1) *ある多元環上のある n 余傾加群 U に対して、$\mathcal{E}$ は ${}^{\perp}U$ と完全圏として同値である。*
(2) *$\mathcal{E}$ は射影生成子、入射余生成子と $(n-1)$ 核を持つ。*

これは、**余傾加群を考えることと、高次核を持つ完全圏を考えることが等価である**という驚くべき事実を示している。また $n \geq 2$ のとき $(n-1)$ 核を持つことは $\mathcal{E}$ の完全圏としての構造には依存しないので、どのような完全圏構造をいれてもそれは余傾加群に対応するという興味深い現象が起こる。証明は、本稿の仮定のもとであれば [AR] による余傾加群と resolving 部分圏との対応を用いれば難しくないので、各自試みられたい。一般の状況では [En1] を見よ。またこれにより次が得られる。

系 4.8. *完全圏 $\mathcal{E}$ と 0 以上の整数 n について次が同値である。*

(1) *ある自己入射次元 n 以下の岩永-Gorenstein 多元環 Λ に対して、$\mathcal{E}$ は $\mathsf{CM}\,\Lambda := {}^{\perp}\Lambda$ と完全圏として同値である。*
(2) *$\mathcal{E}$ は $(n-1)$ 核を持つ Frobenius 圏である。*

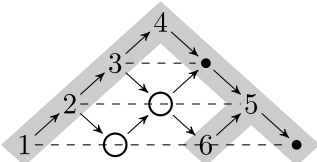
5. 応用

5.1. 加群圏のイデアル商. 多元環 Λ 上の加群 M に対して、$\mathsf{Sub}\,M$ により M の有限直和の部分加群からなる圏、$\mathsf{add}\,M$ で M の有限直和の直和因子からなる圏を指す。これに対してイデアル商 $(\mathsf{mod}\,\Lambda)/[\mathsf{Sub}\,M]$ で、対象は $\mathsf{mod}\,\Lambda$ と同じ、射集合を $\mathsf{Sub}\,M$ の対象を経由する射を 0 とするような関係式をいれた圏で定める。これは $\mathsf{mod}\,\Lambda$ から $\mathsf{Sub}\,M$ の部分を落とした圏とイメージできる。また τ, τ^{-} により通常の Auslander-Reiten translation を指し、$\mathsf{proj}\,\Lambda$ で有限生成射影加群のなす圏とする。また加群圏の *torsionfree class* とは、拡大と部分加群で閉じた部分圏のことをいう。標準的な議論から、1 余傾加群 U に対して ${}^{\perp}U = \mathsf{Sub}\,U$ がなりたち、これは torsionfree class となる。このとき次がなりたつ。

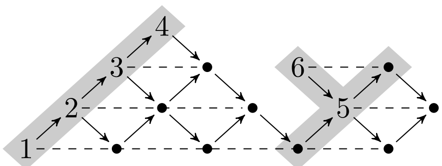
定理 5.1 (= [En1, Theorem 5.1])**.** 多元環 Λ 上の加群 M に対して、$\mathcal{E} := (\mathsf{mod}\,\Lambda)/[\mathsf{Sub}\,M]$ とおく。ここで $\mathsf{Sub}\,M$ の直既約加群の τ^- は有限個を除き $\mathsf{Sub}\,M$ に入ると仮定する。このとき G を、$\mathcal{E}$ の中で $\tau^-(\mathsf{Sub}\,M) \cup \mathsf{proj}\,\Lambda$ に対応する直既約対象を同型類を除いてすべて直和したもの、$\Gamma := \mathrm{End}_{\mathcal{E}}(G)$ とおく。すると自然な関手 $\mathcal{E}(G,-) : \mathcal{E} \to \mathsf{mod}\,\Gamma$ は埋め込みであり、その像はある *1* 余傾 Γ 加群 U に対して ${}^{\perp}U$ と書けるような *torsionfree class* となる。

Proof. 細かい議論は省略するが、1 余傾加群の左直交圏と $\mathcal{E}$ が同値なことを示したいので、定理 4.7 を使うために $\mathcal{E}$ が 0 核を持つ完全圏となることを示せばよい。ここで $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の完全構造を $\mathsf{Sub}\,M$ が projective-injective に振る舞うように変更し、そこから自然にイデアル商 $\mathcal{E} = (\mathsf{mod}\,\Lambda)/[\mathsf{Sub}\,M]$ に完全構造が誘導される。これが 0 核を持つことは比較的単なる機械的な操作で確かめられる。そこでの射影生成子がちょうど G に対応する (G は $\mathcal{E}$ の AR 箙の中で τ したら消えるところであるので、これは自然である。詳しくは例を参照)。 □

例 5.2. 多元環 Λ を quiver $\circ \leftarrow \circ \leftarrow \circ \leftarrow \circ$ の道多元環とするし、M を $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の下の Auslander-Reiten quiver で白丸に対応する加群とする。



このとき $\mathsf{Sub}\,M = \mathsf{add}\,M$ であり、$(\mathsf{mod}\,\Lambda)/[\mathsf{Sub}\,M]$ は灰色の部分に対応する圏である。すると G は数字付けられた頂点に対応する加群で (もともとの射影加群と、τ して $\mathsf{Sub}\,M$ に入ってしまう加群をあわせたものであることに注目されたい)、その自己準同型環 Γ は quiver $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4 \leftarrow 5 \to 6$ と関係式 $3 \leftarrow 4 \leftarrow 5 = 0$ で与えられる。以下の図は $\mathsf{mod}\,\Gamma$ の AR quiver で、${}^{\perp}U$ の部分は灰色のところである。



注 5.3. 多元環 Λ 上の半単純加群 $S \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ をとると、$\mathsf{Sub}\,S = \mathsf{add}\,S$ なので、イデアル商 $(\mathsf{mod}\,\Lambda)/[\mathsf{add}\,S]$ はある別の多元環 Γ 上の torsionfree class として埋め込めることが上記定理から分かる。これは加群圏から単純加群を落とした圏が別の加群圏に自然に埋め込めることを意味する。例えば S としてとくに入射的でない単純射影加群をとれば、この埋め込みは APR-tilting で誘導されるものと同じことが確かめられる。一般に APR-tilting は**加群圏の部分圏を別の加群圏に埋め込む**ものであるが、この定理は**加群圏のイデアル商を別の加群圏に埋め込む**という意味で、傾加群とは別方向での APR-tilting の一般化を与えている。

5.2. **CM 有限な岩永-Gorenstein 環の分類.** 岩永-Gorenstein 環 Λ が *CM* **有限**であるとは、$\mathsf{CM}\,\Lambda := {}^{\perp}\Lambda$ に属する直既約加群が同型類を除いて有限個しかないことを指す。系 4.8 により、CM 有限な岩永-Gorenstein 環の CM 圏は、直既約対象有限な完全圏であり系 4.8 の条件を満たすものとして特徴づけられる。よって、直既約対象が有限個の完全圏を分類することができれば CM 有限な岩永-Gorenstein 環がかなり分類できることが分かる。この主題について、筆者は論文 [En2] において、与えられた有限型加法圏に入りうる完全圏構造の explicit な分類を与えた。まずこれについて簡単に説明する。

まず加法圏が有限型とは、直既約対象が同型を除いて有限個しかないときをいう。このような加法圏は全てある多元環について $\mathsf{proj}\,\Gamma$ と圏同値になることはよく知られている。そこで $\mathsf{proj}\,\Gamma$

上の完全構造を考えよう。筆者は Γ の通常の quiver $Q(\Gamma)$ が自然に移動箙 (translation quiver) になることを示し、次を示した。

命題 5.4 (= [En2, Corollary 3.11])**.** 多元環 Γ に対して、$\mathsf{proj}\,\Gamma$ 上の完全圏構造は、移動箙 $Q(\Gamma)$ での点線の集合と一対一に対応する。とくに $\mathsf{proj}\,\Gamma$ 上の *Frobenius* 完全圏構造は、$Q(\Gamma)$ の巡回点線軌道の集合と一対一に対応する。

詳しい用語の説明は例か [En2] を見てほしい。

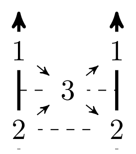
ここで系 4.8 を用いることを考えると、$\mathsf{proj}\,\Gamma$ が $(n-1)$ 核を持つことは、$n \geq 2$ のときは Γ が大域次元が n 以下であることと同値であるので、次の定理が得られる。

定理 5.5 (= [En2, Corollary 4.9])**.** 整数 $n \geq 2$ について、自己入射次元 n 以下の *CM* 有限な岩永-*Gorenstein* 環 Λ の森田同値類は、「大域次元有限な多元環 Γ と、$Q(\Gamma)$ の巡回点線軌道の集合」という組と一対一対応する。このとき $\mathsf{CM}\,\Lambda \simeq \mathsf{proj}\,\Gamma$ がなりたち、$\mathsf{CM}\,\Lambda$ の完全圏としての移動箙は対応する $Q(\Gamma)$ とその上の巡回点線軌道により与えられる。

これは CM 有限な岩永-Gorenstein 環の分類を、大域次元有限な多元環の分類に (原理的には) 帰着している。これにより、全ての CM 有限な岩永-Gorenstein 環は以下のプロセスで構成される:

(1) 大域次元有限な多元環 Γ を与える。
(2) translation quiver $Q(\Gamma)$ を計算する。
(3) $Q(\Gamma)$ の巡回点線軌道の集合を一つ選ぶ。
(4) その軌道に**属さない**加群の直和の自己準同型環を計算し Λ とすると、これが CM 有限な岩永-Gorenstein 環である。

例 5.6. 多元環 Γ を $\Lambda_0 := k[X]/(X^3)$ の Auslander 代数、つまり quiver



(縦の矢印で同一視する) と点線による自然な zero-relation と commutativity relation をいれた多元環とする。このとき $Q(\Gamma)$ は上の translation quiver と一致することが分かる。このとき点線は 2 つあるので $\mathsf{proj}\,\Gamma$ には 4 つの完全圏構造が入る。また Γ の大域次元は 2 であり、点線のどの集合も巡回点線軌道をなすので、この 4 つの完全圏構造は全て Frobenius である。ここから CM 有限な岩永-Gorenstein 環が次のように得られる:

(1) 二つの点線を共に取る場合。$\Lambda_0 = \mathrm{End}_\Gamma(1) = k[X]/(X^3)$。
(2) 上の点線のみを取る場合。$\Lambda_1 = \mathrm{End}_\Gamma(1 \oplus 2)$、これは quiver

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, bend left, "\beta"] & 2 \arrow[l, bend left, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

と関係式 $\alpha^2 = \gamma\beta$、$\alpha\gamma = \beta\gamma = \beta\alpha = 0$ で与えられる。

(3) 下の点線のみを取る場合。$\Lambda_2 = \mathrm{End}_\Gamma(1 \oplus 3)$、これは quiver

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] & 3 \arrow[l, bend left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

と関係式 $\alpha\beta\alpha\beta = 0$ で与えられる。

(4) どの点線も取らない場合。$\Gamma = \mathrm{End}_\Gamma(1 \oplus 2 \oplus 3)$。

これら 4 つの多元環が、CM 有限岩永-Gorenstein 環のうち CM 圏が $\mathsf{proj}\,\Gamma$ と圏同値になるようなものの森田同値類の完全代表系を与える。

References

[AR] M. Auslander, I. Reiten. *Applications of contravariantly finite subcategories*, Adv. Math. 86 (1991), no. 1, 111–152.

[Bü] T. Bühler, *Exact categories*, Expo. Math. 28 (2010), no. 1, 1–69.

[En1] H. Enomoto, *Classifying exact categories via Wakamatsu tilting*, J. Algebra 485 (2017), 1–44.

[En2] H. Enomoto, *Classifications of exact structures and Cohen-Macaulay-finite algebras*, arXiv:1705.02163.

Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Chikusa-ku, Nagoya. 464-8602, Japan

E-mail address: m16009t@math.nagoya-u.ac.jp