Leanのインストール・基礎

大阪公立大学
理学研究科
学振特別研究員PD
榎本悠久

自己紹介

- 専門は多元環の表現論（非可換環上の加群の圏や付随する圏の構造を調べる）（純粋数学）
- 情報系・基礎論の勉強はほぼしたことがない。
- 2年前にLeanを水野さん経由でLeanを知る。**Natural Number Game**にハマって、他の大学数学の教材で少し遊ぶ。（Leanで初めて**型**の概念に触れ、またVS Codeを使うようになった。）
- 去年に水野さんにLeanで「非可換局所環の左右対称性」を示す問題を渡され、本格的にLeanのコードを書く経験をした。
- 「極大右イデアルの共通部分は極大左イデアルの共通部分に等しい」等の基礎的な環論をちょっとやった。
- しばらくLeanから離れていたが、Lean 4への移行とこの集会をきっかけにまた勉強中

目次

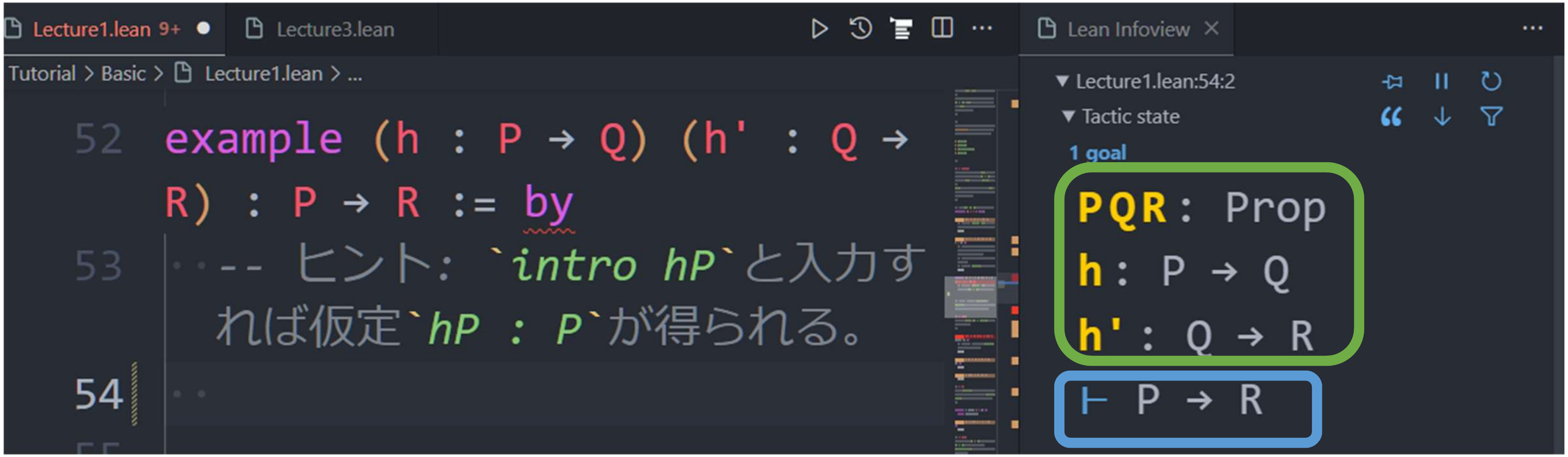
環境整備まで

- 動画を一緒に見ながら行いましょう。
- Windows編
- Mac編
- 分からないところ・躓いたところがあったら、質問するか、slackの「**インストール関係**」のところへ質問してください。
- まあまあメモリとCPUを食うので、いらないブラウザ等は閉じておきましょう。
- 困ったらVS Codeを開き直してみる
- 解き方・書き方は一つでは無い！

インストールがどうしても駄目だったら

- GitPodというサービスで、オンライン上で教材を遊べます。
- 使うにはGitHub（またはGitLab）のアカウントが必要なので、まず登録してください。
- GitPod上で「Try for free」からログインし、New Workspaceを選んで、教材URLを入力して使えるはずです。

- 「sorry」消してカーソル置くと、右の画面に「状況」が出る



- 上部緑：「**ローカルコンテキスト**」：現在の仮定を表す
  - 「P Q R: Prop」：PとQとRという命題がある
  - 「h : P → Q」：「PならばQ」という仮定（事実）「h」がある
- 下部青：「**ゴール**」：上の仮定から証明したいこと
  - 「P → R」：「PならばR」を示すのがゴールである

証明の流れ

- sorryを消したところに、コマンド（**tactic**）を打ち込んでいき、ゴールを変形し、改行し、次のtacticを打ち込み、を繰り返し、ゴールをすべて消していく。
- 例えばゴールが「**Q**」のとき、ローカルコンテキストに「**h : P → Q**」（PならばQ）があれば、「**apply h**」により、ゴールが「**P**」に変わる。
- **Tutorial/Basics/Tactics.lean** にtacticのまとめがある
- 赤線が出たらエラーが起きている。（証明終わってなかったりtactic使い方がまずかったり。放置しないようにしよう。
- 分からないけど次へ行きたいときは、エラーが出ないようにして、とりあえず「sorry」と書けば大丈夫。

定理の主張の見方

- **theorem** 定理名 (仮定1) (仮定2) **:** (示したいこと) := by
- 名前がいらないやつは、代わりに「example」

```
theorem this_is_name
    (hP : P) (h : P → Q) :
    (Q → R) → (P → R) := by
  sorry
```

```
example
    (hP : P) (h : P → Q) :
    (Q → R) → (P → R) := by
  sorry
```

- マウスオーバーするといろんな情報が見える！
- 「--」と書くと、その行に好きなメモ等を書ける

数学との対応（命題論理）

Leanは「型」を使って数学する。全ては「型」をもつ「項」。
「foo : Bar」という書き方で、fooの型がBarなことを表す。
イメージ：「fooはBarの元である」

通常の数学	Leanの数学
命題P	P : Prop
Pが成り立つという仮定	hP : P (型がPである項)
Pの証明をする	型がPである項を構成する
与えられた証明が正しいか	型がちゃんと合っているか
「PならばQ」という命題	P → Q : Prop

数学との対応（集合や写像）

通常の数学	Leanの数学
集合X	X : Type
Xの元x	x : X （型がXである項）
Xの任意の元xについて命題P xが成り立つ	∀ x : X, P x
写像 f : X → Y	f : X → Y （X → Yは「写像の集合」）
ℕからℕへの、xをx+1に飛ばす写像	fun (x : ℕ) ↦ x + 1

通常の数学 vs Leanの数学

- 通常の数学：ZFCによる公理的集合論で基礎づけされている（と認識している数学の人が多い）。
- Leanの数学：依存型理論で基礎づけされている。
- 2つの数学の間に直接的な対応があるわけではない！

⇨「普段の数学で証明できることは必ずLeanで自然に形式化できるか」はわからない。がそう信じている人が多い。

- なぜなら、普段数学する上では、ZFCを意識せずとも数学ができているから、**表現したい数学があればそれの基礎づけはどれでも同じ。**
- むしろ普段我々は型理論的に数学を見ているかも？

通常の数学 vs Leanの数学（参考）

- ZFCの自然数：$0 := \varnothing, 1 := \{\varnothing\}, 2 := \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, 3 := 2 \cup \{2\}, \cdots$
- Leanの自然数：

```
inductive Nat where
  | zero : Nat
  | succ : Nat → Nat
```

- ZFCでは「$\pi = 2 \cap 3$」や「$1 \in 2$」や「3は2上の位相構造」は意味を持つが奇妙（1番目は偽だが後は正しい！）
  しかしLeanではそもそもエラーが出て主張として認められない。
- 「Leanが矛盾するならば、ZFC+高々有限個の到達不能基数の存在が矛盾する」ことが証明されている。普段ZFC+到達…の矛盾を心配していない人であればLeanの矛盾について心配する必要はない。