Relations for Grothendieck groups and representation-finiteness

名古屋大学多元数理科学研究科 榎本 悠久 *

概要

与えられた完全圏 $\mathcal{E}$ に対して、$\mathcal{E}$ が有限型 (直既約対象の同型類が有限個しかない) かどうかは、有限表現型の研究に代表されるように基本的な興味の対象である。本稿ではこの圏の有限性を、Grothendieck 群の定義関係式によって特徴づけることを考える。詳しくは、「Grothendieck 群 $\mathsf{K}_0(\mathcal{E})$ の関係式が Auslander-Reiten 列で生成される」ことと「$\mathcal{E}$ が有限型である」という条件の関係性を調べ、よくある仮定のもとで 2 つが同値であることを紹介する。

1 導入

多元環の表現論において、**有限表現型**な環は極めて重要なクラスである。よって環が有限表現型かどうかの判定条件は古くから興味の対象であったが、それに関して Grothendieck 群に関する Butler-Auslander の結果を紹介しよう。

まず多元環 Λ に対して、その有限生成 Λ 加群のなすアーベル圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の **Grothendieck 群** $\mathsf{K}_0(\mathcal{E}) := \mathsf{K}_0(\mathsf{mod}\,\Lambda, 0)/\,\mathsf{Ex}(\mathsf{mod}\,\Lambda)$ を考える。ここで $\mathsf{K}_0(\mathsf{mod}\,\Lambda, 0)$ とは $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の中の直既約対象の同型類 $[X]$ の集合を基底とする自由アーベル群で、$\mathsf{Ex}(\mathsf{mod}\,\Lambda)$ は各短完全列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ に対し $[X] - [Y] + [Z]$ で生成される部分群である。

Auslander-Reiten 列 (以下 AR 列と略する) とは $\mathsf{mod}\,\Lambda$ における短完全列のうちある意味で「極小」なものである。この概念が多元環の表現論において重要な役割を果たしてきたことはよく知られているが、ここで $\mathsf{AR}(\mathsf{mod}\,\Lambda)$ という $\mathsf{Ex}(\mathsf{mod}\,\Lambda)$ の部分群を、各 AR 列たちで生成される部分群と定める。このとき Butler と Auslander は次を示した。

定理 1.1 ([But, Au5]). 有限次元多元環 Λ に対して、$\mathsf{AR}(\mathsf{mod}\,\Lambda) = \mathsf{Ex}(\mathsf{mod}\,\Lambda)$ であることと Λ が有限表現型、つまり $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の直既約対象の同型類の個数が有限個であることは同値である。

これは有限表現型という条件を Grothendieck 群の関係式についての条件で特徴づけているとみることができる。Auslander は実際、このような主張が $\mathsf{mod}\,\Lambda$ 以外の圏についても成立すると予想した。本稿の目標は、上の定理の一般化を Quillen の**完全圏**という枠組みのもとで考察することである。

* m16009t@math.nagoya-u.ac.jp

2 準備

まず完全圏での AR 理論について準備をしておく。**完全圏** $\mathcal{E}$ とはまず短完全列が指定された加法圏のことであり、典型的には「アーベル圏の拡大で閉じた部分圏」として現れる (完全圏について詳しくは [Bü] を参照のこと)。

加法圏が **Krull-Schmidt** であるとは、任意の対象が自己準同型環が局所環であるような直既約対象の有限直和でかけるときいう。たとえば体上有限次元多元環 Λ (より一般に完備ネーター局所環 R 上の加群として有限生成な R 代数 Λ) に対して、その有限生成加群のなす圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ は Krull-Schmidt である (Krull-Schmidt 圏について詳しくは [Kr] を参照のこと)。Krull-Schmidt 完全圏としては、例えば上のような Λ についての $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の部分圏であり、拡大と直和因子で閉じたものが典型例である。

定義 2.1. Krull-Schmidt な完全圏 $\mathcal{E}$ における短完全列 $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ が **Auslander-Reiten 列** (以下 AR 列と略する) であるとは、以下の条件が成り立つことをいう。

(1) この短完全列は分裂していない。
(2) X と Z は直既約である。
(3) 任意の直既約な対象 W からの非同型な写像 $W \to Z$ は必ず g を通る。
(4) 任意の直既約な対象 W への非同型な写像 $X \to W$ は必ず f を通る。

上の条件 (3)(4) は、この列に対して非同型な写像で pullback や pushout をとると分裂してしまう (Ext 群で 0 となる) ということであり、(1) と合わせると、AR 列は「分裂しない (=0 でない) 短完全列のなかで一番小さいもの」という感じが何となく分かるだろう (実際 Ext 関手の socle の元として正確に述べることもできる)。

完全圏 $\mathcal{E}$ について、任意の直既約な非射影的対象に対してそれで終わるような AR 列があり、かつ任意の直既約な非入射的対象に対してそれから始まる AR 列があるとき、$\mathcal{E}$ は **AR 列を持つ**と呼ぶことにする。

例 2.2. AR 列の存在については次のことがよく知られている。

- Λ を有限次元多元環とすると、$\mathsf{mod}\,\Lambda$ は AR 列を持つ。また $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の拡大・直和因子で閉じた部分圏 $\mathcal{E}$ が後で定義する**関手的有限**な部分圏であるときも、$\mathcal{E}$ は AR 列を持つことが知られている [AS]。
- R を完備正則局所環、Λ を加群として有限生成自由な R 代数とする (**整環**と呼ばれる)。このとき R 加群として有限生成自由な Λ 加群を **Cohen-Macaulay 加群**といい、Cohen-Macaulay 加群のなす $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の部分圏を $\mathsf{CM}\,\Lambda$ とする (Krull-Schmidt な完全圏となる)。この圏 $\mathsf{CM}\,\Lambda$ が AR 列を持つことと、整環 Λ が**孤立特異点**を持つことは同値である [Au6]。ここで Λ が孤立特異点を持つとは、R の任意の非極大な素イデアル p での局所化 Λ_p が正則

(大域次元 $\operatorname{ht} p$) となるときをいう。

次に Grothendieck 群についての記法をいくつか導入しよう。

定義 2.3. $\mathcal{E}$ を Krull-Schmidt 完全圏とする。

(1) $\mathsf{ind}\,\mathcal{E}$ を $\mathcal{E}$ の直既約対象の同型類の集合とする。
(2) $\mathsf{K}_0(\mathcal{E}, 0)$ を $\mathsf{ind}\,\mathcal{E}$ で生成される自由アーベル群とする。
(3) $\mathsf{Ex}(\mathcal{E})$ という $\mathsf{K}_0(\mathcal{E}, 0)$ の部分群を、各 $\mathcal{E}$ 内の短完全列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ に対して $[X]-[Y]+[Z]$ という元で生成されるものとする (ここで $[X]$ たちは必要なら直既約分解して $\mathsf{K}_0(\mathcal{E}, 0)$ の元とみなす)。また商群 $\mathsf{K}_0(\mathcal{E}, 0)/\mathsf{Ex}(\mathcal{E})$ を $\mathsf{K}_0(\mathcal{E})$ と書き、$\mathcal{E}$ の **Grothendieck 群**と呼ぶ。
(4) $\mathsf{AR}(\mathcal{E})$ という $\mathsf{Ex}(\mathcal{E})$ の部分群を、$\mathcal{E}$ 内の AR 列に対応する元で生成されるものとする。

つまり $\mathsf{Ex}(\mathcal{E})$ は $\mathcal{E}$ の Grothendieck 群の関係式を表す群であり、$\mathsf{AR}(\mathcal{E})$ はその関係式の中で AR 列から生成されている部分である。本稿の主題は、次の Butler-Auslander の定理の一般化である。

疑問 2.4. $\mathcal{E}$ を *Krull-Schmidt* 完全圏としたとき、次は同値であるか*?*

(1) $\mathcal{E}$ は有限型 ($\mathsf{ind}\,\mathcal{E}$ が有限集合) である。
(2) $\mathsf{Ex}(\mathcal{E}) = \mathsf{AR}(\mathcal{E})$ が成立する。

いくつか知られている結果を紹介する。まず (1) $\Rightarrow$ (2) がかなり一般的な状況で成立することを著者は以前示した ($\mathcal{E}$ が体上 Hom-finite な場合や、より一般に完備ネーター局所環上 Hom が有限生成加群かつ $\mathcal{E}$ が enough projectives を持つときなど)。よって (2) $\Rightarrow$ (1) が問題であるが、これにはいくつかの反例が知られている:

- (自明な反例) $\mathcal{E}$ を適当な有限型でない Krull-Schmidt 圏とし、その上の完全圏構造として自明なものをとる。この場合 $\mathsf{Ex}(\mathcal{E}) = 0$ であり、$\mathsf{Ex}(\mathcal{E}) = \mathsf{AR}(\mathcal{E})$ が自明になりたつ。
- (非自明な反例) Λ を無限表現型の遺伝的多元環とし、$\mathcal{E}$ として $\mathsf{mod}\,\Lambda$ のうち preprojective な加群の有限直和からなるような部分圏とする。これは自然な完全圏構造のもとで $\mathsf{Ex}(\mathcal{E}) = \mathsf{AR}(\mathcal{E})$ が成り立つ [MMP]。

しかし (2) $\Rightarrow$ (1) が成立することが示されているさまざまな自然な例がある:

- 有限次元代数やアルティン代数 Λ に対する $\mathcal{E} := \mathsf{mod}\,\Lambda$ [But, Au5]。
- Quasi-hereditary (より一般に standardly stratified) なアルティン代数 Λ に対して good filtration をもつ加群のなす圏 [MMP, PR]。
- 完備正則局所環上の整環 Λ であり、大域次元有限なものに対する $\mathcal{E} := \mathsf{CM}\,\Lambda$ [AR2]。

ここでとくに最後のものに関連して、一般の整環 Λ の $\mathcal{E} := \mathsf{CM}\,\Lambda$ に対して (2) $\Rightarrow$ (1) が成立するかは未解決である ((1) $\Rightarrow$ (2) はなりたつ)。最近 Λ が可換 Gorenstein の場合についてなりたつこ

とが [Hi] により示され、可換 Cohen-Macaulay 環に対して部分的な回答が [Ko] で与えられた。本稿で紹介する結果は、以上の既存の結果をすべて含む統一的なものである。

3 主結果

3.1 アルティン代数の場合

まず基礎環 R が 0 次元の場合、つまり可換アルティン環 R 上 $\mathcal{E}$ が Hom-finite な R-category ($\mathcal{E}(X,Y)$ が有限生成 R 加群) の場合を考える。いくつか必要な定義をしよう。

定義 3.1. アルティン代数 Λ 上の加群圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の部分圏 $\mathcal{E}$ を考える。

(1) $\mathcal{E}$ が**反変有限**であるとは、任意の Λ 加群 $M \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ が右 $\mathcal{E}$ 近似を持つことをいう。ここで M の右 $\mathcal{E}$ 近似 $E_M \to M$ とは、$E_M \in \mathcal{E}$ であり、任意の $\mathcal{E}$ の対象から M への射がこれを通るようなものである。

(2) $\mathcal{E}$ が **resolving** であるとは、次を満たすときをいう。
  (a) $\mathcal{E}$ は拡大と直和因子で閉じる (よって $\mathcal{E}$ は Krull-Schmidt 完全圏となる)。
  (b) 任意の射影加群は $\mathcal{E}$ に含まれる。
  (c) 短完全列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ について、M と N が $\mathcal{E}$ に含まれるならば、L も $\mathcal{E}$ に含まれる。

このとき次が成り立つ。

定理 3.2. アルティン代数 Λ と $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の反変有限な *resolving* 部分圏 $\mathcal{E}$ について、$\mathcal{E}$ が有限型であることと $\mathsf{AR}(\mathcal{E}) = \mathsf{Ex}(\mathcal{E})$ が成り立つことは同値である。

これは先に述べたアルティン代数に関する結果 [But, Au5, MMP, PR] を含んでいる。さらに典型例をあげると:

- Λ 上の余傾加群 U について、U への Ext がすべて消える加群のなす圏 $\mathcal{E} := {}^{\perp}U$。
- 加群圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の関手的有限なねじれ (自由) 類 $\mathcal{E} \subset \mathsf{mod}\,\Lambda$。
- Iwanaga-Gorenstein 多元環 Λ 上の Cohen-Macaulay 加群のなす圏 $\mathcal{E} := \mathsf{CM}\,\Lambda$。

などの圏に対して上の定理が適応できる (詳しい定義は省略する)。

3.2 高次元の整環の場合

次に基礎環の次元が 1 次元以上の場合を考えよう。議論の煩雑さを避けるため、整環 Λ に対する $\mathsf{CM}\,\Lambda$ のみを考察の対象とする。この $\mathsf{CM}\,\Lambda$ の有限性と Grothendieck 群の関係式について、次の結果を得た。

定理 3.3. Λ を完備正則局所環上の整環で高々孤立特異点を持つ *(*$\Leftrightarrow$ $\mathsf{CM}\,\Lambda$ が AR 列を持つ*)* なも

のとする。

(1) $\mathsf{CM}\,\Lambda$ が有限型ならば $\mathsf{Ex}(\mathsf{CM}\,\Lambda) = \mathsf{AR}(\mathsf{CM}\,\Lambda)$ が成り立つ。
(2) $\mathsf{Ex}(\mathsf{CM}\,\Lambda) = \mathsf{AR}(\mathsf{CM}\,\Lambda)$ ならば $\mathsf{CM}\,\Lambda$ の *syzygy* のなす圏は有限型となる。
(3) Λ の大域次元有限または *Gorenstein* であるとき、$\mathsf{CM}\,\Lambda$ が有限型であることと $\mathsf{Ex}(\mathsf{CM}\,\Lambda) = \mathsf{AR}(\mathsf{CM}\,\Lambda)$ が成り立つことは同値である。

ここで整環 Λ が **Gorenstein** であるとは $\mathsf{CM}\,\Lambda$ において Λ 自身が入射的対象となるときをいい、整環 Λ 上の加群 M が $\mathsf{CM}\,\Lambda$ の **syzygy** であるとは、ある Λ 加群の短完全列 $0 \to M \to P \to N \to 0$ であって P が射影加群で $N \in \mathsf{CM}\,\Lambda$ なるようなものが存在するときをいう。この結果は (1) および Λ の大域次元が有限の場合の (3) を示した [Au5]、Λ が可換局所 Gorenstein の場合の (3) を示した [Hi]、また Λ が可換局所の場合の (2) を示した [Ko] を全て統一する結果となっている。ただし Λ に関する仮定なしで (3) が成立するかどうかは、可換 Cohen-Macaulay 環の場合についてすら知られていないようである。

4 証明のアイデア

前節での 2 つの主定理の証明は、$\mathcal{E}$ 上の加群のなす圏を用いて圏論的手法で行う。ここで**右 $\mathcal{E}$ 加群**とは $\mathcal{E}$ からアーベル群の圏への加法的な反変関手のことをいい、右 $\mathcal{E}$ 加群全体はアーベル圏をなす。このうち、表現可能関手の間の射 $\mathcal{E}(-,X) \to \mathcal{E}(-,Y)$ の余核として現れる $\mathcal{E}$ 加群を**有限表示加群**といい、これらのなす圏を $\mathsf{mod}\,\mathcal{E}$ と表す。

定義 4.1. $\mathcal{E}$ を完全圏としたとき、$\mathcal{E}$ 加群 M が **effaceable** であるとは、ある $\mathcal{E}$ 内の短完全列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ であって、米田埋め込みすると $0 \to \mathcal{E}(-,X) \to \mathcal{E}(-,Y) \to \mathcal{E}(-,Z) \to M \to 0$ が完全となるようなものがあるときをいう。また Effaceable 加群のなす圏を $\mathsf{eff}\,\mathcal{E}$ と書く。

この圏 $\mathsf{eff}\,\mathcal{E}$ はアーベル圏であるなどよい性質を持ち、そのうえ $\mathcal{E}$ 上の完全圏としての構造を統制している (この完全圏の公理を $\mathsf{eff}\,\mathcal{E}$ に関する条件に読み替えることで [En2] では与えられた圏上の完全圏構造の分類がなされた)。そこで導入で考えた二条件の代わりに次の三条件を考える。

(1) $\mathcal{E}$ が有限型となる。
(2) $\mathsf{eff}\,\mathcal{E}$ に属するどの加群も長さ有限となる ($\Leftrightarrow$ $\mathsf{eff}\,\mathcal{E}$ が abelian length category となる)。
(3) $\mathsf{Ex}(\mathcal{E}) = \mathsf{AR}(\mathcal{E})$ が成り立つ。

実は effaceable である単純 $\mathcal{E}$ 加群はちょうど AR 列と対応しており、その意味で上の (2) は (3) の圏化とみなせる ($\mathsf{eff}\,\mathcal{E}$ が $\mathsf{Ex}(\mathcal{E})$ に対応し、その中で長さ有限部分が $\mathsf{AR}(\mathcal{E})$ に対応する)。なので (2) $\Rightarrow$ (3) が成り立つことはすぐに分かり、また (1) と (2) は非常に近しい。これを利用して主結果は証明がなされる。

詳しい上の (1), (2), (3) の因果関係は次の図でまとめられる。ここで $\mathcal{E}$ は可換ネーター完備局所環 R 上 Hom が有限生成な Krull-Schmidt 完全圏であり、enough projective と AR 列を持つこ

とを仮定する。また $\mathcal{E}$ の射影安定圏を $\underline{\mathcal{E}}$ であらわす。

$$\begin{tikzcd}
(1)\ \mathcal{E}\text{ は有限型} \arrow[r, shift left, Rightarrow] & (2)\ \mathsf{eff}\,\mathcal{E}\text{ が length} \arrow[l, shift left, Rightarrow, "\underline{\mathcal{E}}\text{ が弱余生成子を持つ}"] \arrow[r, shift left, Rightarrow] & (3)\ \mathsf{AR}(\mathcal{E}) = \mathsf{Ex}(\mathcal{E}) \arrow[l, shift left, Rightarrow, "\mathcal{E}\text{ が条件 (CF) を満たす}"]
\end{tikzcd}$$

ここで加法圏 $\mathcal{C}$ の**弱余生成子** C とは「$\mathcal{C}(X,C)=0$ ならば $X=0$」がどのような $X\in\mathcal{C}$ についてもなりたつような $C\in\mathcal{C}$ のことをいう。上の「$\underline{\mathcal{E}}$ が弱余生成子を持つ」という条件は、$\mathcal{E}$ が整環 Λ についての $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の反変有限な resolving 部分圏であるときは成り立つことが比較的すぐにわかる (定理 3.2 での仮定はここで用いる)。また完備正則局所環上の整環 Λ について $\mathsf{CM}\,\Lambda$ は $\mathsf{mod}\,\Lambda$ のなかで反変有限 resolving であることが知られているので、定理 3.3 についても適用できる。

また条件 (CF) は Grothendieck 群に関する技術的な条件であり詳細は省くが、これは $\mathcal{E}$ が可換アルティン環上 Hom-finite な場合は自動的に満たされ (よって定理 3.2 が従う)、基礎環が高次元の場合であっても $\mathcal{E}$ が Frobenius または大域次元有限な場合は証明できる (よって Λ が Gorenstein または大域次元有限な場合が従う)。

参考文献

[Au5] M. Auslander, *Relations for Grothendieck groups of Artin algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 91 (1984), no. 3, 336–340.

[Au6] M. Auslander, *Isolated singularities and existence of almost split sequences*, Representation theory, II (Ottawa, Ont., 1984), 194–242, Lecture Notes in Math., 1178, Springer, Berlin, 1986.

[AR2] M. Auslander, I. Reiten, *Grothendieck groups of algebras and orders*, J. Pure Appl. Algebra 39 (1986), no. 1–2, 1–51.

[AS] M. Auslander, S. O. Smalø, *Almost split sequences in subcategories*, J. Algebra 69 (1981), 426–454.

[But] M. C. R. Butler, *Grothendieck groups and almost split sequences*, Lecture Notes in Math., 882, Springer, Berlin-New York, 1981.

[Bü] T. Bühler, *Exact categories*, Expo. Math. 28 (2010), no. 1, 1–69.

[En2] H. Enomoto, *Classifications of exact structures and Cohen-Macaulay-finite algebras*, arXiv:1705.02163.

[Hi] N. Hiramatsu, *Relations for Grothendieck groups of Gorenstein rings*, Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017), no. 2, 559–562.

[Kr] H. Krause, *Krull-Schmidt categories and projective covers*, Expo. Math. 33 (2015), no. 4, 535–549.

[Ko] T. Kobayashi, *Syzygies of Cohen-Macaulay modules and Grothendieck groups*, J. Algebra 490 (2017), 372–379.

[MMP] E. N. Marcos, H. A. Merklen, M. I. Platzeck, *The Grothendieck group of the category of modules of finite projective dimension over certain weakly triangular algebras*, Comm. Algebra 28 (2000), no. 3, 1387–1404.

[PR] M. I. Platzeck, I. Reiten, *Modules of finite projective dimension for standardly stratified algebras*, Comm. Algebra 29 (2001), no. 3, 973–986.