団散乱図入門

中西 知樹 (名大)

大阪公大 (I-site なんば)

2022年 10月 12日 (水) Lect 1

13日 (木) Lect 2-4

ver. 2022.10.17

参考文献

[GHKK] M. Gross, P. Hacking, S. Keel, M. Kontsevich
Canonical bases for cluster algebras
J. AMS 31 (2018) 497-608

[KS] M. Kontsevich, Y. Soibelman
Wall-crossing structures in Donaldson-Thomas invariants, integrable systems and mirror symmetry
Lect Notes Unione Ital. 15 (2014) 197-308

[N] T. Nakanishi
Cluster algebras and scattering diagrams
Part III Cluster scattering diagrams
arXiv: 2111.00800 (ver 5)

1. 構造群 G_Ω

☆ 初期データ Ω

$\Omega = (\omega_{ij})$ $r\times r$ 反対称 有理行列

＋ 補助データ $\begin{cases} N \simeq \mathbb{Z}^r & \text{rank } r \text{ の自由アーベル群} \\ e_1, \dots, e_r & N \text{ の基底} \end{cases}$

以下が定まる

① 反対称形式 $\{\cdot,\cdot\} : N\times N \longrightarrow \mathbb{Q}$
$\{e_i, e_j\} = \omega_{ij}$

② N の正元 $N^+ = \{n = \sum a_i e_i \mid a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \neq 0\}$
半群

☆ N^+-graded Lie 代数 $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\Omega = \bigoplus_{n\in N^+} \mathbb{Q} X_n, \quad X_n \text{ は } \mathfrak{g} \text{ の基底}$$

Lie カッコ $[X_n, X_{n'}] := \{n, n'\} X_{n+n'}$

Jacobi id. $[X_{n_1}, [X_{n_2}, X_{n_3}]] = \{n_2, n_3\}[X_{n_1}, X_{n_2+n_3}]$
$= \{n_2,n_3\}(\{n_1,n_2\} + \{n_1,n_3\}) X_{n_1+n_2+n_3}$
$= (\{n_1,n_2\}\{n_2,n_3\} - \{n_2,n_3\}\{n_3,n_1\}) X_{n_1+n_2+n_3}$
cyclic な形

☆ 完備化 $\hat{\mathfrak{g}}$

$n = \sum a_i e_i \in N^+$, $\deg(n) := \sum a_i$

$\hat{\mathfrak{g}}$: deg に関する完備化

つまり、$\hat{\mathfrak{g}}$ の元 $\sum_{n\in N^+} c_n X_n$ $(c_n \in \mathbb{Q})$ 形式的無限和

☆ 群 G

$$\exp : \hat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sim} G \quad \text{形式的全単射}$$
$$X \longmapsto \exp(X)$$

積 Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) 公式

$\exp(X)\exp(Y)$
$:= \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]] + \cdots\right)$

$\hat{\mathfrak{g}}$: N^+-graded $\Rightarrow$ well-defined　G は群になる

以上の構成は [KS] による。

G を散乱図 (Lect 2) の<u>構造群</u>という

☆ G の無限積

$l \in \mathbb{Z}_{>0}$, $(N^+)^{>l} := \{ n \in N^+ \mid \deg(n) > l \}$

$(N^+)^{\le l} := \{ \quad " \quad \mid \quad " \quad \le l \}$

$G^{>l} := \{$ すべての $\exp\left(\sum_{n \in (N^+)^{>l}} c_n X_n\right)$ 無限和 $\}$

は G の正規部分群 (∵ BCH公式)

$G^{\le l} := G / G^{>l} \ni \exp\left(\sum_{n \in (N^+)^{\le l}} c_n X_n\right)$ 代表元

「mod $G^{>l}$ で考える」 = deg l でカット

$\pi_l : G \longrightarrow G^{\le l}$ 標準射影, $G = \varprojlim G^{\le l}$

G の無限積 = $G^{\le l}$ で有限積

π_l と compatible

☆ 平行部分群 G''_n

$n \in N^+$ は原始的 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $n = tn'$ $(t \in \mathbb{Z}_{>0}, n' \in N^+)$

ならば $t = 1$.

$N^+_{pr} = \{ n \in N^+ \mid n$ は原始的 $\}$

$n \in N^+_{pr}$ に対して, $G''_n := \{$ すべての $\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j X_{jn}\right) \}$

アーベル群. n の平行部分群

☆ 有理べキ

$\begin{cases} g = \exp(X) \\ c \in \mathbb{Q} \text{ に対して} \end{cases}$ $g^c := \exp(cX)$ と定める.

2. y表現

$y=(y_1,\cdots,y_r)$ 変数　r：Ωの次数.

$\mathbb{Q}[[y]]$　yの形式的べき級数環.

$Q:=N^+\sqcup\{0\}$

$\mathbb{Q}[[y]]$の元　$\sum_{n\in Q} c_n y^n$　$(c_n\in\mathbb{Q})$ 無限和. と同一視

$y^{e_i}=y_i.$

$n\in N^+$,　$\tilde{X}_n\in \mathrm{End}(\mathbb{Q}[[y_n]])$

$\tilde{X}_n(y^{n'})=\{n,n'\}y^{n+n'}$ と定める

このとき $\begin{cases} \cdot\ X_n\mapsto\tilde{X}_n \text{ は } \mathfrak{g} \text{ の表現} \\ \cdot\ X_n \text{ は derivation} \end{cases}$　ex

これより　$\rho_y : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}[[y]])$

algebra auto

$$\exp(X)\mapsto \mathrm{Exp}(\tilde{X}):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\tilde{X}^k$$

は　Gの表現　(Gのy表現)

Fact：ρ_yは忠実 $\Longleftrightarrow$ Ωは正則　$(\det\Omega\neq 0)$

3. 二重対数元

☆ Euler 二重対数関数 (dilogarithm)

$$\mathrm{Li}_2(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x^j}{j^2}$$　$|x|<1$で収束

$$-\mathrm{Li}_2(-x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j^2}x^j$$

$$x\frac{d}{dx}\left(-\mathrm{Li}_2(-x)\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j}x^j=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots=\log(1+x)$$

よって，$-\mathrm{Li}_2(-x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\log(1+y)}{y}dy$　(積分表示.)

☆ Gの二重対数元

各 $n\in N^+$ に対して,

$$\Psi[n]:=\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j^2}X_{jn}\right)\in G^{\parallel}_{n_0}\quad\left(\begin{array}{l} n_0\in N^+_{pr} \\ n=tn_0\ (t\in\mathbb{Z}_{>0})\end{array}\right)$$

これを nの二重対数元 (dilogarithm element) という

※ y表現の下で

$$\Psi[n](y^{n'}) = y^{n'} \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j^{\cancel{2}}} \{\cancel{j}n, n'\} y^{jn}\right)$$

$$\left(\tilde{X}_n(y^{n'}) = y^{n'} \{n, n'\} y^{n}\right)$$

$$= y^{n'} \exp\left(\{n, n'\} \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} y^{jn}}_{= \log(1+y^n)}\right)$$

$$= y^{n'}(1+y^n)^{\{n,n'\}}$$

(これは団パターンのy変数の変異(の一部))

Fock-Goncharov分解

ポイント: $\Psi[n]$は $\left\{\begin{array}{l}\text{変異} \\ \text{dilogarithm}\end{array}\right.$ の代数化

利点 $\left\{\begin{array}{l}\text{・}G\text{における関係式} \\ \text{・〃 無限積}\end{array}\right.$ を考えられる.

3. 五角関係式

$\Psi[n]$はGにおける以下の関係式をみたす.

Thm 1 [KS], [GHKK], [N]

$n_1, n_2 \in N^+$, $c_1, c_2, c \in \mathbb{Q}$

(1) 可換関係式 $\{n_2, n_1\} = 0$ のとき

$$\Psi[n_2]^{c_2}\Psi[n_1]^{c_1} = \Psi[n_1]^{c_1}\Psi[n_2]^{c_2}$$

$\because$ $[X_n, X_{n'}] = \{n, n'\} X_{n+n'} = 0$ + BCH 〃

(2) 五角関係式 $\{n_2, n_1\} = c \neq 0$ のとき

$$\Psi[n_2]^{1/c}\Psi[n_1]^{1/c} = \Psi[n_1]^{1/c}\Psi[n_1+n_2]^{1/c}\Psi[n_2]^{1/c}$$

($c=1$ が [KS](上の変種), [GHKK](x表現))

(2)の証明
- y表現 ρ_y を用いる.
- n_1, n_2を含むランク2の格子N'に制限すると ρ_y は忠実

＊ (2) の証明 (ex)

$$(\mathrm{LHS})(y^n)$$

$$= \Phi[n_2]^{1/c}\left(\underbrace{\Phi[n_1]^{1/c}(y^n)}_{= y^n(1+y^{n_1})^{\{n_1,n\}/c}}\right)$$

$$= y^n(1+y^{n_2})^{\{n_2,n\}/c}\left(1+y^{n_1}(1+y^{n_2})^{\boxed{\{n_2,n_1\}/c}}\right)^{\{n_1,n\}/c}$$

$\boxed{\{n_2,n_1\}/c} = 1$ 仮定

- こちらは特に何もやらなかった
- 右辺も同じ結果になる（こちらが非自明）

$$(\mathrm{RHS})(y^n)$$

$$= \Phi[n_1]^{1/c}\,\Phi[n_1+n_2]^{1/c}\left(\underbrace{\Phi[n_2]^{1/c}(y^n)}_{= y^n(1+y^{n_2})^{\{n_2,n\}/c}}\right)$$

$$= \Phi[n_1]^{1/c}\left(y^n(1+y^{n_1+n_2})^{\{n_1+n_2,n\}/c} \times \left(1+y^{n_2}(1+y^{n_1+n_2})^{\boxed{\{n_1+\cancel{n_2},n_2\}/c}}\right)^{\{n_2,n\}/c}\right)$$

$\boxed{\{n_1+\cancel{n_2},n_2\}/c} = -1$

$$= \Phi[n_1]^{1/c}\left(y^n(1+y^{n_1+n_2})^{\{n_1,n\}/c}\,(1+y^{n_2}+y^{n_1+n_2})^{\{n_2,n\}/c}\right)$$

$$= y^n(1+y^{n_1})^{\{n_1,n\}/c}\left(1+y^{n_1+n_2}(1+y^{n_1})^{\boxed{\{n_1,n_1+n_2\}/c}}\right)^{\{n_1,n\}/c}$$

$$\times\left(1+y^{n_2}(1+y^{n_1})^{\boxed{\{n_1,n_2\}/c}}+y^{n_1+n_2}(1+y^{n_1})^{\boxed{\{n_1,n_1+n_2\}/c}}\right)^{\{n_2,n\}/c}$$

$\boxed{\{n_1,n_1+n_2\}/c} = -1$, $\boxed{\{n_1,n_2\}/c} = -1$

$$= y^n(1+y^{n_1}+y^{n_1+n_2})^{\{n_1,n\}/c}$$

$$\times\,(1+y^{n_1})^{-\{n_2,n\}/c}\,(\underbrace{1+y^{n_1}+y^{n_2}+y^{n_1+n_2}}_{=(1+y^{n_1})(1+y^{n_2})})^{\{n_2,n\}/c}$$

$$= y^n(1+y^{n_2})^{\{n_2,n\}/c}\,(1+y^{n_1}+y^{n_1+n_2})^{\{n_1,n\}/c}$$

● 以上の計算は、本質的にA_2型団パターンのy変数の**五角周期**の計算と同じ

Lect 2 整合散乱図

1. 散乱図

復習 $\Omega = (\omega_{ij})$ $r \times r$ 反対称な有理行列

$$\begin{cases} N \simeq \mathbb{Z}^r \\ e_1, \ldots, e_r : N\text{の基底} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ $G = G_\Omega$ 構造群

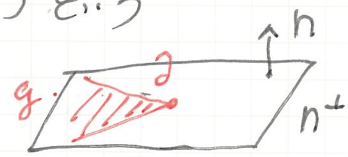
☆ 壁

$M \simeq \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$, $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$

$\langle \cdot, \cdot \rangle : N \times M_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ 標準ペアリング

$n \in N^+$, $n^\perp = \{ z \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle n, z \rangle = 0 \} \subset M_{\mathbb{R}}$

Def 以下の三つ組 $w = (\mathfrak{d}, g)_n$ を壁(wall)という



- 法ベクトル $n \in N^+_{pr}$
- 台 $\mathfrak{d} \subset n^\perp$:(凸有理多面)錐
  次元が $r-1$
- 壁元 $g \in G_n^{\parallel} = \{ \text{すべての} \exp(\sum_{j=1}^{\infty} c_j X_{jn}) \}$

例: $(n^\perp, \Psi[tn]^c)_n$ $t \in \mathbb{Z}_{>0}$, $c \in \mathbb{Q}$

☆ 散乱図

Def $\mathfrak{D} = \{ w_\lambda = (\mathfrak{d}_\lambda, g_\lambda)_{n_\lambda} \}_{\lambda \in \Lambda}$ が以下をみたすとき散乱図(scattering diagram)という

有限性条件: 任意の $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、
$\pi_\ell(g_\lambda) \neq \mathrm{id}$ となる w_λ は有限個

($\pi_\ell : G \to G^{\leq \ell} := G / G^{> \ell}$ 標準射影)

またこのとき、$\mathfrak{D}_\ell = \{ w_\lambda \mid \pi_\ell(g_\lambda) \neq \mathrm{id} \}$ を $\mathfrak{D}$ の degree ℓ の縮小という。(有限集合となる)

---

2. 整合性

以下 $\mathfrak{D}$：散乱図

✻ 道順序積

$$\mathrm{Supp}\,\mathfrak{D} := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{d}_\lambda$$

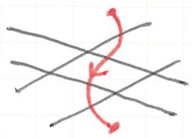
$$\mathrm{Sing}\,\mathfrak{D} := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \partial\mathfrak{d}_\lambda \cup \bigcup_{\lambda,\lambda'} \mathfrak{d}_\lambda \cap \mathfrak{d}_{\lambda'}$$

$\dim(\mathfrak{d}_\lambda \cap \mathfrak{d}_{\lambda'}) = r-2$

（Φではなく、法ベクトルが異なる）

Def 曲線 $\gamma : [0,1] \longrightarrow M_{\mathbb{R}}$ は許容曲線

- γ はなめらか
- γ の端点は $\mathrm{Supp}\,\mathfrak{D}$ にない
- γ は $\mathrm{Sing}\,\mathfrak{D}$ と交わらない
- γ は $\mathrm{Supp}\,\mathfrak{D}$ と横断的に交わる.



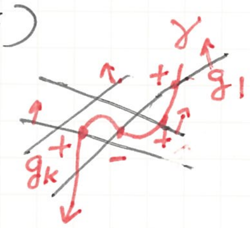
以下, 曲線は許容曲線とする.

Def 上の $\mathfrak{D}, \gamma$ に対して, 道順序積 $P_{\gamma,\mathfrak{D}} \in G$ (path-ordered product) を以下で定める.

各 $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$P_{\gamma,\mathfrak{D}_\ell} = g_k^{\epsilon_k} \cdots g_1^{\epsilon_1}$$

ϵ_i：交差符号（右図）



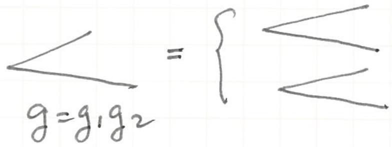
$$P_{\gamma,\mathfrak{D}} = \lim_{\ell\to\infty} P_{\gamma,\mathfrak{D}_\ell} \quad \text{well-defined}$$

✻ 同値/整合性

Def 散乱図 $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ は同値

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の γ に対して, $P_{\gamma,\mathfrak{D}} = P_{\gamma,\mathfrak{D}'}$

同値なものは無数にある

台の分割  壁元の分割 

最も重要な概念

Def 散乱図 $\mathfrak{D}$ は整合 (consistent)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の曲線 γ に対して, $P_{\gamma,\mathfrak{D}}$ は γ の端点にしかよらない

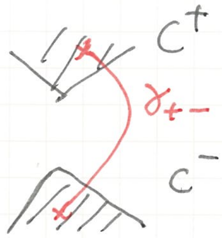
$\Longleftrightarrow$ 任意の閉曲線 γ に対して $P_{\gamma,\mathfrak{D}} = \mathrm{id}$

---

3. 存在定理

以下 $\mathfrak{D}$：整合散乱図

$$C^+ = \{ z \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle e_i, z \rangle \geq 0 \ (i=1,\dots,r) \}$$
$$C^- = \{ \quad " \quad \mid \quad " \quad \leq \quad " \quad \}$$



Fact：任意の $n \in N_{pr}^+$ に対して

$$n^\perp \cap \mathrm{Int}\, C^\pm = \phi$$

$n^\perp$ ∪ ∂ support

よって γ_{+-}：$\left\{ \begin{array}{l} 始点 \in \mathrm{Int}\, C^+ \\ 終点 \in \mathrm{Int}\, C^- \end{array} \right.$ なる曲線に対して

$g(\mathfrak{D}) := \mathfrak{p}_{\gamma_{+-}, \mathfrak{D}} \in G$ は γ_{+-} の取り方によらない

Thm 1 [KS] 以下の写像は全単射．

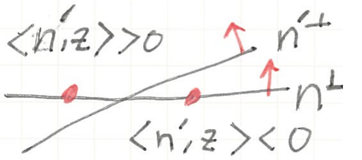
$$\varphi : \{すべての整合散乱図\}/\sim \longrightarrow G$$
$$\mathfrak{D} \longmapsto g(\mathfrak{D})$$

証明のポイント．

Def $z \in M_{\mathbb{R}}$ は一般(の点) $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $z \in n^\perp$ なる $n \in N_{pr}^+$ は高々一つ

z：一般　分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+^z \oplus \mathfrak{g}_0^z \oplus \mathfrak{g}_-^z$

$$\mathfrak{g}_0^z = \bigoplus_{\substack{n \in N_+ \\ \langle n, z \rangle = 0}} \mathfrak{g}_n, \quad \mathfrak{g}_\pm^z = \bigoplus_{\substack{n \in N_+ \\ \langle n, z \rangle \gtrless 0}} \mathfrak{g}_n \qquad \mathfrak{g}_n = \mathbb{Q} X_n$$

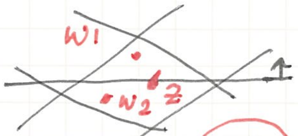


ポイント① 上の分解は $n^\perp$ 上で一定ではない

(wall-crossing のメカニズムの起源)

対応する群の分解 $G = G_+^z G_0^z G_-^z$

$$g = g_+^z \, g_0^z \, g_-^z \ (一意的)$$



ポイント② 右図において　　$n \in (N_{pr}^+)^{\leq \ell}$ のもの

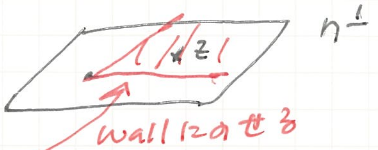
局所整合性 $g_0^z \equiv (g_+^{w_2})^{-1} g_+^{w_1} \mod G^{>\ell}$

∵

$$g = \overbrace{g_+^z \, g_0^z}^{g_+^{w_1}} \overbrace{g_-^z}^{g_-^{w}} \Big\} \mod G^{>\ell}$$
$$g = \underbrace{g_+^z}_{g_+^{w_2}} \underbrace{g_0^z \, g_-^z}_{g_-^{w_2}}$$

φ の逆写像　$g \in G$ に対して

$$g_0^z = \exp\left(\sum_{j>0} c_j X_{jn} \right)$$
$$= \prod_{j>0} \exp(c_j X_{jn})$$



局所整合性 $\Rightarrow$ $\mathfrak{D}$ の整合性

4. ランク2の例

・Thm 1 の構成はGの抽象的な分解にもとづく

以下，特別な整合散乱図を二重対数元と五項関係式で構成

復習: $n\in N^{+}$, $\Psi[n]=\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j^{2}}X_{jn}\right)$

$\{n',n\}=c$ のとき

$$\Psi[n']^{1/c}\,\Psi[n]^{1/c}=\Psi[n]^{1/c}\,\Psi[n+n']^{1/c}\,\Psi[n']^{1/c}$$

以下 $r=2$ $\Omega=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ とする

$\{e_2,e_1\}=1$

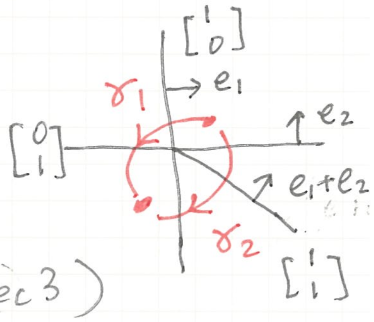
$$\Psi[e_2]\,\Psi[e_1]=\Psi[e_1]\,\Psi[e_1+e_2]\,\Psi[e_2]$$

(※) $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}_{A_2型の正ルート}$ と略記

例1 A_2型

(※)は右の散乱図の整合条件とみなせる

$$\mathfrak{p}_{\gamma_1,\mathfrak{D}}=\mathfrak{p}_{\gamma_2,\mathfrak{D}}$$



これは A_2型の団散乱図（CSD）（定義はLec3）

A_2型のG扇ともみなせる。

例2 B_2型

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^{2}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

反整列 $\frac{0}{1}<\frac{1}{0}$

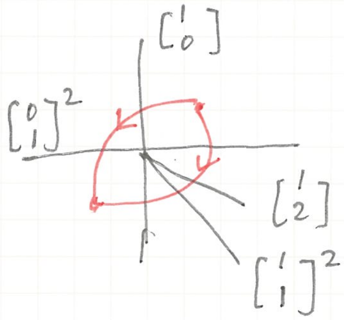
$$=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^{2}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^{2}$$

$\frac{1}{0}>\frac{1}{1}>\frac{1}{2}>\frac{0}{1}$ 整列

B_2型の正ルート

注 $\left\{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right\}$
$=bc-ad$
$=-\det\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$



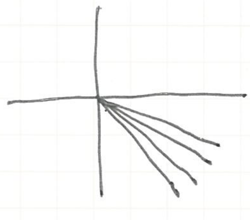
B_2型のCSD / G扇
（たてにリスケール）

例3 G_2型

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^{3}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^{2}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^{2}\right)$$

$$\overset{ex}{=}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^{3}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}^{3}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^{3}$$

整列 G_2型の正ルート



G_2型のCSD / G扇
（たてにリスケール）

Lect 3. 団散乱図

1. 平行部分群

Ω : $r\times r$ 反対称有理行列

$G = G_\Omega$: Ω から定まる群

$n \in N_{pr}^+$ に対して $G_n^{\parallel} = \{\exp(\sum_j c_j X_{jn})\}$

平行部分群 (アーベル群)

$\mathfrak{g}$ の n による分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+^n \oplus \mathfrak{g}_0^n \oplus \mathfrak{g}_-^n$$

$$\mathfrak{g}_0^n = \bigoplus_{\substack{n'\in N^+ \\ \{n',n\}=0}} \mathfrak{g}_{n'}, \quad \mathfrak{g}_\pm^n = \bigoplus_{\substack{n'\in N^+ \\ \{n',n\}\gtrless 0}} \mathfrak{g}_{n'}$$

分解 $G = G_+^n G_0^n G_-^n$ を induce.

さらに

$$\mathfrak{g}_0^n = \mathfrak{g}_n^{\parallel} \oplus \mathfrak{g}_n^{\perp}$$

↙ $\mathfrak{g}_0^n$ のイデアル

$$\mathfrak{g}_n^{\parallel} = \bigoplus_{n'\in \mathbb{Z}n} \mathfrak{g}_{n'}, \quad \mathfrak{g}_n^{\perp} = \bigoplus_{\substack{n'\notin \mathbb{Z}n \\ \{n',n\}=0}} \mathfrak{g}_{n'}$$

$$G_n^{\parallel} \cong G_0^n / G_n^{\perp}$$

分解 $G \ni g = g_+^n \underbrace{g_0^n}_{\downarrow\ g_n^{\parallel}} g_-^n$ を用いて

projection

写像 $\psi : G \longrightarrow \mathcal{S}^{\parallel} := \prod_{n\in N_{pr}^+} G_n^{\parallel}$ が定まる.

$g \longmapsto (g_n^{\parallel})$

(group hom ではない)

Thm 1. [GHKK] ψ は全単射 (group iso ではない)

(∵) 逆写像 $\psi^{-1} : \mathcal{S}^{\parallel} \longrightarrow G$ の作り方

$h = (h_n) \mapsto g$

$g_1, g_2, \dots$ を以下のように作り, $g = \lim_{\ell\to\infty} g_\ell$

g_1: $\quad g_1 = \prod_{n\in (N_{pr}^+)^{\le 1}} h_n$ ⟵ 順序に依存

$g_\ell \to g_{\ell+1}$: $(g_\ell)_n^{\parallel} h_n' = h_n$ となる h_n' を用いて

$$g_{\ell+1} = g_\ell \prod_{n\in (N_{pr}^+)^{\le \ell+1}} h_n'$$

$$\{\text{整合散乱図}\}/\sim \;\xrightarrow[\sim]{\text{Lect 2}}\; G \;\overset{\text{Thm 1}}{\simeq}\; \mathcal{S}''$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{D} & \longleftrightarrow & g & \longleftrightarrow & \mathbb{h}=(h_n) \\ \parallel & & & & \\ \mathfrak{D}(\mathbb{h}) & & & & \end{array}$$

$\mathfrak{D}(\mathbb{h})$の別の特徴づけを与える.

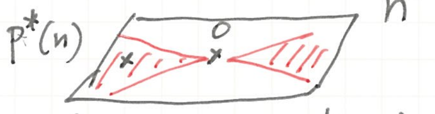
$$p^*:\ N \longrightarrow M_{\mathbb{R}}$$
$$n \longmapsto \{\cdot, n\}$$

このとき, $p^*(n) \in n^\perp$

$\because\ \langle n, p^*(n)\rangle = \{n, n\} = 0$ //

Def 壁 $w=(\partial, g)_n$ は incoming (内への) $\Longleftrightarrow$ $p^*(n) \in \partial$

outgoing (外への) $\Longleftrightarrow$ $p^*(n) \notin \partial$



$\mathfrak{D}_{in} :=$ {すべての$\mathfrak{D}$の内への壁}

Thm 2 [GHKK]

任意の $\mathbb{h} \in \mathcal{S}''$ に対して

$$\mathfrak{D}_{in} = \{(n^\perp, h_n)_n \mid n \in N^+_{pr}\}$$

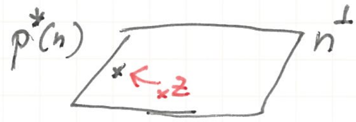
をみたす整合散乱図$\mathfrak{D}$が存在する

また, そのような$\mathfrak{D}$は$\mathfrak{D}(\mathbb{h})$と同値

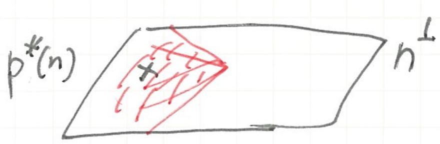
証明のキー: 任意の $g \in G$ と $n \in N^+_{pr}$ に対して

$$g''_n = \lim_{\substack{z \to \boxed{p^*(n)} \\ z \in n^\perp,\ \text{general}}} g_0^z$$

Lect 2

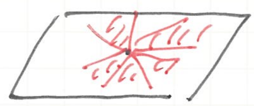


これを認めると



=

+



壁元の積 h_n $\mathfrak{D}(\mathbb{h})$ $\qquad$ $(n^\perp, h_n)_n$ incoming $\qquad$ outgoing

//

2. 団散乱図 (CSD)

初期行列 $B=(b_{ij})$ $r\times r$ 反対称化可能整数行列

(ある正有理対角行列 D が存在して，DB は反対称)

分解 $B=\Delta\Omega$ をひとつ決める．

Ω：反対称有理行列

Δ：正整数対角行列

- たとえば $\Delta = \lambda D^{-1}$　$\lambda>0$
- 分解は一意的でないが問題にならない．

今まで通り

$$\begin{cases}\Omega \\ N\simeq \mathbb{Z}^r \\ e_1,\dots,e_r : N\text{の基底}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_\Omega : \text{群} \\ M=\mathrm{Hom}(N,\mathbb{Z}) \\ e_1^*,\dots,e_r^* : \text{双対基底}\end{cases}$$

一方 $\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1,\dots,\delta_r)$ より．

$$\begin{cases} N^\circ := \bigoplus \delta_i e_i \subset N \\ M^\circ := \bigoplus \delta_i^{-1} e_i^* \end{cases} \qquad M \subset M^\circ \subset M_{\mathbb{R}}$$

また，各 $n\in N^+$ に対して，$\delta(n)\,n\in N^\circ$ となる最小の正の有理数 $\delta(n)$ を n の正規化因子という

例　$\delta(e_i)=\delta_i$　　$\delta(tn)=t^{-1}\delta(n)$　$t\in\mathbb{Z}_{>0}$

Thm 2 より

Thm-Def　$\mathfrak{D}_{in} = \{(e_i^\perp, \Psi[e_i]^{\delta_i})_{e_i} \mid i=1,\dots,r\}$ をみたす

整合散乱図 $\mathfrak{D}_B$ が(同値を除き)一意的に存在する．

これを B に付随する団散乱図式 (cluster scattering diagram =CSD) という

☺ Thm 2 で，$h_n = \begin{cases} \Psi[e_i]^{\delta_i} & n=e_i\ (i=1,\dots,r) \\ \mathrm{id} & \text{その他}\end{cases}$ とする．　//

3. rank 2 CDS と整列補題

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_1 \\ \delta_2 & 0 \end{pmatrix} = \underset{\Delta}{\begin{pmatrix} \delta_1 & \\ & \delta_2 \end{pmatrix}} \underset{\Omega}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$(\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{Z}_{>0})$ Lect 2

incoming の条件

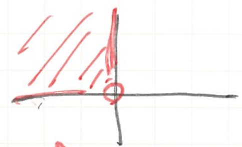
$$p^*: N \longrightarrow M_{\mathbb{R}}, \quad n \longmapsto \{\cdot, n\}$$

$\begin{cases} N \text{ の基底 } & e_1, e_2 \\ M_{\mathbb{R}} \text{ 〃 } & \delta_1^{-1} e_1^*, \delta_2^{-1} e_2^* \end{cases}$

このとき，p^* の表現行列は B となる

$\because$ $\langle \delta_i e_i, p^*(e_j) \rangle = \{\delta_i e_i, e_j\} = \delta_i \omega_{ij} = b_{ij}$ 〃

ゆえに，$p^*(n) = B \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta_1 n_2 \\ \delta_2 n_1 \end{pmatrix}$ $(n \in N^+_{pr})$

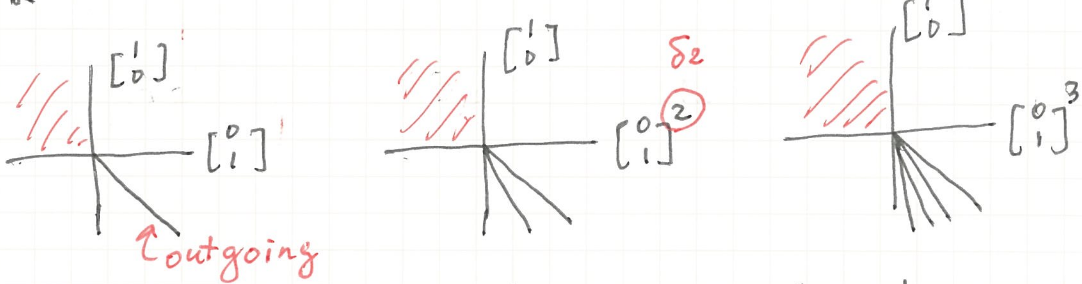


$M_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^2$

第2象限に含まれる

以下，$M_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^2$ は上の基底による.

Lect 2 の例



B	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
	A_2	B_2	G_2

に付随するCSD.

一般の B の CSD の整合関係式

$$(*) \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\delta_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\delta_1}}_{\text{反整列}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\delta_1} \cdots\cdots \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\delta_2}}_{\text{整列}}$$

Thm 3 (整列補題 [N21])

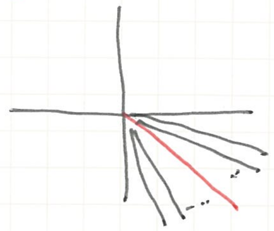
$\Psi[n]^{\delta(n)}$ の反整列(有限)積は，五角関係式を(必要なら無限回)適用し，$\Psi[n]^{\delta(n)}$ の整列(無限)積に直せる.

- アルゴリズムがある
- プログラム (SageMath) もある

} [N21]

例1　$(\delta_1,\delta_2)=(2,2)$　$A_1^{(1)}$型

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}^2\cdots\left(\prod_{j=0}^{\infty}\begin{bmatrix}2^j\\2^j\end{bmatrix}^{2^{2-j}}\right)\cdots\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2$$



式は [Reincke12]

五角による導出 [松下21]

参考：発見的導出.

$$\underset{\text{五角}}{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^2=}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\underset{>}{}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^2\underset{>}{}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}_{<}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^2\underset{>}{}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\underset{>}{}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2 \qquad (\#)$$

not ordered

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}=2$$

mod $G^{>3}$ では $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ は可換

$$(\#)\text{の右辺}\equiv\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}^2\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^4\right)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2$$

degree を上げる

$$\text{五角}\qquad\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}_2^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_2^2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_2\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}_2^2\underbrace{\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}_2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_2}_{\text{not ordered}}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}_2^2$$

(#と同じ構造)

$$[\ \ ]_2=[\ \ ]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left\{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}=4$$

mod $G^{>7}$ では $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ は可換

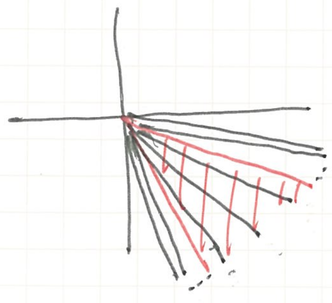
$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^2\equiv\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}^2\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^4\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}^2\right)\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}^2\times\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2$$

例2　$(\delta_1,\delta_2)=(3,3)$　nonaffine

SageMath のプログラム [N]

mod $G^{>5}$ で

$$\begin{array}{l}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^3\equiv\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^3\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}^3\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}^9\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}^{39}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^9\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}^{18}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}^{39}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}^9\right)\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}^3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^3\\ \text{deg}\quad 1\quad 4\quad 3\quad 5\quad 2\quad 4\quad 5\quad 3\quad 4\quad 1\end{array}$$



← $\delta_1=\delta_2$ すべての有理傾き

[Davison-Mandel]

The Badlands

Lect 4 団散乱図の正実現

1. CSDの正実現

* 正実現

一般に

- $g \in G_\Omega$ は $\exp(X_n)^c$ $(n \in N^+, c \in \mathbb{Q})$ の(無限)積で表せる
- $\Psi[n] = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j^2} X_{jn}\right)$ を逆転させて

  g は $\Psi[n]^c$ $(n \in N^+, c \in \mathbb{Q})$ の(無限)積で表せる

CSDでは特別なことがおこる

Thm 1 [GHKK] CSD $\mathfrak{D}_B$ のすべての壁元を $\Psi[n]^{\underbrace{\delta(n)}_{>0}}$ の積にとることができる.

これをCSDの正実現という

[GHKK]の構成

degreeについてのinduction

各stepで $\left\{\begin{array}{l}\text{perturbation trick} \\ \text{lattice change trick}\end{array}\right.$ を用いる

ここではこれを整列補題でおきかえる [N]

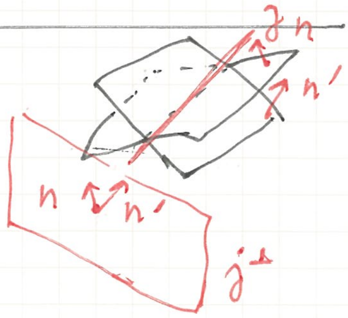
* 継目

Def $\mathfrak{D}$ の壁 w_1, w_2 の台の交わり $\mathfrak{j} = \partial_1 \cap \partial_2$ の次元が $r-2$ のとき, $\mathfrak{j}$ を継目(joint)という

継目 $\mathfrak{j}$ に対して

$$\mathfrak{j}^{\perp} = \{ n \in N \mid \langle n, \mathfrak{j} \rangle = 0 \}$$

N の rank 2 sublattice



① $\mathfrak{j}$ は平行 (parallel) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\{\ ,\ \}|_{\mathfrak{j}^{\perp}} = 0$

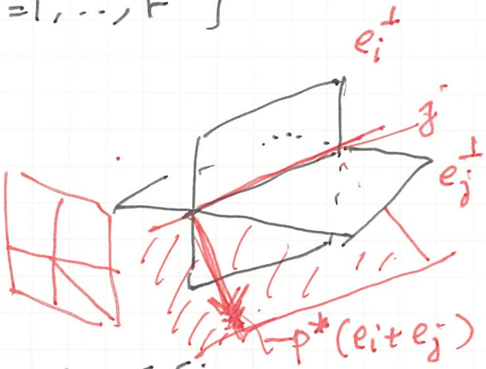
このとき, $G_n^{\parallel}$ と $G_{n'}^{\parallel}$ は可換

② $\mathfrak{j}$ は垂直 (perpendicular) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\{\ ,\ \}_{\mathfrak{j}^{\perp}} \neq 0$

☆ 正実現の構成

$\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_2 \subset \mathfrak{D}_3 \subset \cdots$, $\mathfrak{D} = \lim \mathfrak{D}_\ell$ と作る.

Step 1 $\mathfrak{D}_1 = \{ (e_i^\perp, \underbrace{\Phi[e_i]}_{\deg=1}{}^{\delta_i})_{e_i} \mid i=1,\dots,r \}$



Step 2 $\mathfrak{D}_2$

継目 $j = e_i^\perp \cap e_j^\perp$: 垂直のとき $(C \neq 0)$

たとえば, $\{e_j, e_i\} = c > 0$ とする

$$\underbrace{\Phi[e_j]^{\delta_j}\,\Phi[e_i]^{\delta_i}}_{\text{anti-ordered}} \equiv \Phi[e_i]^{\delta_i}\,\underbrace{\Phi[e_i+e_j]}_{\deg 2}{}^{c\delta_i\delta_j}\,\Phi[e_j]^{\delta_j} \mod G^{>2}$$

五角

このとき 壁 $(\sigma(j, -p^*(e_i+e_j)), \Phi[e_i+e_j]^{c\delta_i\delta_j})_{e_i+e_j}$

を加える

$\sigma(\cdot,\cdot)$ これらの張る cone
outgoing

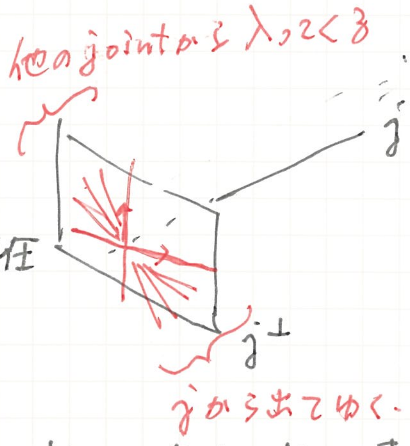
Step ℓ $\mathfrak{D}_{\ell-1} \rightsquigarrow \mathfrak{D}_\ell$

j: $\mathfrak{D}_{\ell-1}$ の垂直継目

$N_j^+ = N^+ \cap j^\perp$, $N_{j,pr}^+ = N_{pr}^+ \cap j^\perp$

以下をみたす $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \in N_{j,pr}^+$ が一意的に存在

$$\begin{cases} N_j^+ \subset \mathbb{Q}_{\geq 0}\tilde{e}_1 + \mathbb{Q}_{\geq 0}\tilde{e}_2 \\ \{\tilde{e}_2, \tilde{e}_1\} > 0 \end{cases}$$



jを含み, 上の第2象限にある壁元の反整列積を整列積で表し, $\deg(tn) = \ell$ の元 $\Phi[tn]^{s\delta(tn)}$ に対して

壁 $(\sigma(j, -p^*(n)), 〃)_n$ を加える.

また, 上で得られる $\mathfrak{D}$ は 平行継目のまわりでも整合となる //

(これは非自明)

また，上の構成より

Thm 2 [N21] CSDの任意の整合関係式は，可換関係式と五角関係式を（必要なら無限回）適用して自明なもの（$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$）に還元できる

∵ 壁面 γ のまわりの整合関係式のみ考えればよい

γが平行のとき ⇒ 可換関係式

垂直 ⇒ 〃 ＋ 五角関係式

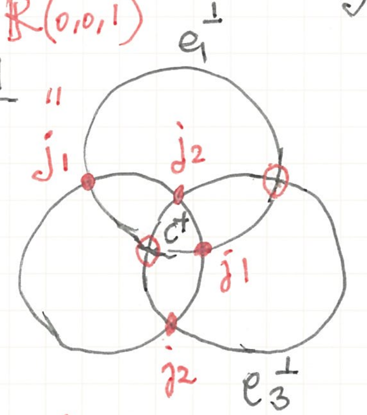
（整列補題の逆操作）

※ 構成の実例　rank 3　A_3型

$$B=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

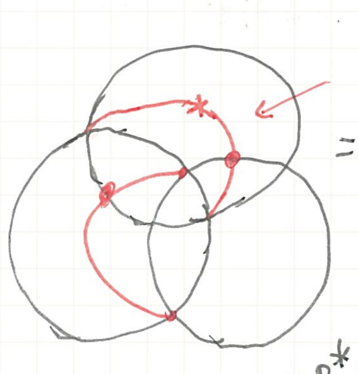
S^2に射影　　　立体射影

Step 1
$\ell=1$

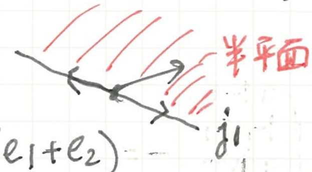


• 垂直　○ 水平

Step 2
$\ell=1\to2$

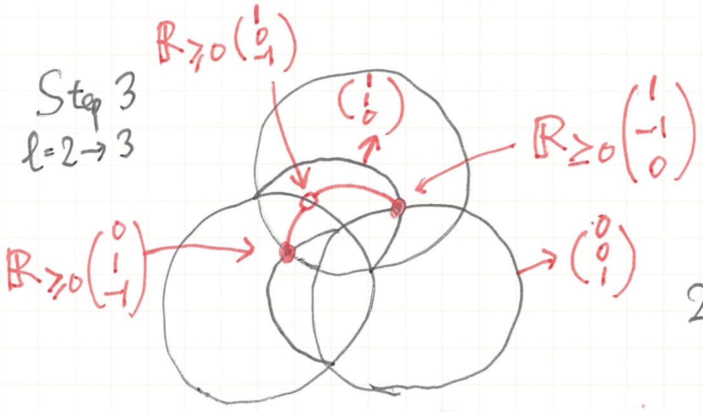


$\sigma(j_1,-p^*(e_1+e_2))$
$=\sigma((0,0,1),(0,0,-1),(1,-1,-1))$



$$-p^*(e_1+e_2)=-\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Step 3
$\ell=2\to3$



$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}=1$ ⇒ 五角

$$-B\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

2つの壁は○でつながる（○：水平）

ここで終（有限型）.

2. 団代数への応用

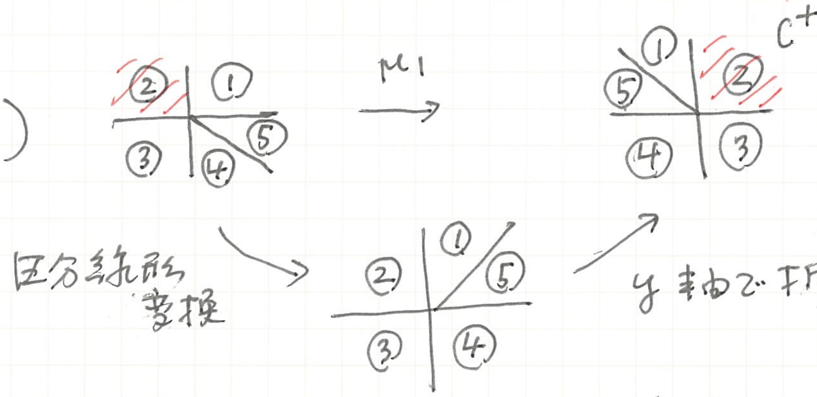
Thm 1 (CSDの正実現) とその構成
より

Thm 3 [GHKK] CSDの変異不変性

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "変異"] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\ \mathfrak{D}(B) \arrow[r, dashed, "区分線形変換"'] & \mathfrak{D}(B') \end{tikzcd}$$

例

$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



$B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

- $\mathfrak{D}(B')$のC^+ (部屋 chamber) が$\mathfrak{D}(B)$のある部屋に対応.
- 変異をくり返すことにより, $\mathfrak{D}(B)$の部屋構造が得られる
- 団代数のG扇 $\Delta_G(B)$も同じ変異不変性を持つ*.

これより, (正確には*とThm 4を同時に示す)

Thm 4 [GHKK] (1) G扇 $\Delta_G(B)$は(極小台を持つ) CSD $\mathfrak{D}(B)$の台に「埋め込まれる」

(2) cベクトルは壁の法ベクトルの定数倍
(⟹ cベクトルの符号同一性)

また, 団単項式は$\mathfrak{D}(B)$のtheta関数の特別なもの
Thm 1より係数が正値
これより.

Thm 5 [GHKK] 団代数のLaurent正値性.